

## Inhaltsverzeichnis

### Vorwort IX

|          |                                                                                 |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einführung</b>                                                               | <b>1</b>  |
| 1.1      | Allgemeines zur Methode der finiten Elemente                                    | 1         |
| 1.2      | Wie überführt man ein Randwertproblem in eine Variationsgleichung?              | 4         |
| 1.2.1    | Beispiel 1                                                                      | 4         |
| 1.2.2    | Beispiel 2                                                                      | 5         |
| <b>2</b> | <b>Grundkonzept</b>                                                             | <b>7</b>  |
| 2.1      | Stetiges und diskretes Problem. Beispiele von finiten Elementen                 | 7         |
| 2.1.1    | Die Grundzüge der Methode                                                       | 7         |
| 2.1.2    | Ein erstes Beispiel und eine theoretische Schwierigkeit                         | 10        |
| 2.1.3    | Die Lösung: Sobolev-Räume                                                       | 12        |
| 2.1.4    | Das erste Beispiel (Fortsetzung)                                                | 17        |
| 2.1.5    | Präzisierung der Grundzüge der Methode                                          | 18        |
| 2.1.6    | Beispiele von finiten Elementen                                                 | 26        |
| 2.2      | Der Aufbau des Gleichungssystems                                                | 36        |
| 2.2.1    | Elementmatrizen                                                                 | 36        |
| 2.2.2    | Die Elementmatrix für eine spezielle Bilinearform und Dreieckelemente vom Typ 1 | 37        |
| 2.2.3    | Die Elementmatrix für Dreieckelemente vom Typ 2                                 | 43        |
| 2.2.4    | Die Elementmatrix für Rechteckelemente vom Typ 1 bzw. bilineare Viereckelemente | 45        |
| 2.2.5    | Die Elementmatrix für den Laplace-Operator mit Tetraederelementen               | 47        |
| 2.2.6    | Elementmatrix für den Laplace-Operator mit trilinearen Quaderelementen          | 48        |
| <b>3</b> | <b>Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen</b>                     | <b>51</b> |
| 3.1      | Direkte oder iterative Verfahren?                                               | 51        |
| 3.2      | Direkte Verfahren                                                               | 53        |
| 3.2.1    | Der Gaußsche Algorithmus                                                        | 53        |
| 3.2.2    | Symmetrische Matrizen. Das Cholesky-Verfahren                                   | 58        |
| 3.2.3    | Weitere direkte Verfahren                                                       | 60        |
| 3.3      | Iterative Verfahren                                                             | 65        |

|          |                                                                                                           |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.3.1    | Allgemeine Bemerkungen                                                                                    | 65         |
| 3.3.2    | Das Jacobi-Verfahren, das Gauß-Seidel-Verfahren<br>und das Verfahren der sukzessiven Überrelaxation (SOR) | 67         |
| 3.3.3    | Das Verfahren der konjugierten Gradienten (CG)                                                            | 71         |
| 3.3.4    | Vorkonditionierte CG-Verfahren (PCG)                                                                      | 75         |
| 3.3.5    | Mehrgitterverfahren                                                                                       | 80         |
| <b>4</b> | <b>Konvergenzaussagen</b>                                                                                 | <b>85</b>  |
| 4.1      | Allgemeine Bemerkungen zur Konvergenzproblematik                                                          | 85         |
| 4.2      | Ein Beweis einer Fehlerabschätzung für Dreieckselemente vom Typ 1                                         | 86         |
| 4.2.1    | Zurückführung des Konvergenzproblems<br>auf ein Approximationsproblem                                     | 86         |
| 4.2.2    | Die Approximation durch stückweise lineare Funktionen                                                     | 87         |
| 4.2.3    | Fehlerabschätzung für Dreieckselemente vom Typ 1                                                          | 97         |
| 4.3      | Zusammenfassung der Resultate                                                                             | 99         |
| <b>5</b> | <b>Numerische Integration</b>                                                                             | <b>107</b> |
| 5.1      | Allgemeine Bemerkungen                                                                                    | 107        |
| 5.2      | Der Quadraturfehler für lineare Elemente                                                                  | 108        |
| 5.3      | Eine Übersicht: passende Integrationsformeln                                                              | 112        |
| <b>6</b> | <b>Randapproximation. Isoparametrische Elemente</b>                                                       | <b>121</b> |
| 6.1      | Approximation des Gebietes $\Omega$ durch ein Polygon                                                     | 121        |
| 6.2      | Isoparametrische Elemente                                                                                 | 124        |
| 6.3      | Randapproximation mit Hilfe isoparametrischer quadratischer<br>Elemente                                   | 128        |
| <b>7</b> | <b>Gemischte Verfahren</b>                                                                                | <b>131</b> |
| 7.1      | Ein Strömungsproblem (Stokes-Problem)                                                                     | 131        |
| 7.2      | Laplace-Gleichung                                                                                         | 135        |
| 7.3      | Biharmonische Gleichung                                                                                   | 140        |
| 7.3.1    | Stetiges und diskretes Problem                                                                            | 140        |
| 7.3.2    | Formulierung als gemischtes Problem                                                                       | 142        |
| 7.4      | Lösung der entstehenden Gleichungssysteme                                                                 | 146        |
| <b>8</b> | <b>Nichtkonforme FEM</b>                                                                                  | <b>151</b> |
| 8.1      | Laplace-Gleichung                                                                                         | 151        |
| 8.1.1    | Diskretes Problem                                                                                         | 151        |
| 8.1.2    | Konvergenzproblem                                                                                         | 156        |
| 8.1.3    | Beispiele nichtkonformer finiter Dreieck- und Rechteckelemente                                            | 158        |
| 8.2      | Biharmonische Gleichung                                                                                   | 164        |
| 8.2.1    | Stetiges und diskretes Problem                                                                            | 164        |
| 8.2.2    | Beispiele nichtkonformer finiter Dreieck- und Rechteckelemente                                            | 166        |
| 8.3      | Stokes-Problem                                                                                            | 172        |
| <b>9</b> | <b>Nichtstationäre (parabolische) Aufgaben</b>                                                            | <b>177</b> |
| 9.1      | Das stetige, das semidiskrete und das diskrete Problem                                                    | 177        |
| 9.2      | Numerische Integration von Anfangswertaufgaben: eine Übersicht                                            | 179        |

|                 |                                                                         |            |
|-----------------|-------------------------------------------------------------------------|------------|
| 9.3             | Die Diskretisierung des semidiskreten Problems mit dem $\theta$ -Schema | 187        |
| 9.4             | Eine Gesamtfehlerabschätzung für das $\theta$ -Schema                   | 189        |
| <b>10</b>       | <b>Gittergenerierung und Gittersteuerung</b>                            | <b>193</b> |
| 10.1            | Erzeugung und Verfeinerung von Dreiecksgittern                          | 193        |
| 10.2            | Fehlerschätzung und Gittersteuerung                                     | 197        |
| 10.2.1          | Residuale und zielorientierte Fehlerschätzer                            | 198        |
| 10.2.2          | Schätzer, basierend auf Superkonvergenz und Mittelung                   | 201        |
| <b>Anhang A</b> | <b>Hinweise auf Software und ein Beispiel</b>                           | <b>205</b> |
| A.1             | Notwendige Files für das MATLAB-Programm <code>fem2d</code>             | 206        |
| A.2             | Einige numerische Ergebnisse                                            | 209        |
|                 | <b>Literaturnachweis</b>                                                | <b>213</b> |
|                 | <b>Index</b>                                                            | <b>217</b> |

