

Jede Lerneinheit schließt mit einer ausreichenden Anzahl von **Aufgaben** ab. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Aufgaben aus dem Alltag, aus der Wirtschaft und der Technik stellen einen praktischen Bezug her. Eine Differenzierung der Aufgaben ist durch Farben gegeben:

- grün:** Lösung ohne Hilfsmittel
- blau:** keine Vorgabe zur Lösung

Themen und Aufgaben für das **erhöhte Anforderungsniveau (eA)** sind farblich gelb hinterlegt.

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

Die Aufgaben „**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**“ sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Sie werden im Anhang ausführlich gelöst.



Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese im Downloadbereich zum Buch auf unserer Webseite <https://www.merkur-verlag.de>.



Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Im Buch wird **Geogebra** in vielfältiger Weise, zur Erarbeitung von mathematischen Inhalten und zur Lösung von Aufgaben eingesetzt.



Videos dienen der Veranschaulichung von Problemen und Erläuterung von Lösungswegen. Sie unterstützen die Lernenden beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge.

50 | Analysis

Aufgaben

- Bestimmen Sie alle Lösungen exakt, die im Intervall $[0; 2\pi]$ liegen.
 - a) $5\sin(x) = 0$
 - b) $\sin(x) = 0,5\sqrt{2}$
 - c) $\sin(x) = -0,5$
 - d) $-4\sin(\frac{1}{2}x) = 4$
 - e) $\sin(x + \pi) = 1$
 - f) $\sin(\frac{3}{2}x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- Bestimmen Sie alle Lösungen, die im Intervall $[-\pi; 6,5]$ liegen.
 - a) $3\sin(x) - 2 = 0$
 - b) $\sin(x) = \frac{1}{3}$
 - c) $-5\sin(2x) = 3$
- Berechnen Sie x ungerundet so, dass die Gleichung im Intervall $[-4; 4]$ erfüllt ist.
 - a) $2\sin(2x) = \sin(2x) - 1$
 - b) $-4\sin(2x) + 2\sqrt{2} = 0$
 - c) $\sqrt{3}\sin(x) - \sqrt{3} = 0$
 - d) $2\sin(\frac{\pi}{2}) + \sqrt{2} = 0$
 - e) $2\sin(\frac{3}{2}x) = 3\sin(\frac{3}{2}x)$
 - f) $1 = 2\sin(x - \pi) = 0$
- Welche Gleichung hat eine Lösung, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.
 - a) $\sin(2x + \pi) - 3 = 0$
 - b) $4\sin(x) - 3 = 0$
 - c) $\sin(2x) = 3 + \sin(x)$
- Für welchen Wert von a ist $x = \frac{\pi}{6}$ Lösung der Gleichung $a \cdot \sin(x) - 2 = 0$? Berechnen Sie für diesen Wert von a alle Lösungen für $0 < x < \pi$.
- Bestimmen Sie die exakten Lösungen, die im Intervall $[-\pi; \pi]$ liegen.
 - a) $1 = \cos(x) = 0$
 - b) $\cos(x) = 0,5$
 - c) $2 \cos(x) = \sqrt{2}$
- Bestimmen Sie alle Lösungen x , die im Intervall $[0; 6,5]$ liegen.
 - a) $1 + 2 \cos(x) = 0$
 - b) $3 - 3 \cos(x) = 0$
 - c) $-4 \cos(x) = -1$

4.5.3 Rotationskörper

Die Bilder zeigen **Rotationskörper** aus dem Alltag. Bei diesen Körpern ist das Volumen eine wichtige Größe. Das Volumen kann mithilfe der Integralrechnung bestimmt werden.

Ableitungsregeln

Faktorregel: Konstante Faktoren bleiben beim Ableiten erhalten.
 $f(x) = a \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = a \cdot g'(x)$

Summenregel: Die Ableitung einer Summe ist die Summe der Ableitungen der Summanden.
 $f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Potenzregel: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}; n \in \mathbb{Q}$

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

- Untersuchen Sie das Schaubild der Funktion f auf Hoch- und Tiefpunkte.
 - a) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + 3; x \in \mathbb{R}$
 - b) $f(x) = (x - 3)e^x; x \in \mathbb{R}$
 - c) $f(x) = \sin(\pi x - 2); x \in]-0,5; 2,5[$
 - d) $f(x) = e^x - e^2 - x; x \in \mathbb{R}$
- Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.
 - a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1; x \in \mathbb{R}$
 - b) $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + 3; x \in \mathbb{R}$
- Machen Sie eine Aussage über das Krümmungsverhalten des Graphen K von f . Skizzieren Sie K .
 - a) $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}x^3; x \in \mathbb{R}$
 - b) $f(x) = \cos(2x) + 1; x \in]-\pi; 2\pi[$

Aufgaben

- Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f .
 - a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 2$
 - b) $f(x) = \frac{2}{3}(x^3 - 9x)$
 - c) $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5$
 - d) $f(x) = -x - 2 + e^{0,5x}$
 - e) $f(x) = 2 \sin(2x) + 1; x \in]-\pi; 4[$
 - f) $f(x) = \frac{1}{2} + x; x \neq 0$

Gleichungen der Form $\sin(z) = u$ bzw. $\cos(z) = u$

Beispiel 1

Bestimmen Sie alle Lösungen von $\sin(x) = \frac{1}{2}$ im Intervall $[0; 3\pi]$.

Lösung

Der WTR gibt eine exakte Lösung an: $x_1 = \frac{\pi}{6}$

Hinweis: Der Wert kann auch der Tabelle (*) (Formelsammlung) entnommen werden. \sin^{-1} nennt man auch Arcussinus.

Bestimmen einer weiteren Lösung mithilfe der Sinuskurve.

1.4 Trigonometrische Gleichungen und deren geometrische Interpretation

1.4.1 Lösung von trigonometrischen Gleichungen

Gleichungen der Form $\sin(z) = 0$ bzw. $\cos(z) = 0$

Vorbetrachtung

Man liest ab: $\sin(0) = 0; \sin(\pi) = 0; \sin(2\pi) = 0$

Inhaltsverzeichnis

I Analysis		10
1	Trigonometrische Funktionen und zugehörige Gleichungen	10
1.1	Definition der Winkelfunktionen	12
1.1.1	Definition der Winkelfunktionen für Winkel von 0° bis 90°	12
1.1.2	Definition der Winkelfunktionen für beliebige Winkel	16
1.1.3	Das Bogenmaß eines Winkels	20
1.2	Trigonometrische Funktionen	21
1.2.1	Sinus- und Kosinusfunktion	21
1.2.2	Transformationen	23
1.3	Aufstellen von Funktionstermen	38
1.4	Trigonometrische Gleichungen und deren geometrische Interpretation	41
1.4.1	Lösung von trigonometrischen Gleichungen	41
1.4.2	Gemeinsame Punkte	51
1.5	Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	59
2	Verknüpfung, Verkettung und Umkehrung von Funktionen	64
2.1	Verknüpfung von Funktionen	66
2.1.1	Summe von Funktionen	66
2.1.2	Produkt von Funktionen	69
2.2	Verkettung von Funktionen	70
2.3	Umkehrung von Funktionen	72
2.3.1	Bestimmung einer Umkehrfunktion	72
2.3.2	Umkehrbarkeit	75
2.3.3	Umkehrung einer Exponentialfunktion - Logarithmusfunktion	78
3	Differenzialrechnung	80
3.1	Ableitungen von Funktionen	82
3.1.1	Definition der Ableitung	82
3.1.2	Ableitungsregeln	86
3.1.3	Tangente	100
3.2	Untersuchung von Funktionsgraphen mithilfe der Differenzialrechnung	105
3.2.1	Monotonie	105
3.2.2	Extrempunkte	110
3.2.3	Wendepunkte	118
3.2.4	Kurvenuntersuchung	127
3.3	Aufstellen von Kurvengleichungen aus gegebenen Bedingungen	134
3.4	Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	144
3.5	Optimieren	154
4	Integralrechnung	160
4.1	Einführung	162
4.2	Stammfunktion, grafisches Ableiten und Aufleiten	164
4.2.1	Stammfunktion	164
4.2.2	Grafisches Ableiten und grafisches Aufleiten	170