

Bohner
Ott
Deusch
Rosner

Mathematisches Grundgerüst

*Ein Mathematikbuch
für die Eingangsklasse
Berufliches Gymnasium
Baden-Württemberg*



Geogebra interaktiv



Lern- und Erklärvideos

Merkur 
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner

Lehrauftrag Mathematik am BSW Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner

Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG behält sich eine Nutzung ihrer Inhalte für kommerzielles Text- und Data Mining (TDM) im Sinne von § 44 b UrhG ausdrücklich vor. Für den Erwerb einer entsprechenden Nutzungserlaubnis wenden Sie sich bitte an copyright@merkur-verlag.de.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte in zumutbarem Umfang untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.

Stand: Februar 2021

Umschlag: © frhuynh - Fotolia.com

* * * * *

8. Auflage 2021

© 1995 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0206-08

ISBN 978-3-8120-0206-6

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band „Mathematisches Grundgerüst - Ein Mathematikbuch für die Eingangsklasse“ ist ein Lehrbuch für alle beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg, die zum Abitur führen. Das Lehrbuch richtet sich exakt nach dem neuen Bildungsplan für die gymnasiale Oberstufe, Mathematik, in Baden-Württemberg, der zum 01.08.2021 in Kraft tritt.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam sowohl die im Lehrplan geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen K1 bis K6 (modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die im Bildungsplan aufgeführten Kompetenzen und Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.

1.2.2 Aufstellen von Geradengleichungen

Beispiel 1

☞ Eine Gerade g hat die Steigung $m = -\frac{3}{2}$ und verläuft durch den Punkt $A(3|2)$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g .

b) Die Gerade h verläuft parallel zu g durch den Punkt $P(0|1)$.
Wie lautet die Gleichung von h ?

Lösung

a) Ansatz für die Geradengleichung: $y = mx + b$
Einsetzen von $m = -\frac{3}{2}$: $y = -\frac{3}{2}x + b$
Punktprobe mit $A(3|2)$: $2 = -\frac{3}{2} \cdot 3 + b$
Umformen nach b liefert: $b = \frac{17}{2}$
Geradengleichung: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$

b) Parallel bedeutet gleiche Steigung.
Wegen $m_g = m_h$ und $m_g = -\frac{3}{2}$ folgt: $y = -\frac{3}{2}x + b$
 $P(0|1)$ liegt auf h : $b = 1$
Geradengleichung von h : $y = -\frac{3}{2}x + 1$


Beispiel 2

☞ Eine Gerade g verläuft durch die Punkte $S(0|1)$ und $A(3|2)$.
Zeichnen Sie die Gerade g . Bestimmen Sie die Steigung von g aus den Koordinaten von S und A . Geben Sie die Gleichung von g an.

Lösung

Wir lesen die Steigung m aus dem Steigungsdreieck ab:

$m = \frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3}$



Jede Lerneinheit schließt mit einer ausreichenden Anzahl von **Aufgaben** ab. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Aufgaben aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her. Eine Differenzierung der Aufgaben ist durch Farben gegeben:

- grün:** Lösung ohne Hilfsmittel
- blau:** keine Vorgabe zur Lösung

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

Die Aufgaben „**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**“ sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Sie werden im Anhang ausführlich gelöst.



Die **Heftklammer** im Lehrbuch mit Seitenangabe weist auf einen entsprechenden Abschnitt im Kapitel Grundwissen hin.



Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese im Downloadbereich zum Buch auf unserer Webseite <https://www.merkur-verlag.de>.



Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Im Buch wird **Geogebra** in vielfältiger Weise, zur Erarbeitung von mathematischen Inhalten und zur Lösung von Aufgaben eingesetzt.



Videos dienen der Veranschaulichung von Problemen und Erläuterung von Lösungswegen. Sie unterstützen die Lernenden beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge.

Aufgaben

1 Gegeben ist die Funktion f . Zeichnen Sie das zugehörige Schaubild.
Bestimmen Sie $f(-1.5)$ und einen x -Wert für $f(x) = 1$. Geben Sie den Wertebereich von f an.
a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ b) $f(x) = 6 - 2x$ c) $f(x) = 0.25x^2$ d) $f(x) = 4 - x^2$

2 Stellen Sie folgende Zuordnungen grafisch dar.
a)

x	-1	-0.5	1	1.5	2
y	2	-1	2	-0.5	3

 b)

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
y	-2	0	-2	-1	3	7

3 Drücken Sie die Zuordnung als Wertetabelle aus.
a) b)

4 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f . Bestimmen Sie Definitions- und Wertemenge von f .
a) b)

5 Welches Schaubild gehört zu einer Funktion $f: x \mapsto f(x)$? Begründen Sie.

Symmetrie zum Ursprung
Können im Funktionsform nur **ungerade Exponenten** von x vor, dann ist das Schaubild **symmetrisch zum Ursprung**. Die Bedingung für Punktsymmetrie zu $O(0|0)$: $f(-x) = -f(x)$, ist erfüllt.
Beispiele: $f(x) = ax$; $f(x) = ax^2 + cx$; $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

Symmetrie zur y-Achse
Können im Funktionsform nur **gerade Exponenten** von x vor, dann ist das Schaubild **symmetrisch zur y-Achse**. Die Bedingung für Symmetrie zur y-Achse, $f(-x) = f(x)$, ist erfüllt.

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Gegeben ist die Polynomfunktion f mit Schaubild K.
Bestimmen Sie drei Eigenschaften von K aus dem Funktionsterm.
a) $f(x) = 0.5x - 4x^2 - 3$
b) $f(x) = 20x^3 - 49x + 4$
c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2$

2 Untersuchen Sie die Funktion f mit $f(x) = 0(x + 1)(x - 2)(x - 5)$; $x \in \mathbb{R}$, auf Nullstellen. Skizzieren Sie den Graphen von f .

3 Die Abbildungen zeigen Schaubilder von Polynomfunktionen. Ordnen Sie jedem Schaubild einen Funktionsterm zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.
 $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + x^2$; $g(x) = x^3 + 3$; $h(x) = 0.25(x + 2)(x - 3)(x - 2)$; $i(x) = x^3 + 2x^2$

4 Bestimmen Sie die Lösungsmenge ($x \in \mathbb{R}$).
a) $20x - 3(5x + 7) = -2(3 - x)$ b) $5x - (8 + 9x) = 12$
c) $-4x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x - 1$ d) $\frac{3}{2}x + 2 = x + 4$
e) $(x - 3)(4 - x) = 2 - (x + 5)(x - 1)$ f) $-\frac{1}{2}(2x - 1) = 1 - \frac{5}{2}x$

5 Das Schaubild der linearen Funktion f mit $f(x) = mx + n$ verläuft durch den Punkt $A(2|3)$. Ermitteln Sie m .

6 Für einen Betrieb lässt sich der Gewinn durch eine lineare Funktion beschreiben. Bei einer Produktion von 2ME beträgt der Gewinn 350GE. Die Gewinnzunahme pro ME beträgt 275GE. Bestimmen Sie die lineare Gewinnfunktion. Für welche Produktionsmenge beträgt der Gewinn 1075 GE?

12 1 Funktionen

1.1 Einführung in Funktionen

1.1.1 Das rechtwinklige Koordinatensystem

Durch das rechtwinklige Koordinatensystem lassen sich Punkte in der Ebene eindeutig festlegen. Zur Festlegung eines Punktes in der Ebene braucht man die **Koordinate (Abszisse)** und die **y-Koordinate (Ordinate)**.

II. Quadrant $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

12 K ist das Schaubild der linearen Funktion f mit $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$. G ist das Schaubild einer zweiten Funktion g . G steht senkrecht auf K und verläuft durch den Punkt $P(-2|1.5)$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen.
b) Bestimmen Sie den Funktionsterm $g(x)$.
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von K und G .
d) In welchem Bereich verläuft K oberhalb von G ?

13 Die Gerade g in Abbildung 1 hat die Gleichung $y = \frac{2}{3}x + 1$

Inhaltsverzeichnis

I Funktionen		10
1	Vertiefung der Mathematik aus der Sekundarstufe 1	10
1.1	Einführung in Funktionen	12
1.1.1	Das rechtwinklige Koordinatensystem	12
1.1.2	Definition einer Funktion	14
1.2	Lineare Funktionen	21
1.2.1	Definition einer linearen Funktion	21
1.2.2	Aufstellen von Geradengleichungen	25
1.2.3	Schnittpunkte	28
1.2.4	Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	36
2	Potenzfunktionen	42
2.1	Definition und Eigenschaften	44
2.1.1	Potenzfunktionen mit natürlicher Hochzahl	44
2.1.2	Potenzfunktionen mit negativer ganzer Hochzahl	45
2.1.3	Potenzfunktion f mit $f(x) = x^n$	46
2.2	Transformationen	47
2.3	Potenzgleichungen	54
2.4	Anwendungen von Potenzfunktionen	59
3	Polynomfunktionen	62
3.1	Definition einer Polynomfunktion	64
3.2	Polynomfunktionen und ihre Eigenschaften	68
3.2.1	Globales Verhalten	68
3.2.2	Symmetrie	71
3.3	Polynomgleichungen und geometrische Interpretation	75
3.3.1	Lösung von Polynomgleichungen	75
3.3.2	Gemeinsame Punkte von Graphen mit der x -Achse	81
3.3.3	Gemeinsame Punkte von zwei Graphen	91
3.4	Aufstellen von Funktionstermen	101
3.5	Polynomfunktionen in Anwendungen	109
3.5.1	Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	109
3.5.2	Optimierungsprobleme	115
4	Exponentialfunktionen	120
4.1	Einführungsbeispiele	122
4.2	Definition einer Exponentialfunktion	124
4.3	Die Euler'sche Zahl e	126
4.4	Exponentialfunktionen zur Basis e	127
4.5	Transformationen	128
4.6	Schaubilder von Exponentialfunktionen	131
4.7	Aufstellen von Funktionstermen	136
4.8	Exponentialgleichungen und geometrische Interpretation	138
4.8.1	Der Logarithmus	138
4.8.2	Exponentialgleichungen	140
4.8.3	Bestimmung von gemeinsamen Punkten	145
4.9	Wachstumsprozesse	150
4.9.1	Lineares Wachstum (Zu- und Abnahme)	150
4.9.2	Exponentielles Wachstum	151
4.9.3	Beschränktes Wachstum	158

8 Inhaltsverzeichnis

5	Änderungsrate und grafisches Differenzieren	162
5.1	Änderungsrate	164
5.2	Grafisches Differenzieren	169
5.3	Ableitungsregeln	175

II Vektorielle Geometrie

180

1	Raumanschauung und Koordinatisierung	180
1.1	Punkte	182
1.2	Vektoren	187
1.3	Rechnen mit Vektoren	189
1.3.1	Addition und Subtraktion	189
1.3.2	Skalare Multiplikation	192
2	Maße und Längen	198
2.1	Betrag eines Vektors	198
2.2	Skalarprodukt	200
2.3	Flächenberechnungen	205

Grundwissen

210

1	Zahlenmengen	210
2	Algebraische Begriffe und Vorübungen	212
2.1	Begriffe	212
2.2	Rechnen mit Summen und Differenzen	212
2.3	Rechnen mit Brüchen	214
2.4	Vereinfachung durch Ausklammern	215
2.5	Rechnen mit Potenzen	216
3	Gleichungen und Gleichungssysteme	219
3.1	Lineare Gleichungen	219
3.2	Lineare Gleichungssysteme	221
3.3	Quadratische Gleichungen	223

Anhang

227

1	Exkurs: Probleme lösen	227
2	Lösungen der Tests	232
3	Lösungen der Aufgaben im Kapitel Grundwissen	243
4	Einführung in Geogebra, Geogebra- und Videolisten	246
	Mathematische Zeichen	252
	Stichwortverzeichnis	253
	Abbildungsverzeichnis	255

