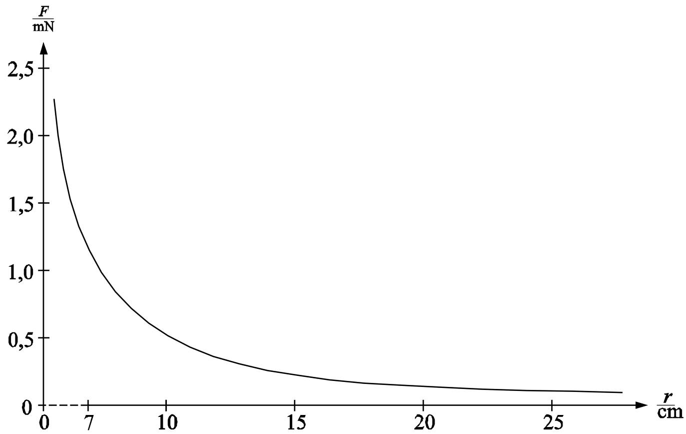
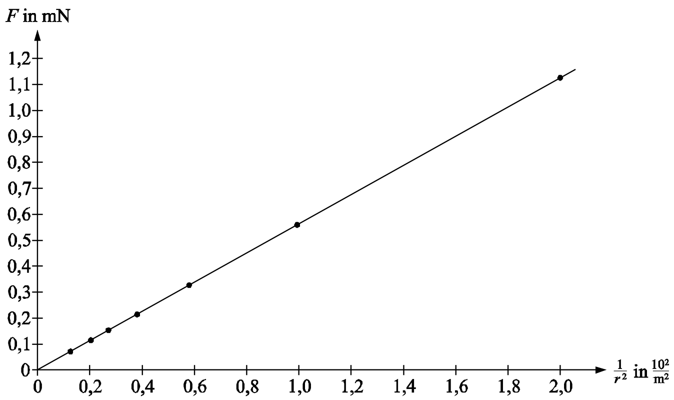


Rechnerische Auswertung

r in 10^{-2} m	7,0	10,0	13,0	16,0	19,0	22,0	25,0
F in mN	1,13	0,53	0,32	0,21	0,15	0,11	0,09
$F \cdot r^2$ in 10^{-3} N m^2	5,5	5,3	5,4	5,4	5,4	5,3	5,6

Grafische Auswertung im $\frac{1}{r^2}$*-F-Diagramm*

$\frac{1}{r^2}$ in $\frac{10^2}{\text{m}^2}$	2,00	1,00	0,59	0,39	0,28	0,21	0,16
F in mN	1,13	0,53	0,32	0,21	0,15	0,11	0,09



Ergebnis

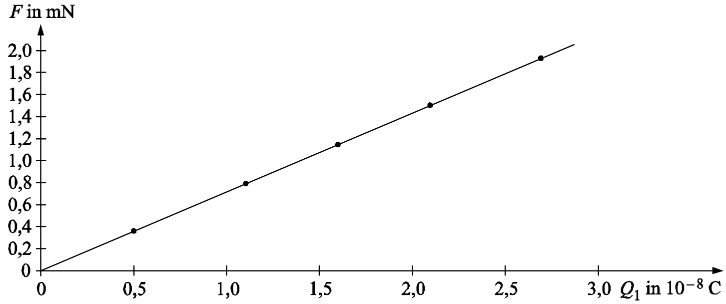
$F \sim \frac{1}{r^2}$ $\quad (Q_1 = \text{konst.}, Q_2 = \text{konst.})$

b) Zusammenhang zwischen der Kraft F und der Ladung Q_1
Bei konstantem Abstand r und konstanter Ladung Q_2 wird die Kraft F bei verschiedener Ladung Q_1 gemessen.

Messprotokoll und rechnerische Auswertung
$r = 6{,}0 \cdot 10^{-2}$ m
$Q_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ C

Q_1 in 10^{-8} C	0,5	1,1	1,6	2,1	2,7
F in mN	0,4	0,8	1,1	1,5	1,9
$\frac{F}{Q_1}$ in $\frac{\text{mN}}{10^{-8}\,\text{C}}$	0,8	0,7	0,7	0,7	0,7

Grafische Auswertung im Q_1-F-Diagramm



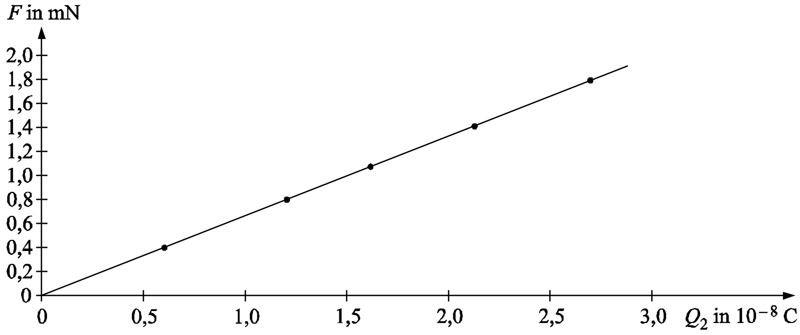
Ergebnis
$F \sim Q_1$ ($Q_2 = \text{konst.}$, $r = \text{konst.}$)

c) Zusammenhang zwischen der Kraft F und der Ladung Q_2
Bei konstantem Abstand r und konstanter Ladung Q_1 wird die Kraft F bei verschiedener Ladung Q_2 gemessen.

Messprotokoll und rechnerische Auswertung
$r = 6{,}0 \cdot 10^{-2}$ m
$Q_1 = 2{,}4 \cdot 10^{-8}$ C

Q_2 in 10^{-8} C	0,6	1,2	1,6	2,2	2,7
F in mN	0,4	0,8	1,1	1,4	1,8
$\frac{F}{Q_2}$ in $\frac{\text{mN}}{10^{-8}\,\text{C}}$	0,7	0,7	0,7	0,6	0,7

Grafische Auswertung im Q_2-F-Diagramm



Ergebnis

$F \sim Q_2 \quad (Q_1 = \text{konst.}, r = \text{konst.})$

Zusammenfassung der Einzelergebnisse von a, b und c

$$F \sim \frac{Q_1\,Q_2}{r^2}$$

$$\boxed{F = k\,\frac{Q_1\,Q_2}{r^2}}$$

Coulombgesetz (1785)
(Betragsgleichung)

Charles Coulomb, (1736–1806), französischer Physiker

Wir bestimmen den Proportionalitätsfaktor k. Aus

$$F = k\,\frac{Q_1\,Q_2}{r^2}$$

folgt:

$$k = \frac{F\,r^2}{Q_1\,Q_2}$$

Mit den Messwerten aus Messreihe b

$$\begin{aligned} F &= 1{,}1 \cdot 10^{-3}\,\text{N}, \\ r &= 6{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{m}, \\ Q_1 &= 1{,}6 \cdot 10^{-8}\,\text{C}, \\ Q_2 &= 2{,}5 \cdot 10^{-8}\,\text{C} \end{aligned}$$

erhalten wir:

$$k = \frac{1{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N} \cdot (6{,}0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2}{1{,}6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}}$$

$$k = 9{,}9 \cdot 10^9 \,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}$$

Sollwert:

$$k = 9{,}0 \cdot 10^9 \,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}$$

Prozentuale Abweichung f_p:

$$f_\mathrm{p} = \left| \frac{9{,}9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} - 9{,}0 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}}{9{,}0 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}} \right| \cdot 100\,\% = 10\,\%$$

Wie später theoretisch gezeigt wird, besteht zwischen dem Proportionalitätsfaktor k des Coulombgesetzes und der elektrischen Feldkonstanten (Dielektrizitätskonstante des Vakuums) ε_0 der Zusammenhang:

$$k = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} = 9{,}0 \cdot 10^9 \,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}$$

$$\text{mit } \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \,\frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{N\,m^2}} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V\,m}}$$

Damit lautet das Coulombgesetz für punktförmige Ladungen im Vakuum:

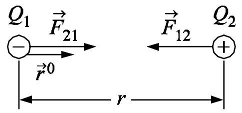
$$F = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1\,Q_2}{r^2}$$

Vektorielle Darstellung des Coulombgesetzes

Entsprechend der unterschiedlichen Ladungsarten ergeben sich bei Berücksichtigung des Vorzeichens der Ladung zwei Fälle für die Richtung der Coulombkräfte:

a) **Anziehung:** $Q_1 \cdot Q_2 < 0$

Fall 1: $Q_1 < 0$ und $Q_2 > 0$
$\vec{F}_{12}$ ist die Kraft der Ladung Q_1 auf die Ladung Q_2, $\vec{F}_{21}$ ist die Kraft der Ladung Q_2 auf die Ladung Q_1 (Gegenkraft).



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\vec{F}_{12} = k \cdot \frac{Q_1\,Q_2}{r^2}\,\vec{r}^{\,0}$$

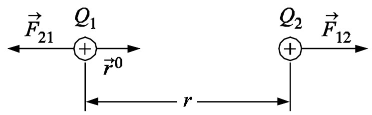
Der Fall 2: $Q_1 > 0$ und $Q_2 < 0$ zeigt das gleiche Ergebnis wie Fall 1.

b) **Abstoßung:** $Q_1 \cdot Q_2 > 0$

Fall 1: $Q_1 > 0$ und $Q_2 > 0$

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$\vec{F}_{12} = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}^{\,0}$



Auch hier zeigt der Fall 2: $Q_1 < 0$ und $Q_2 < 0$ das gleiche Ergebnis wie Fall 1.

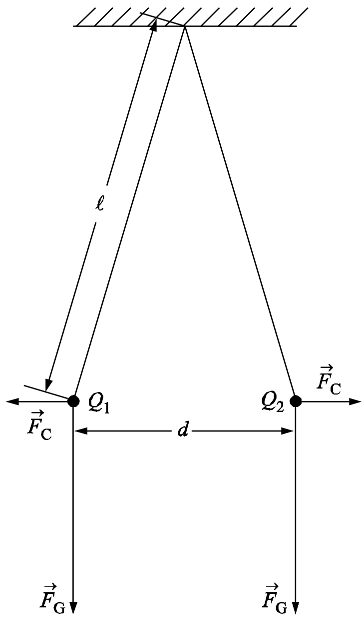
Aufgaben

13. a) Berechnen Sie den Betrag der elektrischen Kraft F_C zwischen Atomkern und Elektron eines Wasserstoffatoms.

b) Vergleichen Sie diesen Wert F_C mit der Gravitationskraft F_{Gr} zwischen Atomkern und Elektron.

14. Zwei als Massenpunkte zu betrachtende Körper der Masse m_1 und m_2 tragen die positiven Ladungen Q_1 und Q_2 mit $m_1 = m_2 = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ kg und $Q_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-13}$ C. Wie groß muss die Ladung Q_2 sein, damit sich Gravitationskraft und Coulombkraft aufheben?

15. Zwei gleiche Kugeln mit der Gewichtskraft von je $0{,}5 \cdot 10^{-2}$ N sind an zwei je $l = 1{,}00$ m langen, oben an demselben Punkt befestigten Fäden aufgehängt und tragen gleiche Ladungen $Q_1 = Q_2 = Q$. Die Kugeln haben wegen der Abstoßung den Abstand $d = 0{,}20$ m. Berechnen Sie den Betrag der Ladung auf den Kugeln.



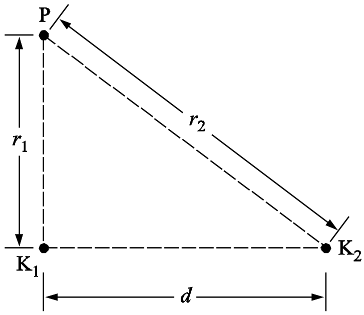
Berechnung:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} \cdot 7{,}32 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{1{,}738 \cdot 10^6\,\mathrm{m} + 1{,}10 \cdot 10^5\,\mathrm{m}} - \frac{2}{1{,}738 \cdot 10^6\,\mathrm{m}} \right)$$

$$\boldsymbol{\Delta E = -1{,}49 \cdot 10^9\,\mathrm{J}}$$

12. Vergleichen Sie Aufgabe 6.



Für das durch K_1 im Punkt P erzeugte Gravitationspotenzial V_1 gilt:

$$V_1 = -\frac{G\,m}{r_1}$$

Berechnung:

$$V_1 = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot 10{,}0 \cdot 10^{25}\,\mathrm{kg}}{3{,}0 \cdot 10^7\,\mathrm{m}}$$

$$\boldsymbol{V_1 = -2{,}22 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}}$$

Für das durch K_2 im Punkt P erzeugte Gravitationspotenzial V_2 gilt:

$$V_2 = -\frac{G\,m}{r_2}$$

Berechnung:

$$V_2 = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot 10{,}0 \cdot 10^{25}\,\mathrm{kg}}{5{,}0 \cdot 10^7\,\mathrm{m}}$$

$$\boldsymbol{V_2 = -1{,}33 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}}$$

Es gilt: $V_{\mathrm{res}} = V_1 + V_2$

Somit: $V_{\mathrm{res}} = -2{,}22 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} - 1{,}33 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$

$$\boldsymbol{V_{\mathrm{res}} = -3{,}55 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}}$$

13. a) Für den Abstand r des Elektrons vom Wasserstoffkern (Proton) gilt: $r = 5{,}3 \cdot 10^{-11}$ m (Radius der Bohr-Grundbahn)

Die Ladung Q_1 des Elektrons beträgt: $Q_1 = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

Die Ladung Q_2 des Protons beträgt: $Q_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

Für den Betrag der Coulombkraft F_C ergibt sich:

$$F_C = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{|Q_1|\,Q_2}{r^2}$$

Berechnung:

$$F_C = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N\,m^2}} \cdot \frac{\left|-1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C\right| \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C}{(5{,}3 \cdot 10^{-11}\,m)^2}$$

$$\boldsymbol{F_C = 8{,}2 \cdot 10^{-8}\,N}$$

b) Die Masse m_1 des Elektrons beträgt: $m_1 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg

Die Masse m_2 des Protons beträgt: $m_2 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg

Für den Betrag der Gravitationskraft F_{Gr} ergibt sich:

$$F_{Gr} = G \frac{m_1\, m_2}{r^2}$$

Berechnung:

$$F_{Gr} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}\,\frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg}{(5{,}3 \cdot 10^{-11}\,m)^2}$$

$$F_{Gr} = 3{,}6 \cdot 10^{-47}\,N$$

Vergleich der beiden Kräfte ergibt:

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{8{,}2 \cdot 10^{-8}\,N}{3{,}6 \cdot 10^{-47}\,N}$$

$$\boldsymbol{\frac{F_C}{F_G} = 2{,}3 \cdot 10^{39}}$$

Die Gravitationskraft ist also im Vergleich zur Coulombkraft vernachlässigbar.

14. Es soll gelten:
Gravitationskraft = Coulombkraft

$$F_G = F_C$$

$$G \frac{m_1\, m_2}{r^2} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{Q_1\, Q_2}{r^2}$$

$$Q_2 = 4\,\pi\,\varepsilon_0\,G\,\frac{m_1\, m_2}{Q_1}$$

Berechnung:

$$Q_2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{N\,m^2} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot \frac{(1{,}0 \cdot 10^{-3}\,kg)^2}{1{,}0 \cdot 10^{-13}\,C}$$

$$\boldsymbol{Q_2 = 7{,}4 \cdot 10^{-14}\,C}$$

15. $Q_1 = Q_2 = Q$

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_G$$

Es gilt:

$$\frac{F_\mathrm{G}}{F_\mathrm{C}} = \frac{h}{\frac{d}{2}}$$

Somit:

$$F_\mathrm{C} = \frac{d\,F_\mathrm{G}}{2\,h} = \frac{F_\mathrm{G}\,d}{2\cdot\sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

Berechnung:

$$F_\mathrm{C} = \frac{0{,}5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}\cdot 0{,}20\,\mathrm{m}}{2\cdot\sqrt{(1{,}00\,\mathrm{m})^2 - (0{,}10\,\mathrm{m})^2}}$$

$$\boldsymbol{F_\mathrm{C} = 0{,}5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}}$$

Mit

$$F_\mathrm{C} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{d^2}$$

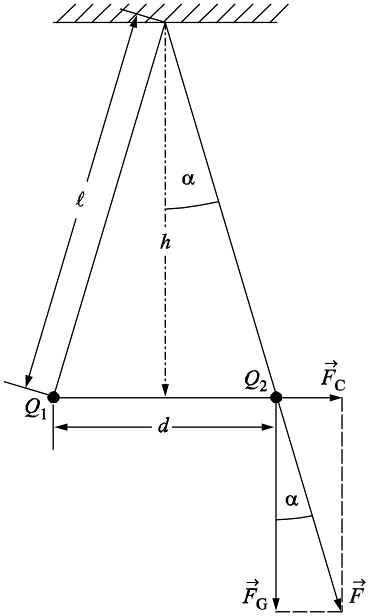
folgt:

$$Q = \sqrt{F_\mathrm{C}\,d^2\,4\,\pi\,\varepsilon_0}$$

Berechnung:

$$Q = \sqrt{0{,}5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}\cdot(0{,}20\,\mathrm{m})^2\cdot 4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\,m}^2}}$$

$$\boldsymbol{Q = 4{,}7\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}}$$



16. a) $E(r) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}$

$$E(r) = 9{,}0\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m}^2}{\mathrm{C}^2}\cdot\frac{1{,}0\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{r^2} = 9{,}0\,\frac{\mathrm{N\,m}^2}{\mathrm{C}}\cdot\frac{1}{r^2}$$

b)

r in 10^{-2} m	4,5	9,0	13,5
E in $\frac{\mathrm{k\,N}}{\mathrm{C}}$	4,4	1,1	0,5