Bohner
Ott
Deusch

Mathematik im Berufskolleg I

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik an der KSW Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Umschlag: © Adrian Schulz Foto: Mall of Berlin
Bild Kreis links: © Christian Schwier – fotolia.com
Bild Kreis rechts: © Kirill Kedrinski – fotolia.com

* * * * * * * * * *

6. Auflage 2016

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-**0234-9**

2.1.4 Aufstellen von Geradengleichungen

Aufstellen von Geradengleichungen mithilfe der Hauptform

Beispiel

Eine Gerade g hat die Steigung $m = -\frac{5}{2}$ und verläuft durch den Punkt A (3 | 2). Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g.

Lösung

Ansatz für die Geradengleichung:	$y = mx + b$
Einsetzen von $m = -\frac{5}{2}$:	$y = -\frac{5}{2}x + b$
Punktprobe mit A (3 | 2)	$2 = -\frac{5}{2} \cdot 3 + b$
Umformen nach b liefert:	$b = \frac{19}{2}$
Geradengleichung:	$y = -\frac{5}{2}x + \frac{19}{2}$

Beispiel

Eine Gerade g verläuft durch den Punkt A (−1 | 8) und ist parallel zur Geraden h mit der Gleichung $y = 6x + 3$. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g.

Lösung

Ansatz für die Geradengleichung:	$y = mx + b$
Parallel heißt gleiche Steigung:	$m_g = m_h = 6$
Einsetzen von $m = 6$:	$y = 6x + b$
Punktprobe mit A (−1 | 8)	$8 = 6 \cdot (-1) + b$
Umformen nach b liefert:	$b = 14$
Geradengleichung:	$y = 6x + 14$

Beispiel

Von den Herstellkosten ist bekannt: Die variablen Stückkosten betragen 1,25 GE/ME und bei der Herstellung von 20 ME entstehen Kosten von 65 GE. Bestimmen Sie die lineare Gesamtkostenfunktion.
(Mengeneinheit (ME); Geldeinheit (GE))

Lösung

Ansatz für die Geradengleichung:	$y = mx + b$
Die variablen Stückkosten entsprechen der Steigung $m = 1{,}25$:	$y = 1{,}25x + b$
P (20 | 65) liegt auf der Kostengeraden:	$65 = 1{,}25 \cdot 20 + b \Rightarrow b = 40$
Gesamtkosten:	$y = K(x) = 1{,}25x + 40$

Beispiel

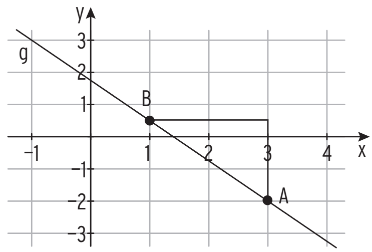
Eine Gerade g verläuft durch die Punkte A (3 | −2) und B (1 | 0,5).
Bestimmen Sie die Geradengleichung.

Lösung

a) Bestimmung der Steigung aus den Punkten A und B. Man wählt
$A(3|-2) = A(x_1|y_1)$
$B(1|0{,}5) = B(x_2|y_2)$
und berechnet die Steigung m:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0{,}5 - (-2)}{1 - 3} = \frac{2{,}5}{-2} = -\frac{5}{4}$$

Steigung der Geraden: $m = -\frac{5}{4}$



Ansatz für die Gleichung von g: $y = mx + b$

Mit $m = -\frac{5}{4}$ erhält man: $y = -\frac{5}{4}x + b$

Punktprobe mit z. B. A (3 | − 2) liefert b: $-2 = -\frac{5}{4} \cdot 3 + b$

$b = \frac{7}{4}$

Hinweis: Die Punktprobe mit dem Punkt B (1 | 0,5) liefert den gleichen Wert für b.

Geradengleichung: $y = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{4}$

Alternative
Lösung mithilfe eines **linearen Gleichungssystems**

Ansatz für die Geradengleichung: $y = mx + b$

Punktprobe mit A (3 | −2): $-2 = m \cdot 3 + b$

Punktprobe mit B (1 | 0,5): $0{,}5 = m \cdot 1 + b$

Punktprobe ergibt:

$$3m + b = -2 \quad (1)$$
$$m + b = 0{,}5 \quad (2)$$

Seite 165

Lösung dieses linearen Gleichungssystems (LGS) mit dem **Additionsverfahren**:

Gleichung (1) mit (−1) multiplizieren:

$$3m + b = -2 \quad |\cdot(-1)$$
$$m + b = 0{,}5$$

$$-3m - b = 2$$

Addition

$$m + b = 0{,}5 \quad +$$

ergibt eine Gleichung mit m: $-2m = 2{,}5$

Auflösung nach m: $m = -1{,}25$

Einsetzen von $m = -1{,}25$ in z. B. $m + b = 0{,}5$ ergibt: $-1{,}25 + b = 0{,}5$

$b = 1{,}75$

Geradengleichung: $y = -1{,}25x + 1{,}75$

Hinweis: Die Geradengleichung kann auch mithilfe des WTR **(lineare Regression)** bestimmt werden.

Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g.

a) g hat die Steigung $m = -4{,}5$ und verläuft durch $A(0\,|\,-3)$.

b) g hat die Steigung $m = 3$ und verläuft durch $A(1\,|\,1{,}5)$.

c) g verläuft durch $A(-6\,|\,1)$ und ist parallel zur Geraden h mit der Gleichung $y = -x + 2$.

2 Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B.
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g.

a) $A(0\,|\,-2)$; $B(-1\,|\,-5)$

b) $A(-3\,|\,-1{,}5)$; $B(1\,|\,1)$

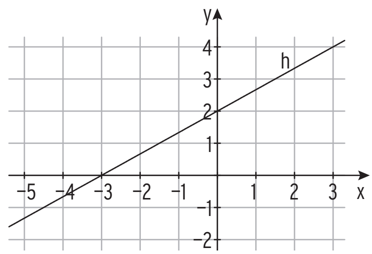
c) $A\left(2\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)$; $B\left(4\,\middle|\,\frac{3}{4}\right)$

d) $A\left(-2\,\middle|\,-\frac{5}{2}\right)$; $B\left(-1\,\middle|\,\frac{3}{2}\right)$

3 Die Abbildung zeigt die Gerade h.
Geben Sie die Gleichung von g an.

a) g ist eine Ursprungsgerade parallel zu h.

b) Die Gerade g schneidet h auf der x-Achse und geht durch $A(4\,|\,-2)$.



4 Bestimmen Sie die Gleichungen von zwei Geraden, die durch den Punkt $A(3\,|\,-1)$ verlaufen.

5 Für eine lineare Funktion f gilt $f(2) = -3$ und $f(0) = 5$.
Bestimmen Sie einen Funktionsterm.
Berechnen Sie $f(0{,}25)$; $f(\sqrt{2})$ und $f(a)$.

6 Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(4\,|\,8)$ und $B(1\,|\,2)$. Die Gerade h verläuft parallel zu g durch den Punkte $P(-2\,|\,7)$. Bestimmen Sie die Gleichung von h.

7 Maike erreicht bei ihrem 100-m-Lauf nach 11 Sekunden die 75-m-Marke.
Nach 14,2 Sekunden läuft sie durch das Ziel.
Vergleichen Sie ihre Durchschnittsgeschwindigkeit über 100 Meter mit der über die letzten 25 Meter.

8 Die Gesamtkosten für eine Ausbringungsmenge von 5 ME betragen 255 GE, für eine Ausbringungsmenge von 11 ME betragen sie 543 GE.
Berechnen Sie den Kostenzuwachs pro ME bei einer Produktionssteigerung von 5 ME auf 11 ME.

2.2.3 Quadratische Gleichungen und geometrische Interpretation

A) Lösung von quadratischen Gleichungen

Seite 167

Wurzelziehen

Beispiel:	$x^2 = 9$
Wurzelziehen:	$x_{1\|2} = \pm\sqrt{9}$
Lösung:	$x_{1\|2} = \pm 3$

Nullprodukt

Beispiel:	$(x-3)(x+5) = 0$
Satz vom Nullprodukt:	$x - 3 = 0$ oder $x + 5 = 0$
Lösung:	$x_1 = 3;\ x_2 = -5$

Ausklammern

Beispiel:	$x^2 - 7x = 0$
Ausklammern:	$x(x-7) = 0$
Satz vom Nullprodukt:	$x = 0 \vee x - 7 = 0$
Lösung:	$x_1 = 0;\ x_2 = 7$

abc-Formel

Beispiel:	$x^2 - 2x - 8 = 0$
abc-Formel: Mit $a = 1$, $b = -2$ und $c = -8$:	$x_{1\|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_{1\|2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$ $x_{1\|2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$
Lösung:	$x_1 = \frac{2+6}{2} = 4$ $x_2 = \frac{2-6}{2} = -2$

Satz vom Nullprodukt:

Ein Produkt ist null, wenn mindestens ein Faktor null ist:
$u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee v = 0$ („∨" bedeutet „oder")

Eine quadratische Gleichung der Form

$ax^2 + c = 0$	$(x+b)(x+c) = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$
	wird gelöst durch:		
Umformung		**Ausklammern**	**abc-Formel**
$x^2 = -\frac{c}{a}$		$x(ax + b) = 0$	$x_{1\|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
und		und	
Wurzelziehen	**Satz vom Nullprodukt**	**Satz vom Nullprodukt**	

Seite 170

Hinweis: Zerlegung in Faktoren mithilfe der Binomischen Formeln.

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$
$(x+3)^2 = 0$
$x_{1|2} = -3$

b) $x^2 - 10x + 25 = 0$
$(x-5)^2 = 0$
$x_{1|2} = 5$

Aufgaben

Seite 167

1 Lösen Sie die quadratische Gleichung nach x auf.

a) $2x^2 = 0$ b) $\frac{1}{2}x^2 - 3 = 0$ c) $x^2 - 5x + 4 = 0$

d) $x^2 - 4x = 0$ e) $x^2 - 2x + 1 = 0$ f) $(x - 1)(5 - x) = 0$

2 Lösen Sie die quadratische Gleichung.

a) $2x^2 + 2x - 24 = 0$ b) $\frac{1}{2}x^2 + 3x = 5$ c) $3 - 2x + \frac{1}{3}x^2 = 0$

d) $x^2 + 2x + 6 = -2x + 1$ e) $-x^2 - 1{,}5x = 1{,}25$ f) $(x - 3)^2 - 4 = 0$

g) $-3x^2 - 5x + 8 = 0$ h) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0$ i) $(2x + 5)^2 = 2$

j) $2x^2 + x - 5 = 0$ k) $x^2 - 4x + 1 = 4$ l) $\frac{1}{2}(x^2 - 5) = 0$

3 Geben Sie die Diskriminante an.

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ b) $2x^2 - x + 1 = -4$ c) $\frac{1}{4}x^2 - 1 = 0$

4 Lösen Sie die quadratische Gleichung nach x auf.

a) $8x^2 + 3x = 0$ b) $x^2 - x = 0$ c) $\frac{3}{2}x = \frac{1}{2}x^2$

d) $-\frac{1}{5}x - \frac{1}{2}x^2 = 0$ e) $\frac{4}{5}(x^2 - 4x) = 0$ f) $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} = 0$

g) $-\frac{1}{8}x^2 + 2x = 0$ h) $\frac{x^2}{5} - 5x = 0$ i) $tx - tx^2 = 0;\ t \neq 0$

5 Lösen Sie ohne Formel.

a) $(x + 4)(x - 5) = 0$ b) $(2x + 7)(4x - 1) = 0$ c) $x^2 + 8x + 16 = 0$

d) $x^2 = 14x - 49$ e) $(x + t)(x - 2) = 0$ f) $3a(2x - x^2) = 0;\ a \neq 0$

6 Lösen Sie die quadratische Gleichung ohne Formel.

a) $(x - 5)^2 = 49$ b) $(3x + 4)^2 = 1$ c) $9 - (2x + 5)^2 = 0$

d) $\frac{3}{4}(x - 2)^2 = 12$ e) $\frac{1}{12}x^2 = x$ f) $4x(2t + x) = 0$

7 Die Gleichung $x^2 - \square \cdot x + 6 = 0$ hat die Lösung $x = 3$.
Bestimmen Sie den Wert $\square$ und die weitere Lösung.

8 Ordnen Sie folgende Gleichung einem geeigneten Lösungsverfahren (Wurzelziehen, Ausklammern, Formel) zu.

a) $\frac{1}{2}x^2 - 6 = 0$ b) $x^2 + 6x = 0$ c) $3x^2 + 4x = 8$

d) $3x = 5x^2$ e) $9 = 2x^2$ f) $x^2 + 9 = 6x$

9 Bestimmen Sie x in Abhängigkeit von $a > 0$.

a) $ax^2 - 4 = 0$ b) $\frac{1}{2}x^2 - a = 0$ c) $x^2 - ax = 0$

B) Gemeinsame Punkte von Parabel und x-Achse

Beispiel

In einer Unternehmung lässt sich die Gewinnfunktion darstellen durch die Funktion G mit $G(x) = -2x^2 + 16x - 24$; $x \geq 0$, x in ME, G(x) in GE.

a) Geben Sie den Bereich an, in dem Gewinn erzielt wird. Skizzieren Sie die Gewinnkurve.

b) Wie groß ist der maximale Gewinn?

Lösung

a) Gewinn wird erzielt, wenn $G(x) > 0$. Die Ungleichung löst man, indem man $G(x) = 0$ setzt, d. h. man bestimmt die Nullstellen von G.

Nullstellen von G

Bedingung: $G(x) = 0$

$$-2x^2 + 16x - 24 = 0 \quad |:(-2)$$
$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung mit der abc-Formel:

$$\boxed{x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Mit $a = 1$, $b = -8$ und $c = 12$:

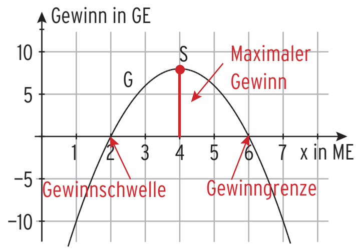
$$x_{1|2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1|2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$$

Nullstellen von G:

$$x_1 = \frac{8+4}{2} = 6; \quad x_2 = \frac{8-4}{2} = 2$$

Skizze:
Die Gewinnkurve ist eine nach unten geöffnete Parabel, da die Zahl vor x^2 negativ ist $(a < 0)$.
Schnittpunkte mit der x-Achse:
$N_1(6|0)$; $N_2(2|0)$
$G(x) > 0$:
Lösung durch Ablesen: $2 < x < 6$
Die Gewinnkurve verläuft oberhalb der x-Achse.
Die Unternehmung erzielt Gewinn für $2 < x < 6$.



b) Den maximalen Gewinn erhält man mithilfe des Scheitelpunkts.

Scheitelpunkt der Gewinnkurve

Der x_S-Wert des Scheitelpunkts ist der Mittelwert der Nullstellen von G.

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{6+2}{2} = 4$$

y_S-Wert des Scheitelpunkts: $y_S = G(x_S) = G(4) = 8$

Scheitelpunkt: $S(4|8)$

Der maximale Gewinn beträgt 8 GE.

2.2.5 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben

Beispiel

➲ Viele Brückenbögen haben die Form einer Parabel, d. h., ihr Verlauf lässt sich durch eine quadratische Funktion beschreiben. Der Bogen einer Brücke ist ein Parabelträger mit der Spannweite $l = 30\,\text{m}$ und der größten Höhe $h = 6\,\text{m}$. Berechnen Sie die Länge der 5 in gleichen Abständen vertikal angebrachten Spannstäbe.

Lösung

- **Reale Situation**

  Brückenbogen mit maximaler Höhe und Spannweite

- **Reales Modell (Vereinfachung)**

  Zur Vereinfachung nimmt man an, dass der Brückenbogen durch eine quadratische Funktion beschrieben werden kann.

- **Mathematisches Modell**

  Parabelgleichung bzw. Funktionsterm bestimmen.

  Sinnvolle Wahl eines Koordinatensystems

Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind bekannt: $N_1(0\,|\,0)$; $N_2(30\,|\,0)$

Ansatz: $f(x) = a\,x\,(x - 30)$

Die größte Höhe wird in der Mitte (vgl. Symmetrie) erreicht, also für $x = 15$.

Punktprobe ergibt: $f(15) = 6$

$a \cdot 15 \cdot (-15) = 6$

$a = -\frac{2}{75}$

Funktionsterm $f(x) = -\frac{2}{75}x\,(x - 30)$

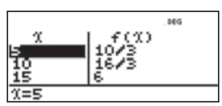
$f(x) = -\frac{2}{75}x^2 + \frac{4}{5}x$

Hinweis: Der Ansatz $y = a\,x^2 + b\,x + c$ führt nach Punktprobe mit N_1, N_2 und $C(15\,|\,6)$ auch zum Ziel.

Berechnung der Länge der Spannstäbe (y-Werte) mit dem WTR.

Die Spannstäbe sind 3,33 m, 5,33 m, 6 m, 5,33 m und 3,33 m lang.

Beachten Sie hierbei die Symmetrie.

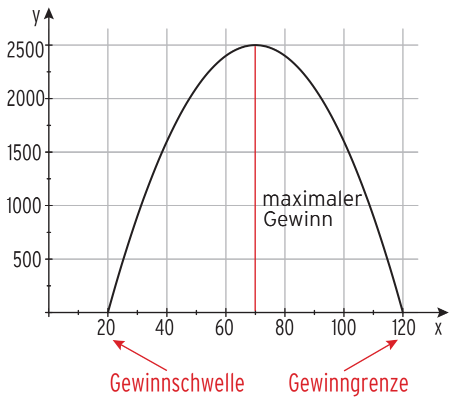


Beispiel

➲ In einer Unternehmung lässt sich der **Gewinn** näherungsweise beschreiben durch die Funktion G mit $G(x) = -x2 + 140x - 2400$. Die Variable x steht für die Stückzahl der produzierten und verkauften Ware.
In welchem Bereich produziert die Unternehmung mit Gewinn?
Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

Lösung

Aus der grafischen Darstellung des Gewinnverlaufs lässt sich die **Gewinnzone** (Bereich für die Ausbringungsmenge x mit $G(x) > 0$) erkennen.



Schnittstellen der Gewinnkurve mit der x-Achse

Bedingung: $G(x) = 0$ $\qquad -x^2 + 140x - 2400 = 0$

$x_1 = 20;\ x_2 = 120$

x_1 und x_2 sind die Nullstellen der Gewinnfunktion.

$x_{GS} = 20$ heißt **Gewinnschwelle.**

$x_{GG} = 120$ heißt **Gewinngrenze.**

In $x_{GS} = 20$ und $x_{GG} = 120$ wird **kostendeckend** produziert, d. h. $G(x) = 0$

Gewinnzone: $20 < x < 120$

Hinweis: Wird für eine Ausbringungsmenge **kostendeckend** produziert, so stimmen Kosten und Erlös überein, d. h. der Gewinn ist null.

Der y-Wert des Scheitelpunktes ergibt den maximalen Gewinn.

x_s-Wert des Scheitelpunktes: $\qquad x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = 70$

y_s-Wert des Scheitelpunktes: $\qquad y_s = G(70) = 2500$

Der maxmimale Gewinn beträgt 2500 GE.

Aufgaben

1 Auf einer Teststrecke wird gemessen, wie viel Benzin ein PKW bei gleichbleibender Geschwindigkeit verbraucht. Dabei hängt der Benzinverbrauch f (in Liter pro 100 km) quadratisch von der Geschwindigkeit v $\left(\text{in } \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ ab:

$f(v) = a v^2 + b v + 7$

v	30	80
f (v)	6,25	7,0

Mit welchem Verbrauch ist bei durchschnittlich 120 km pro h zu rechnen?

2 Eine Brückendurchfahrt ist 6,60 m hoch und 8 m breit.
Ein Fahrzeug ist 3 m breit und 4,80 m hoch.
Kann dieses Fahrzeug noch unter der Brücke hindurchfahren?

3 Über die Gesamtkosten K eines Betriebs in € ist Folgendes bekannt: Für eine Produktion von 10 Stück entstehen Gesamtkosten von 1050 €, bei 20 Stück sind es 1400 €.

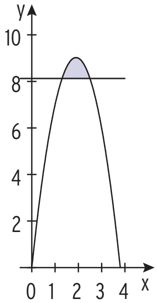
a) Bestimmen Sie die Kostenfunktion K unter der Annahme, dass es sich um eine quadratische Funktion handelt und die Fixkosten 900 € betragen.

b) Für welche Produktionsmenge entstehen Gesamtkosten von 1200 €?

c) Bestimmen Sie die Gewinnzone und den größten Gewinn, wenn die produzierte Menge zum Stückpreis von 85 € verkauft wird.

d) Wie groß ist der mittlere Kostenzuwachs im Intervall [10; 30]? Interpretieren Sie.

4 Bei den olympischen Spielen werden beim Diskuswerfen Scheiben verwendet, deren Form sich näherungsweise durch ein Parabelstück beschreiben lässt (siehe Skizze, alle Angaben in cm).
Das Parabelstück wird beschrieben durch den Term $f(x) = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{19}{2}x$.



a) Berechnen Sie den Durchmesser und die Dicke des Diskus.

b) Um gute Flugeigenschaften und eine hohe Haltbarkeit zu erzielen, entwickelt ein Sportinstitut einen Diskus, bei dem die Kante aus Stahl (siehe Markierung in der Skizze) und der Rest aus einem anderen Material besteht.
Im Querschnitt lässt sich die Stoffgrenze beschreiben durch eine Gerade mit der Gleichung $y = \frac{65}{8}$. Wie dick ist der Diskus an der Stoffgrenze?

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Entscheiden Sie, welche Kurve zu welchem Funktionsterm passt.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$f_1(x) = x^2 + 2$

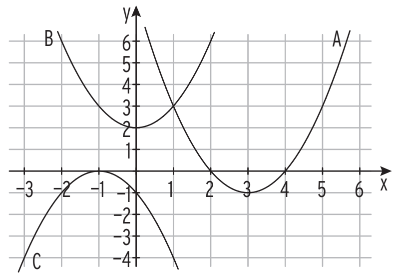
$f_2(x) = 2x^2 + 2$

$f_3(x) = -(x-2)(4-x)$

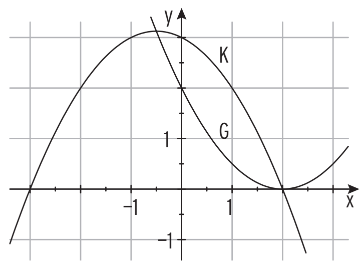
$f_4(x) = (x+2)(x+4)$

$f_5(x) = -(x+1)^2$

$f_6(x) = -(x-1)^2$



2 Bestimmen Sie die Parabelgleichungen aus der Abbildung.



3 K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(6-3x)$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie die Nullstellen von f an und skizzieren Sie K.

b) Berechnen Sie die x-Werte, für die gilt: $f(x) = 3$.
Interpretieren Sie geometrisch.

c) Ermitteln Sie die Schnittpunkte von K mit dem Graph G von g mit $g(x) = x^2 - 1$.

4 Berechnen Sie die Lösungen.

a) $2x^2 + 2x = 24$ **b)** $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0$ **c)** $0 = 2x - \frac{1}{3}x^2$

5 Die Normalparabel wird mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung gestreckt und danach um 3 nach oben verschoben. Man erhält die Parabel P.
Wie lautet die Parabelgleichung von P?
Die Normalparabel wird zuerst um 3 nach oben verschoben und anschließend mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung gestreckt. Erhält man die gleiche Parabel P? Begründen Sie Ihre Antwort.