# 1

# Aspekte der Hamiltonschen Mechanik

Die klassische Mechanik ist aus mehrerlei Gründen diejenige physikalische Theorie, welche als Vorbild für jeden anderen Zweig der Physik dienen sollte. Zum einen bietet sie die am besten verstandene Begrifflichkeit: Die Zuordnung von physikalischen Phänomenen und mathematischen Modellen ist nirgends so gut verstanden wie in der klassischen Mechanik, weshalb sich in diesem Aspekt jede andere physikalische Theorie an der Mechanik messen lassen muß. Zum anderen ist die klassische Mechanik Ausgangspunkt für vielerlei Verallgemeinerungen: Der Übergang von endlich vielen zu unendlich vielen Freiheitsgraden führt ins Reich der Feldtheorie und der statistischen Physik, der Übergang von klassischer Physik zur Quantenphysik wird in den folgenden Kapiteln noch eingehend studiert werden.

Ziel dieses Kapitels ist es, die wohlbekannte Hamiltonsche Mechanik im $\mathbb{R}^{2n}$ zu wiederholen, siehe beispielsweise [11, 140, 171], und eine Formulierung bereitzustellen, die sich auf geometrischere Situationen verallgemeinern läßt.

Der Konfigurationsraum eines klassischen Hamiltonschen Systems ist von der Form $\mathbb{R}^n$ mit (verallgemeinerten) Ortskoordinaten $x^1, \ldots, x^n$. Der zugehörige Phasenraum ist dann $\mathbb{R}^{2n}$ mit den induzierten kanonischen Koordinaten $q^1, \ldots, q^n$, $p_1, \ldots, p_n$, wobei $q^1, \ldots, q^n$ die Ortskoordinaten und $p_1, \ldots, p_n$ die dazu kanonisch konjugierten Impulskoordinaten sind. Die Dynamik eines Hamiltonschen Systems ist durch die Angabe einer (reellwertigen) *Hamilton-Funktion*

$$H : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

festgelegt: Gesucht werden die Lösungen der *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen*

$$\dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t)) \quad \text{und} \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t))$$

zu vorgegebenen Anfangsbedingungen $q(0) = q_0$ und $p(0) = p_0$. Hier und im folgenden werden gelegentlich die Koordinatenindizes unterdrückt, solange der Kontext klar ist.

## 1.1 Analytische Aspekte der Hamiltonschen Mechanik

Die Hamiltonschen Gleichungen sind gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, also von der Form

$$\dot{x}^i(t) = X^i(x(t)) \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, d, \tag{1.1}$$

wobei $X^i \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ vorgegebene reellwertige Funktionen sind und $d = 2n$ gilt. Im allgemeinen besitzen solche (gekoppelten) Differentialgleichungen zu gegebenen Anfangsbedingungen $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$ eine eindeutige maximale Lösung, auch *Integralkurve* oder *Flußlinie* genannt:

**Satz 1.1.1 (Picard-Lindelöf, lokale Version).** *Sei $X^i \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ für $i = 1, \ldots, d$ und $x_0 \in \mathbb{R}^d$ vorgegeben. Dann gilt:*

*i.) Es existiert eine auf einem offenen Intervall $I$ um $0$ definierte glatte Kurve*

$$x : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d, \tag{1.2}$$

*welche (1.1) löst und $x(0) = x_0$ erfüllt. Sind $x$ und $x'$ Lösungen zur selben Anfangsbedingung $x(0) = x_0 = x'(0)$, so gilt $x(t) = x'(t)$ auf $I \cap I'$.*

*ii.) Sei $I_{x_0}$ das maximale Intervall, auf dem die Lösungskurve mit Anfangsbedingung $x_0$ definiert ist. Dann ist*

$$\mathfrak{U} = \bigcup_{x_0 \in \mathbb{R}^d} I_{x_0} \times \{x_0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \tag{1.3}$$

*eine offene Umgebung von $\{0\} \times \mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.*

*iii.) Die Abbildung*

$$\Phi : \mathfrak{U} \ni (t, x_0) \mapsto \Phi(t, x_0) = x(t) \in \mathbb{R}^d, \tag{1.4}$$

*welche der Anfangsbedingung $x_0$ und der Zeit $t$ den Wert der zugehörigen Lösungskurve zur Zeit $t$ zuordnet, ist glatt.*

*iv.) Für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und alle $t, s \in \mathbb{R}$ mit $(t, x_0), (s, x_0), (t + s, x_0) \in \mathfrak{U}$ gilt*

$$\Phi(t, \Phi(s, x_0)) = \Phi(t + s, x_0) = \Phi(s, \Phi(t, x_0)) \quad \text{und} \quad \Phi(0, x_0) = x_0. \tag{1.5}$$

Einen Beweis für diesen Satz findet man in jedem Lehrbuch zu gewöhnlichen Differentialgleichungen. Der Beweis folgt im wesentlichen direkt aus dem Banachschen Fixpunktsatz, siehe beispielsweise [1, Thm. 2.1.2].

*Bemerkung 1.1.2 (Flußabbildung).*

*i.)* Die Abbildung $\Phi$ heißt *Flußabbildung* oder auch *Fluß* der Differentialgleichung (1.1). Eine Differentialgleichung der Form (1.1) heißt auch (lokales) *dynamisches System*. Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind also ein spezielles dynamisches System.

*ii.)* Gilt $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, ist der Fluß also für jede Anfangsbedingung für alle Zeiten definiert, so heißt der Fluß *vollständig*, siehe auch Abbildung 1.1. In der klassischen Mechanik treten sowohl vollständige als auch unvollständige Flüsse auf: der harmonische Oszillator hat einen vollständigen Fluß, das Kepler-System hat einen unvollständigen Fluß, siehe auch Aufgabe 1.1 sowie Aufgabe 1.3.

*iii.)* Der Satz ist ebenfalls richtig, nach den offensichtlichen Modifikationen, falls die Funktionen $X^i$ und damit die Differentialgleichung (1.1) nur auf einem offenen Teil $W \subseteq \mathbb{R}^d$ definiert sind.

*iv.)* Die Glattheit von $\Phi$ heißt insbesondere, daß der Wert einer Lösung $x(t)$ sowohl glatt von der Zeit als auch glatt von den Anfangsbedingungen abhängt.

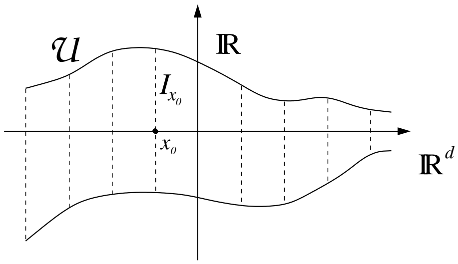


**Abb. 1.1.** Die Umgebung $\mathcal{U}$ für einen unvollständigen Fluß

Im folgenden betrachten wir hauptsächlich vollständige Flüsse. Ansonsten muß man sich auf einen kleinen offenen Bereich $W$ von $\mathbb{R}^d$ um einen gegebenen Punkt $x_0$ einschränken, um für *alle* Anfangsbedingungen in $W$ den Fluß für eine gewisse Zeit $t > 0$ definiert zu haben. Man definiert

$$\Phi_t : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad \Phi_t(x) = \Phi(t, x). \tag{1.6}$$

Dann gilt offenbar

$$\Phi_0 = \mathsf{id} \quad \text{und} \quad \Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s} \tag{1.7}$$

sowie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t = X \circ \Phi_t. \tag{1.8}$$

**Folgerung 1.1.3.** *Sei $\Phi_t$ ein (vollständiger) Fluß.*

*i.) Die Abbildung $t \mapsto \Phi_t$ ist eine Einparametergruppe von Diffeomorphismen $\Phi_t : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ und es gilt $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$.*

*ii.) Umgekehrt definiert jede (glatte) Einparametergruppe von Diffeomorphismen $\{t \mapsto \Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ via* (1.8) *eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form* (1.1)*, deren Fluß sie ist.*

*Es besteht also eine eineindeutige Korrespondenz zwischen Differentialgleichungen der Form* (1.1) *und Einparametergruppen von Diffeomorphismen.*

Die Definition einer erhaltenen Größe ist in der gesamten Mechanik und weit darüber hinaus von fundamentaler Bedeutung: Zum einen nützen sie beim praktischen Lösen der Bewegungsgleichungen, zum anderen sind Erhaltungsgrößen, wie wir noch im Detail sehen werden, untrennbar mit Symmetrien verknüpft. Hier nun also die wohlbekannte Definition.

**Definition 1.1.4 (Erhaltungsgröße).** *Eine (glatte) Erhaltungsgröße $f$ für* (1.1) *ist eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit*

$$f \circ \Phi_t = f \tag{1.9}$$

*für alle $t$.*

Mit anderen Worten: der Wert von $f$ bei $x$ hängt nur von der (eindeutigen) Lösungskurve durch $x$, nicht aber vom Punkt auf der Lösungskurve ab. Offenbar ist dies zur infinitesimalen Charakterisierung

$$\sum_{i=1}^{d} X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \tag{1.10}$$

äquivalent. Durch Ableitung von (1.9) nach $t$ bei $t = 0$ erhält man offenbar (1.10). Umgekehrt liefert (1.10) unter Verwendung der Einparametergruppeneigenschaft von $\Phi_t$ auch (1.9).

## 1.2 Geometrische Aspekte der Hamiltonschen Mechanik

Wir wollen nun die analytische Beschreibung auf geometrischere Weise deuten. Da der Fluß $\Phi_t$ eines dynamischen Systems eine Einparametergruppe von Diffeomorphismen ist, liegt es nahe, die Eigenschaften dieser Abbildung von einem geometrischen Standpunkt aus zu studieren.

### 1.2.1 Geometrische Eigenschaften von Flüssen

Ein dynamisches System

$$\dot{x}^i(t) = X^i(x(t)), \quad i = 1, \ldots, d, \tag{1.11}$$

läßt sich als glattes *Vektorfeld*

$$X : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \tag{1.12}$$

auffassen. Eine Lösungskurve $x(t)$ von (1.11) ist somit eine Kurve in $\mathbb{R}^d$, die an jedem Punkt *tangential* an das vorgegebene Vektorfeld $X$ ist, siehe Abbildung 1.2. Dies legt folgende intuitive Interpretation nahe: Das Vektorfeld $X$

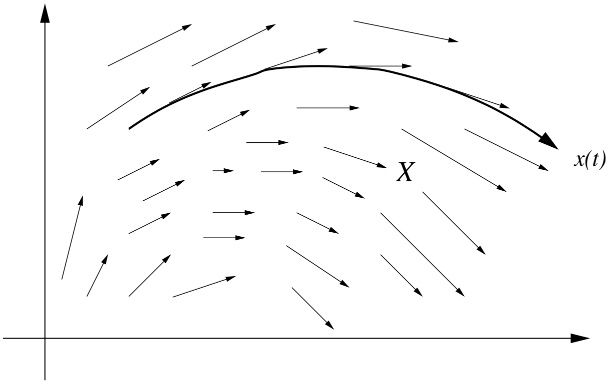


**Abb. 1.2.** Vektorfeld und Flußlinie

kann als „Geschwindigkeitsvektorfeld“ einer „Flüssigkeit“ aufgefaßt werden. Die Lösungskurven sind dann die Trajektorien von kleinen Testteilchen, welche in der Flüssigkeit treiben. Daher auch der Name „Flußabbildung“ und „Flußlinie“.

Auch wenn man die Flußabbildung in vielen Fällen *nicht explizit* bestimmen kann, so lassen sich anhand des geometrischen Bildes bestimmte Eigenschaften zumindest qualitativ verstehen. Dabei sind insbesondere folgende Fragestellungen und Eigenschaften von Interesse:

- Volumenerhaltender Fluß, entspricht einer inkompressiblen Flüssigkeit.
- Fixpunkte entsprechen $X(m) = 0$.
- Attraktoren/Repelloren.
- Geschlossene Bahnen.

Diese Fragestellungen sind der Ausgangspunkt zur qualitativen Analyse dynamischer Systeme, siehe beispielsweise [275, Kap. 9] sowie [1, Part III] und [11].

### 1.2.2 Hamiltonsche Flüsse

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen liefern ein spezielles dynamisches System, welches wir nun im Lichte der vorangegangenen Diskussion näher betrachten wollen. Das zugehörige *Hamiltonsche Vektorfeld* ist durch

$$X_H(q,p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p}(q,p) \\ -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p) \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

gegeben. Das Vektorfeld $X_H$ kann man als „Schiefgradient“ von $H$ auffassen: Mit der Matrix

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

gilt

$$X_H = \Omega_0 \nabla H, \tag{1.15}$$

wobei $\nabla H$ den üblichen Gradienten von $H$ bezeichnet. Das Minuszeichen in (1.14), also die *Antisymmetrie* der Matrix $\Omega_0$ stellt in gewisser Hinsicht das wichtigste Minuszeichen in der mathematischen Physik dar.

Die „Flüssigkeit“ eines Hamiltonschen Vektorfeldes ist *inkompressibel*, es gilt nämlich der *Satz von Liouville*:

**Satz 1.2.1 (Liouville).** *Ein Hamiltonsches Vektorfeld $X_H$ ist divergenzfrei. Damit ist ein Hamiltonscher Fluß volumenerhaltend.*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch elementares Nachrechnen, denn die Divergenz ist durch

$$\operatorname{div} X_H = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial X_H^k}{\partial x^k} = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{\partial}{\partial q^k} \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) - \frac{\partial}{\partial p_k} \left( \frac{\partial H}{\partial q^k} \right) \right) = 0$$

gegeben. □

*Bemerkung 1.2.2.* In Dimension $2n = 2$ ist umgekehrt jedes divergenzfreie Vektorfeld Hamiltonsch. In höheren Dimensionen $2n \geq 4$ gilt diese Umkehrung allerdings nicht mehr: es gibt divergenzfreie Vektorfelder und damit volumenerhaltende Flüsse, die nicht Hamiltonsch sind.

Ein Hamiltonscher Fluß erhält mehr als nur das Volumen. Er erhält auch die Matrix $\Omega_0$ in folgendem Sinne:

**Proposition 1.2.3.** *Sei $\Phi_t$ der Hamiltonsche Fluß eines Hamiltonschen Vektorfeldes $X_H$ und sei $\mathrm{D}\,\Phi_t$ die Jacobi-Matrix von $\Phi_t$. Dann gilt für alle $t$ und $x \in \mathbb{R}^{2n}$*

$$(\mathrm{D}\,\Phi_t)^{\mathrm{T}}\big|_x \circ \Omega_0 \circ (\mathrm{D}\,\Phi_t)\big|_x = \Omega_0 = (\mathrm{D}\,\Phi_t)\big|_x \circ \Omega_0 \circ (\mathrm{D}\,\Phi_t)^{\mathrm{T}}\big|_x. \tag{1.16}$$

*Beweis.* Mit Hilfe der Kettenregel und der Bewegungsgleichung (1.8) erhält man aus (1.15) die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathrm{D}\,\Phi_t)\big|_x = \Omega_0 \circ \mathrm{D}^2 H\big|_{\Phi_t(x)} \circ (\mathrm{D}\,\Phi_t)\big|_x, \tag{1.17}$$

wobei $\mathrm{D}^2 H$ die (symmetrische) Hesse-Matrix der Hamilton-Funktion $H$ ist. Da $\Omega_0^{\mathrm{T}} = -\Omega_0$, folgt aus (1.17) leicht, daß

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( (\mathrm{D}\,\Phi_t)^{\mathrm{T}}\big|_x \circ \Omega_0 \circ (\mathrm{D}\,\Phi_t)\big|_x \right) = 0. \tag{1.18}$$

Da Gleichung (1.16) für $t = 0$ sicherlich richtig ist, folgt mit (1.18) die Aussage auch für $t \neq 0$. Die zweite Gleichheit in (1.16) folgt durch Invertieren der ersten mit $\Omega_0^{-1} = \Omega_0^{\mathrm{T}} = -\Omega_0$ und $(\mathrm{D}\,\Phi_t)^{-1} = (\mathrm{D}\,\Phi_{-t})$. □

*Bemerkung 1.2.4.* Diese recht technisch scheinende Proposition besitzt eine konzeptuell viel klarere Deutung im Rahmen der symplektischen Geometrie, welche wir in Kapitel 3 kennenlernen werden.

### 1.2.3 Die symplektische Form

Die Matrix $\Omega_0$ kann auch dazu verwendet werden, eine Bilinearform zu definieren. Für Vektoren $X, Y \in \mathbb{R}^{2n}$ definiert man

$$\omega_0(X, Y) = \langle X, \Omega_0 Y \rangle\,. \tag{1.19}$$

Entsprechend kann man $\omega_0(X, Y)$ für Vektorfelder $X, Y$ auf $\mathbb{R}^{2n}$ punktweise definieren und erhält eine Funktion $\omega_0(X, Y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

**Lemma 1.2.5.** *Die Bilinearform $\omega_0$ erfüllt folgende Eigenschaften:*

*i.)* $\omega_0$ *ist antisymmetrisch:* $\omega_0(X, Y) = -\omega_0(Y, X)$.
*ii.)* $\omega_0$ *ist nichtausgeartet:* $\omega_0(X, Y) = 0$ *für alle* $Y$ *impliziert* $X = 0$. *Äquivalent dazu ist die Aussage, daß die Abbildung*

$$\flat : X \in \mathbb{R}^{2n} \mapsto X^\flat \in (\mathbb{R}^{2n})^* \tag{1.20}$$

*ein Vektorraumisomorphismus ist, wobei* $X^\flat(Y) = \omega_0(X, Y)$.

*Beweis.* Klar. □

**Definition 1.2.6 (Kanonische symplektische Form).** *Die Zweiform* $\omega_0$ *heißt kanonische symplektische Form auf* $\mathbb{R}^{2n}$. *Eine Matrix* $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ *heißt symplektisch, falls*

$$\omega_0(AX, AY) = \omega_0(X, Y), \tag{1.21}$$

*und infinitesimal symplektisch, falls*

$$\omega_0(AX, Y) + \omega_0(X, AY) = 0 \tag{1.22}$$

*für alle* $X, Y \in \mathbb{R}^{2n}$.

**Proposition 1.2.7 (Die symplektische Gruppe und ihre Lie-Algebra).** *Bezüglich der kanonischen symplektischen Form* $\omega_0$ *gilt:*

*i.) Die Menge der symplektischen Matrizen*

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid A \textit{ symplektisch}\} \tag{1.23}$$

*ist eine topologisch abgeschlossene Untergruppe von* $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$.
*ii.) Die Menge der infinitesimal symplektischen Matrizen*

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid A \textit{ infinitesimal symplektisch}\} \tag{1.24}$$

*ist eine Lie-Unteralgebra von* $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R})$.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch direktes Verifizieren der Gruppen- beziehungsweise der Lie-Algebrenaxiome. Die topologische Abgeschlossenheit folgt aus der Stetigkeit der Bedingung (1.21), siehe auch Aufgabe 1.5. □

*Bemerkung 1.2.8.* Die symplektische Zweiform kann als antisymmetrisches Analogon zu einem Euklidischen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\mathbb{R}^{2n}$ gesehen werden. Dann entsprechen die symplektischen Matrizen gerade den orthogonalen Matrizen, also den Isometrien des Skalarprodukts $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

**Satz 1.2.9.** *Sei $\Phi_t$ ein Hamiltonscher Fluß. Dann ist $\mathrm{D}\,\Phi_t\big|_x$ für alle $t$ und $x$ eine symplektische Matrix.*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen mittels Proposition 1.2.3, Gleichung (1.16). □

Im Hinblick auf Bemerkung 1.2.8 zeigt sich hier bereits ein drastischer Unterschied zu einem Euklidischen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$: Ein Diffeomorphismus $\Phi$, für den $\mathrm{D}\,\Phi\big|_x$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ eine Isometrie bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist, ist selbst eine affine Euklidische Transformation, also eine Drehspiegelung mit einer Verschiebung. Dagegen gibt es nach Satz 1.2.9 viel mehr Diffeomorphismen, für welche $\mathrm{D}\,\Phi\big|_x$ die symplektische Form $\omega_0$ erhält.

## 1.3 Algebraische Aspekte der Hamiltonschen Mechanik

Im Hinblick auf die Quantentheorie, welche in erster Linie eine algebraische Theorie ist, wollen wir hier eine Formulierung der klassischen Mechanik bereitstellen, welche ebenso algebraische Eigenschaften in den Vordergrund stellt. Zudem sollen die wichtigen Begriffe „Observable“ und „Zustand“ auch für die klassische Mechanik detailliert vorgestellt werden.

### 1.3.1 Observable und Zustände

Die *reinen Zustände* eines klassischen mechanischen Systems entsprechen Punkten im zugehörigen Phasenraum, da durch Angabe aller Orts- und Impulskoordinaten eines Teilchens/Systems sein Zustand bereits eindeutig charakterisiert wird.

Die *Observablen* des Systems sind physikalisch zumindest prinzipiell realisierbare Meßvorschriften, welche in einem reinen Zustand einen eindeutigen Erwartungswert besitzen. Dabei können bestimmte Eigenschaften eines physikalischen Systems offenbar durch verschiedene Meßvorschriften erfaßt werden, man kann beispielsweise den Abstand zweier Teilchen auf verschiedene Weise messen. Daher wollen wir die zugehörige „Observable“ als die Äquivalenzklasse der entsprechenden Meßvorschriften auffassen. Dies liefert zwar noch keine im mathematischen Sinne axiomatische Definition einer Observablen, stellt aber vom physikalischen Standpunkt aus eine gute Arbeitsdefinition dar. Insbesondere ist diese Sichtweise für klassische wie quantenmechanische Systeme gleichermaßen gültig.

Da die Zustände in der klassischen Mechanik eindeutig durch die Orts- und Impulskoordinaten der betrachteten Teilchen bestimmt sind, sind Observablen *Funktionen* der Orts- und Impulskoordinaten und damit Funktionen auf dem Phasenraum. Die *möglichen Meßwerte* sind dann der Wertevorrat der Funktion. Hier gibt es verschiedene Optionen für die Funktionenklasse, beispielsweise

*i.)* Polynomiale Funktionen $\mathrm{Pol}(\mathbb{R}^{2n})$,
*ii.)* Analytische Funktionen $C^\omega(\mathbb{R}^{2n})$,
*iii.)* Glatte Funktionen $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, eventuell mit kompaktem Träger $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$,
*iv.)* Stetige Funktionen $C(\mathbb{R}^{2n})$, eventuell mit kompaktem Träger $C_0(\mathbb{R}^{2n})$,
*v.)* Integrierbare Funktionen wie beispielsweise $L^p(\mathbb{R}^{2n})$ oder $L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$,

und viele mehr. Neben den Regularitätsforderungen lassen sich auch Bedingungen an das Wachstumsverhalten im Unendlichen stellen.

Welche Klasse angemessen ist, hängt typischerweise vom konkreten Problem ab. Zum einen sollte die Klasse nicht zu klein sein, um bestimmte wichtige Observablen, wie beispielsweise die Hamilton-Funktion selbst und wichtige Erhaltungsgrößen, zu enthalten, zum anderen sollte sie nicht zu groß sein, um noch physikalisch realisierbaren Meßvorschriften zu entsprechen. Für unsere Zwecke wird daher die Wahl meistens auf die glatten Funktionen fallen, eventuell mit Bedingungen an den Träger oder das Wachstumsverhalten im Unendlichen. Wichtig ist auch der Wertebereich:

*i.)* Reellwertige Funktionen,
*ii.)* Komplexwertige Funktionen,
*iii.)* Vektorwertige Funktionen mit Werten in einem (reellen oder komplexen) Vektorraum.

Vektorwertige Funktionen wie beispielsweise der Drehimpuls $\vec{L}$ können sicher auf die ersten beiden Fälle zurückgeführt werden, indem man entsprechende Komponenten der Vektoren betrachtet. Die komplexwertigen Funktionen scheinen zunächst auch ein Spezialfall davon zu sein, bieten aber in Hinblick auf die Quantenmechanik eine entscheidende zusätzliche Struktur, die komplexe Konjugation. Daher werden wir als Observablen komplexwertige Funktionen verwenden. Im eigentlichen Sinne *observabel* sind aber nur die reellwertigen Funktionen

$$f = \overline{f}. \tag{1.25}$$

Diese Überlegungen führen zu folgender Definition:

**Definition 1.3.1 (Klassische Observablenalgebra).** *Die Observablenalgebra eines klassischen mechanischen Systems ist die* $^*$*-Algebra* $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ *der komplexwertigen glatten Funktionen auf dem Phasenraum. Observable sind Elemente* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ *mit* $f = \overline{f}$.

Dazu ist noch folgende Definition einer $^*$-Algebra über $\mathbb{C}$ nachzutragen:

**Definition 1.3.2 ($^*$-Algebra).** *Eine $^*$-Algebra über $\mathbb{C}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit einem $\mathbb{C}$-bilinearen assoziativen Produkt $(a, b) \mapsto ab$ und einer $^*$-Involution $a \mapsto a^*$, also einem $\mathbb{C}$-antilinearen, involutiven Antiautomorphismus. Ausgeschrieben bedeutet dies*

$$(za + wb)^* = \overline{z}a^* + \overline{w}b^*, \quad (a^*)^* = a \quad \textit{und} \quad (ab)^* = b^*a^* \tag{1.26}$$

*für $a, b \in \mathcal{A}$ und $z, w \in \mathbb{C}$.*

*Bemerkung 1.3.3.* Es ist klar, daß $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ auf kanonische Weise eine $^*$-Algebra in diesem Sinne ist: Das assoziative Produkt von $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ist einfach das punktweise Produkt von Funktionen und damit insbesondere auch *kommutativ*. Die $^*$-Involution ist die punktweise komplexe Konjugation.

Die *Erwartungswerte* einer Observablen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ in einem reinen Zustand $x \in \mathbb{R}^{2n}$ sind dann einfach durch die Auswertung

$$\mathrm{E}_x(f) = f(x) \tag{1.27}$$

bei $x$ gegeben. Die *Varianz* ist definitionsgemäß

$$\mathrm{Var}_x(f) = \mathrm{E}_x(f^2) - \mathrm{E}_x(f)^2 = \mathrm{E}_x((f - \mathrm{E}_x(f))^2), \tag{1.28}$$

womit in einem reinen Zustand insbesondere für alle $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

$$\mathrm{Var}_x(f) = 0 \tag{1.29}$$

gilt. In der klassischen Mechanik erhält man in einem reinen Zustand also immer „scharfe Meßwerte“ für *alle* Observablen, ganz im Gegensatz zur Quantenmechanik.

Um statistische Mechanik betreiben zu können, benötigt man auch *gemischte Zustände*, welche durch Dichtefunktionen $\varrho$ auf $\mathbb{R}^{2n}$ beschrieben werden. Dieses Konzept läßt sich folgendermaßen algebraisch verallgemeinern und vereinfachen:

**Definition 1.3.4 (Positive Funktionale und Zustände).** *Sei $\mathcal{A}$ eine $^*$-Algebra über $\mathbb{C}$. Ein lineares Funktional $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt positiv, falls*

$$\omega(a^*a) \geq 0 \tag{1.30}$$

*für alle $a \in \mathcal{A}$. Besitzt $\mathcal{A}$ ein Einselement $\mathbb{1}$, so heißt $\omega$ ein Zustand, falls zudem*

$$\omega(\mathbb{1}) = 1. \tag{1.31}$$

*Die Zahl*

$$\mathrm{E}_\omega(a) = \omega(a) \tag{1.32}$$

*heißt Erwartungswert von $a$ im Zustand $\omega$.*

*Bemerkung 1.3.5.* Die Erwartungswertfunktionale $\mathrm{E}_x(f) = f(x) = \delta_x(f)$ von $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ sind offenbar positiv und normiert, also Zustände im Sinne der Definition 1.3.4. Ist $\varrho \geq 0$ eine stetige Funktion, so ist auch

$$\mathrm{E}_\varrho(f) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)\varrho(x)\mathrm{d}^{2n}x \tag{1.33}$$

ein positives Funktional, sofern man durch Bedingungen an das Wachstum im Unendlichen sicherstellt, daß das Integral konvergiert.

Umgekehrt gilt folgender nicht-trivialer Satz:

**Satz 1.3.6 (Rieszscher Darstellungssatz).** *Jedes positive Funktional* $\omega : C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist von der Form*

$$\omega(f) = \int f \mathrm{d}\mu \tag{1.34}$$

*mit einem positiven Borel-Maß* $\mu$ *mit kompaktem Träger.*

Einen detaillierten Beweis findet man beispielsweise in [279, Thm. 2.14] und die Formulierung für glatte Funktionen findet man in [57, App. B].

*Bemerkung 1.3.7 (Reine und gemischte Zustände von* $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$*).*

*i.)* Je nach Anwendung haben die Maße *keinen* kompakten Träger, beispielsweise für den thermischen Zustand mit Temperatur $T$

$$\varrho(x) = \frac{1}{Z}\mathrm{e}^{-\beta H(x)} \tag{1.35}$$

aus der statistischen Mechanik, wobei $\beta = \frac{1}{kT}$ die inverse Temperatur, $k$ die Boltzmann-Konstante und $Z$ die kanonische Zustandssumme ist. In diesem Fall ist das zugehörige Funktional nur auf einer geeigneten $^*$-Unteralgebra von $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ definiert, etwa auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

*ii.)* Die Varianz ist genauso definiert wie in (1.28). Jetzt gilt aber $\mathrm{Var}_\omega(f) = 0$ für alle $f$ genau dann, wenn $\omega = \delta_x$ ein *reiner* Zustand war. Im allgemeinen gilt $\mathrm{Var}_\omega(f) \geq 0$.

*iii.)* Von allen positiven Funktionalen von $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, also allen positiven Borel-Maßen mit kompaktem Träger, sind typischerweise keineswegs alle physikalisch auch relevant: Physikalisch realisierbare Zustände besitzen gewisse Regularitätseigenschaften, welche über die eines Borel-Maßes hinausgehen, aber mathematisch recht schwer zu fassen sind und vom physikalischen Kontext abhängen. Aus diesem Grunde sollte man die Definition 1.3.4 eines Zustandes als eine gewisse Idealisierung betrachten, welche die Situation erheblich vereinfacht.

Diesen algebraischen Zugang zum Zustandsbegriff in der klassischen Mechanik werden wir an verschiedenen Stellen wieder aufgreifen und auch auf die Quantenmechanik übertragen, siehe insbesondere Abschnitt 7.1.

### 1.3.2 Die Poisson-Klammer und die Zeitentwicklung

Die kanonische Poisson-Klammer auf $\mathbb{R}^{2n}$ erweist sich als die zentrale algebraische Struktur, mit deren Hilfe die gesamte Hamiltonsche Mechanik formuliert werden kann.

**Definition 1.3.8 (Kanonische Poisson-Klammer).** *Für $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ist die kanonische Poisson-Klammer durch*

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial q^k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right) \tag{1.36}$$

*definiert.*

**Proposition 1.3.9.** *Für die kanonische Poisson-Klammer gilt*

*i.)* $\{f, g\} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ *für* $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.
*ii.)* $\{\cdot, \cdot\}$ *ist* $\mathbb{C}$*-bilinear.*
*iii.)* $\{f, g\} = -\{g, f\}$ *(Antisymmetrie).*
*iv.)* $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$ *(Leibniz-Regel).*
*v.)* $\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}$ *(Jacobi-Identität).*
*vi.)* $\overline{\{f, g\}} = \{\overline{f}, \overline{g}\}$ *(Realität).*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch einfaches Nachrechnen. □

Diese Eigenschaften der kanonischen Poisson-Klammer werden uns im weiteren noch oft begegnen, womit die folgende Definition gut motiviert sein sollte:

**Definition 1.3.10 (Poisson-Algebra).** *Eine assoziative, kommutative Algebra $\mathcal{A}$ über $\mathbb{C}$ mit einer $\mathbb{C}$-bilinearen und antisymmetrischen Klammer $\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, welche die Leibniz-Regel und die Jacobi-Identität erfüllt, heißt Poisson-Algebra. Ist $\mathcal{A}$ zudem eine $^*$-Algebra und erfüllt die Poisson-Klammer die Realitätsbedingung, so heißt $\mathcal{A}$ Poisson-$^*$-Algebra.*

Die Relevanz der kanonischen Poisson-Klammer liegt in ihrer Bedeutung für die Zeitentwicklung: Ist $\Phi_t$ der Hamiltonsche Fluß zu einer Hamilton-Funktion $H$, so definiert man für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ die *Hamiltonsche Zeitentwicklung* $f(t)$ durch

$$f(t) = f \circ \Phi_t = \Phi_t^* f. \tag{1.37}$$

Die Abbildung $\Phi_t^* : C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ heißt auch *pull-back* mit dem Fluß $\Phi_t$.

**Satz 1.3.11 (Hamiltonsche Zeitentwicklung).** *Sei $\Phi_t$ der Hamiltonsche Fluß zu $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.*

*i.)* $\Phi_t^*$ *ist ein* $^*$*-Automorphismus von* $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, *d.h.*

$$\Phi_t^*(zf + wg) = z\Phi_t^* f + w\Phi_t^* g, \tag{1.38}$$

$$\Phi_t^*(fg) = (\Phi_t^* f)(\Phi_t^* g), \tag{1.39}$$

$$\Phi_t^* \overline{f} = \overline{\Phi_t^* f}. \tag{1.40}$$

*ii.)* $\Phi_t^*$ *ist eine Poisson-Abbildung, d.h.*

$$\Phi_t^*\{f,g\} = \{\Phi_t^* f, \Phi_t^* g\}. \tag{1.41}$$

*iii.) Es gelten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t^* f = \{\Phi_t^* f, H\}. \tag{1.42}$$

*iv.) Es gilt die Energieerhaltung*

$$\Phi_t^* H = H. \tag{1.43}$$

*v.) Eine Observable* $f$ *ist genau dann Erhaltungsgröße* $\Phi_t^* f = f$*, wenn* $\{f, H\} = 0$.

*vi.) Sind* $f$ *und* $g$ *Erhaltungsgrößen, so ist auch* $\{f, g\}$ *eine Erhaltungsgröße.*

*Beweis.* Der erste Teil ist trivial. Für den zweiten Teil rechnet man zunächst die Identität

$$\{f,g\} = \langle \nabla f, \Omega_0 \nabla g\rangle$$

für die Poisson-Klammer nach. Mit der Kettenregel findet man dann

$$\nabla(\Phi_t^* f) = (\mathrm{D}\,\Phi_t)^{\mathrm{T}} \circ (\nabla f)\big|_{\Phi_t},$$

womit aus (1.16) die Gleichung (1.41) leicht folgt. Für den dritten Teil verwendet man zunächst (1.8) sowie (1.15), womit unter Verwendung des zweiten Teiles

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t^* f = \Phi_t^*\{f, H\} = \{\Phi_t^* f, \Phi_t^* H\}$$

folgt. Damit folgt zunächst (1.43), da trivialerweise $\{H, H\} = 0$. Dies liefert dann auch (1.42). Der fünfte Teil ist mit den bereits erzielten Resultaten klar und der letzte folgt aus der Jacobi-Identität der Poisson-Klammer. □

*Bemerkung 1.3.12.* Als Fazit erhält man also folgende Struktur: Ein klassisches mechanisches System wird durch seine Observablenalgebra $\mathcal{A}$, eine Poisson-$^*$-Algebra, charakterisiert. Die Zustände sind die positiven Funktionale auf $\mathcal{A}$, und die Zeitentwicklung ist eine Einparametergruppe von Poisson-$^*$-Automorphismen von $\mathcal{A}$ mit infinitesimalem Erzeuger $H \in \mathcal{A}$.

## 1.4 Warum „Geometrische Mechanik“

Die Geometrie von Phasenräumen ist in physikalisch interessanten Fällen komplizierter als $\mathbb{R}^{2n}$, weshalb eine geometrisch formulierte Mechanik erforderlich wird. Die vorangegangene Diskussion legt nahe, daß dies möglich ist. Folgende Beispiele und Situationen seien hier genannt:

**A Systeme mit Zwangsbedingungen**
Insbesondere Zwangsbedingungen $Z_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ an die Konfigurationen, also holonome und skleronome Zwangsbedingungen der Form

$$Z_\alpha(x^1, \ldots, x^n) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 1, \ldots, k \leq n \tag{1.44}$$

spielen in der klassischen Mechanik eine wichtige Rolle. Solche Zwangsbedingungen definieren eine Untermannigfaltigkeit $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ von zulässigen Konfigurationen. Die erlaubten Geschwindigkeiten sind dann notwendigerweise *tangential* an $Q$. Allein um beschreiben zu können, was unter „tangential" zu verstehen ist, benötigt man bereits differentialgeometrische Konzepte. Gesucht ist dann die Hamiltonsche Mechanik für eine solche Situation.

**B Systeme mit Symmetrien**
Das Ausnutzen von Erhaltungsgrößen beziehungsweise Festlegen derselben auf numerische Werte verringert effektiv die Zahl der Freiheitsgrade. Auch wenn man mit dem geometrisch trivialen Phasenraum $\mathbb{R}^{2n}$ startet, liefert diese „Phasenraumreduktion" im allgemeinen niedrigdimensionalere Phasenräume mit komplizierterer Geometrie. Eine genaue Formulierung im Rahmen der symplektischen Geometrie werden wir in Abschnitt 3.3 finden.

**C Systeme mit Eichfreiheitsgraden**
Typischerweise treten solche Systeme erst für unendlich viele Freiheitsgrade, also Feldtheorien, auf. Dann ist aber jede physikalisch relevante fundamentale Feldtheorie von dieser Form: die allgemeine Relativitätstheorie, die Elektrodynamik, das Standardmodell der Teilchenphysik, etc.
Die „echten" physikalischen Freiheitsgrade sind diejenigen „modulo Eichtransformationen". Die resultierenden Quotientenräume haben dann im allgemeinen eine komplizierte Geometrie.
Feldtheorien haben natürlich noch andere Schwierigkeiten, die von der unendlichen Zahl der Freiheitsgrade kommen, insbesondere funktionalanalytische Probleme vielfältiger Natur. Trotzdem sind endlichdimensionale Modelle, also klassische mechanische Systeme, gute „Spielzeugmodelle", bei denen man zumindest diejenigen Schwierigkeiten und Effekte studieren kann, die ihre Ursache in der komplizierten Geometrie haben. Bemerkenswerterweise sind die mathematischen Techniken zur Beschreibung dieser Situation in weiten Bereichen die selben wie bei der Phasenraumreduktion, wohingegen die physikalische Interpretation eine völlig andere ist.

## 1.5 Aufgaben

**Aufgabe 1.1 (Hamiltonsche Flüsse).** Betrachten Sie folgende drei (eindimensionale) Hamiltonsche Systeme:

- Das freie Teilchen mit Hamilton-Funktion $H(q, p) = \frac{p^2}{2m}$.

- Der freie Fall mit Hamilton-Funktion $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + mgq$.
- Der harmonische Oszillator mit Hamilton-Funktion $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$.

*i.)* Berechnen und zeichnen Sie die jeweiligen Hamiltonschen Vektorfelder.
*ii.)* Berechnen Sie explizit die jeweiligen Flußabbildungen und zeichnen Sie exemplarisch Flußlinien in das Phasenraumdiagramm von Teil *i.)*.
*iii.)* Sind die Flüsse vollständig? Wenn ja, weisen Sie die Eigenschaft einer Einparametergruppe explizit nach.
*iv.)* Geben Sie mit einer kurzen Begründung ein Beispiel für ein Hamiltonsches System, dessen Fluß unvollständig ist.

**Aufgabe 1.2 (Lie-Algebren).** In dieser Aufgabe sei an die elementaren Eigenschaften einer Lie-Algebra erinnert: Sei $\mathfrak{g}$ ein Vektorraum über $\Bbbk$, wobei $\Bbbk$ für uns meistens $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sein wird, im allgemeinen aber ein beliebiger Körper der Charakteristik ungleich 2 sein darf. Dann heißt $\mathfrak{g}$ Lie-Algebra, wenn $\mathfrak{g}$ mit einer bilinearen Abbildung, der *Lie-Klammer*, $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ versehen ist, welche antisymmetrisch ist, $[\xi,\eta] = -[\eta,\xi]$, und die Jacobi-Identität

$$[\xi,[\eta,\chi]] = [[\xi,\eta],\chi] + [\eta,[\xi,\chi]] \tag{1.45}$$

für alle $\xi,\eta,\chi \in \mathfrak{g}$ erfüllt. Sind $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ Lie-Algebren, heißt eine lineare Abbildung $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *Lie-Algebrahomomorphismus*, oder auch kurz Morphismus von Lie-Algebren, falls $\phi$ Klammern auf Klammern abbildet, also $\phi([\xi,\eta]) = [\phi(\xi),\phi(\eta)]$ für alle $\xi,\eta \in \mathfrak{g}$. Ein Untervektorraum $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ heißt *Lie-Unteralgebra*, wenn $\mathfrak{h}$ unter Klammern abgeschlossen ist, also $[\xi,\eta] \in \mathfrak{h}$ für alle $\xi,\eta \in \mathfrak{h}$. Ein Untervektorraum $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ heißt *Lie-Ideal*, falls $[\xi,\eta] \in \mathfrak{h}$ für alle $\xi \in \mathfrak{h}$ und $\eta \in \mathfrak{g}$.

*i.)* Zeigen Sie, daß die Verkettung von Lie-Algebrahomomorphismen wieder ein Lie-Algebrahomomorphismus ist. Zeigen Sie weiter, daß die Nullabbildung immer ein Morphismus von Lie-Algebren ist.
*ii.)* Zeigen Sie, daß ein Lie-Ideal immer eine Lie-Unteralgebra ist.
*iii.)* Zeigen Sie, daß der Kern eines Lie-Algebrahomomorphismus ein Lie-Ideal und das Bild eine Lie-Unteralgebra ist.
*iv.)* Sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ein Lie-Ideal. Zeigen Sie, daß der Quotientenvektorraum $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ auf kanonische Weise eine Lie-Algebra wird, so daß die Projektion $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ein Morphismus von Lie-Algebren ist.

**Aufgabe 1.3 (Poisson-Klammern im Kepler-System).** Betrachten Sie das 3-dimensionale Kepler-System mit Hamilton-Funktion

$$H(\vec{q},\vec{p}) = \frac{\|\vec{p}\|^2}{2m} - \frac{\alpha}{q}, \tag{1.46}$$

wobei $q = \|\vec{q}\|$ der Betrag von $\vec{q}$ und $\alpha > 0$ die Kopplungskonstante ist. Der Konfigurationsraum ist entsprechend $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, und der Phasenraum ist $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$.

Weiter sei

$$\vec{L}(\vec{q}, \vec{p}) = \vec{q} \times \vec{p} \tag{1.47}$$

der Drehimpuls und

$$\vec{M}(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{\vec{q}}{q} + \frac{1}{\alpha m} \vec{L} \times \vec{p} \tag{1.48}$$

der Lenz-Runge-Vektor, beide aufgefaßt als vektorwertige Funktionen auf dem Phasenraum mit Komponenten $L_i$ und $M_i$, $i = 1, 2, 3$.

Berechnen Sie folgende Poisson-Klammern

$$\{L_i, H\}, \quad \{M_i, H\}, \quad \{L_i, L_j\}, \quad \{M_i, L_j\}, \quad \{M_i, M_j\}, \tag{1.49}$$

und zeigen Sie so, daß $\vec{L}$ und $\vec{M}$ Erhaltungsgrößen des Kepler-Systems sind. Zeigen Sie weiter, daß die $L_i$ bezüglich der Poisson-Klammern eine Lie-Unteralgebra bilden. Bilden auch die $M_i$ eine Lie-Unteralgebra?

**Aufgabe 1.4 (Symplektische Vektorräume und das lineare Darboux-Theorem).** Sei $V$ ein reeller $m$-dimensionaler Vektorraum und $\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine antisymmetrische Bilinearform. Dann heißt $(V, \omega)$ *symplektischer Vektorraum* mit *symplektischer Form* $\omega$, falls die Bilinearform $\omega$ nichtausgeartet ist. Sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann ist das $\omega$*-orthogonale Komplement* $W^{\perp}$ von $W$ als

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in W\} \tag{1.50}$$

definiert. Eine lineare Abbildung zwischen zwei symplektischen Vektorräumen $\phi : (V, \omega) \longrightarrow (V', \omega')$ heißt *symplektisch*, wenn $\omega'(\phi(v), \phi(w)) = \omega(v, w)$ für alle $v, w \in V$. Gilt zudem, daß $\phi$ ein Isomorphismus ist, so heißt $\phi$ Symplektomorphismus.

*i.)* Zeigen Sie, daß ein symplektischer Vektorraum notwendigerweise gerade Dimension $m = 2n$ hat.

*ii.)* Zeigen Sie, daß $\omega$ genau dann symplektisch ist, wenn $\flat : V \longrightarrow V^*$ mit $v^{\flat} = \omega(v, \cdot)$ ein Isomorphismus ist.

*iii.)* Zeigen Sie, daß $W^{\perp}$ ein Untervektorraum ist. Zeigen Sie weiter, daß $W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$, falls $U \subseteq W$, und daß $W \subseteq W^{\perp\perp}$. Gilt auch $W = W^{\perp\perp}$? Bestimmen Sie dazu $\dim W^{\perp}$ in Abhängigkeit von $\dim W$.
**Vorsicht:** Es gilt im allgemeinen nicht, daß $W + W^{\perp} = V$. Vielmehr kann $W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$ sein.

*iv.)* Zeigen Sie induktiv, daß es eine Basis $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ von $V$ gibt, so daß $\omega(e_i, e_j) = 0$, $\omega(f_i, f_j) = 0$ und $\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ gilt.

*v.)* Zeigen Sie, daß $(V, \omega)$ zu $\mathbb{R}^{2n}$, versehen mit der Standardsymplektik $\omega_0$, symplektomorph ist, es also einen Symplektomorphismus von $(V, \omega)$ nach $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ gibt.

**Aufgabe 1.5 (Die symplektische Gruppe und ihre Lie-Algebra).** Betrachten Sie $\mathbb{R}^{2n}$ mit der Standardsymplektik $\omega_0$. Sei weiterhin $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ die symplektische Gruppe und $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$ die symplektische Lie-Algebra.

*i.)* Zeigen Sie, daß $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ eine topologisch abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ ist und daß $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R})$ ist.
**Hinweis:** Formulieren Sie die Frage zunächst mit Hilfe der Matrix $\Omega_0$.

*ii.)* Zeigen Sie: Ist $t \mapsto A(t) \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ eine glatte Kurve mit Werten in $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ und $A(0) = \mathbb{1}$, so gilt $\dot{A}(0) \in \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$. Ist umgekehrt $X \in \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$, so gilt $\mathrm{e}^{tX} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

*iii.)* Zeigen Sie, daß $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ sogar eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ ist.
**Hinweis:** Zeigen Sie zunächst, daß

$$\Omega_0(v_1, \ldots, v_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \operatorname{sign}(\sigma) \omega_0(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}) \cdots \omega_0(v_{\sigma(2n-1)}, v_{\sigma(2n)}) \tag{1.51}$$

ein von Null verschiedenes Vielfaches der Determinantenfunktion det ist.

*iv.)* Zeigen Sie, daß $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R}) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

**Aufgabe 1.6 (Das Tensorprodukt).** Seien $V$, $W$ nicht notwendigerweise endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper $\mathbb{k}$. Zeigen Sie folgenden Satz:

***Satz.*** *Es gibt einen Vektorraum $V \otimes W$ zusammen mit einer $\mathbb{k}$-bilinearen Abbildung $\otimes : V \times W \longrightarrow V \otimes W$ derart, daß es für jede andere $\mathbb{k}$-bilineare Abbildung $\phi : V \times W \longrightarrow U$ in einen weiteren $\mathbb{k}$-Vektorraum $U$ eine eindeutig bestimmte $\mathbb{k}$-lineare Abbildung $\Phi : V \otimes W \longrightarrow U$ gibt, so daß*

$$\begin{tikzcd} & V \times W \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ V \otimes W \arrow[rr, "\Phi"'] & & U \end{tikzcd} \tag{1.52}$$

*kommutiert.*

**Anleitung:**

*i.)* Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{M} = \mathbb{k}[V \times W]$, also die lineare Hülle von Basisvektoren $e_{v,w}$, welche durch Paare $(v, w) \in V \times W$ indiziert werden (dieser Vektorraum ist wirklich sehr groß). Sei $\iota : V \times W \longrightarrow \mathcal{M}$ die (keineswegs lineare!) Abbildung $(v, w) \mapsto e_{v,w}$. Zeigen Sie dann, daß durch die Festlegung $\widetilde{\Phi} : \mathcal{M} \ni e_{v,w} \mapsto \phi(v, w) \in U$ eine wohldefinierte lineare Abbildung gegeben ist, welche eindeutig durch die Eigenschaft $\widetilde{\Phi} \circ \iota = \phi$ bestimmt ist.

*ii.)* Definieren Sie weiter einen Untervektorraum $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$, welcher durch Vektoren der Form $\alpha e_{v,w} - e_{\alpha v,w}$, $\alpha e_{v,w} - e_{v,\alpha w}$, $e_{v+v',w} - e_{v,w} - e_{v',w}$ und $e_{v,w+w'} - e_{v,w} - e_{v,w'}$ aufgespannt wird, wobei $\alpha \in \mathbb{k}$ und $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ beliebig sind (auch $\mathcal{M}_0$ ist wirklich sehr groß). Zeigen Sie dann, daß $\widetilde{\Phi}(\mathcal{M}_0) = 0$. Damit ist $\widetilde{\Phi}$ auch auf dem Quotientenraum $\mathcal{M}/\mathcal{M}_0$ wohldefiniert und liefert eine lineare Abbildung

$$\Phi : \mathcal{M}/\mathcal{M}_0 \ni [X] \mapsto \widetilde{\Phi}(X) \in U. \tag{1.53}$$

*iii.)* Bezeichnet $\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/\mathcal{M}_0$ die kanonische Projektion, so ist $\pi \circ \iota$ bilinear.
*iv.)* Zeigen Sie, daß $V \otimes W = \mathcal{M}/\mathcal{M}_0$ und $\otimes = \pi \circ \iota$ den Anforderungen des Satzes genügen.

Jedes solche Paar $(V \otimes W, \otimes)$ heißt (ein) *Tensorprodukt* von $V$ und $W$.

*v.)* Zeigen Sie: Ist $(V \mathbin{\widetilde{\otimes}} W, \widetilde{\otimes})$ ein weiteres Tensorprodukt, so gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $I : V \otimes W \longrightarrow V \widetilde{\otimes} W$ mit der Eigenschaft, daß

$$\begin{tikzcd} & V \times W \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr, "\widetilde{\otimes}"] & \\ V \otimes W \arrow[rr, "I"'] & & V \widetilde{\otimes} W \end{tikzcd} \tag{1.54}$$

kommutiert. Daher ist das Tensorprodukt von $V$ und $W$ *eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus* bestimmt, und man spricht von *dem* Tensorprodukt $V \otimes W$.

Betrachten Sie nun zwei *endlichdimensionale* Vektorräume $V, W$. Mit $\operatorname{Bil}(V^* \times W^*, \mathbb{k})$ seien die Bilinearformen auf $V^* \times W^*$ mit Werten in $\mathbb{k}$ bezeichnet.

*vi.)* Zeigen Sie, daß $\operatorname{Bil}(V^* \times W^*, \mathbb{k})$ zusammen mit der Abbildung $\otimes : V \times W \longrightarrow \operatorname{Bil}(V^* \times W^*, \mathbb{k})$ *ein* und damit *das* Tensorprodukt $(V \otimes W, \otimes)$ ist, wobei die Bilinearform $v \otimes w$ auf $V^* \times W^*$ durch

$$(v \otimes w)(\alpha, \beta) = \alpha(v)\beta(w), \qquad \alpha \in V^*, \beta \in W^* \tag{1.55}$$

definiert ist. Benutzen Sie zum Beweis Basen von $V$ und $W$ sowie die zugehörigen dualen Basen von $V^*$ und $W^*$. Damit erweist sich die obige Definition des Tensorprodukts als eine Verallgemeinerung des Tensorprodukts von endlichdimensionalen Vektorräumen.

**Bemerkung:** Die obige Konstruktion des Tensorprodukt läßt sich auf offensichtliche Weise auch für mehrere „Faktoren“ $V_1, \ldots, V_k$ verallgemeinern und liefert ein Tensorprodukt $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$. Dann erfüllt das Tensorprodukt die üblichen Assoziativitätseigenschaften, wie man diese vom endlichdimensionalen Tensorprodukt her kennt. Wir werden allerdings auch unendlichdimensionale Vektorräume und deren Tensorprodukte benötigen, deshalb ist die etwas allgemeinere Konstruktion hier vorgestellt worden. Nachlesen kann man das Ganze beispielsweise in [219, Kapitel XVI] oder [127, Abschnitt 6.3].

**Aufgabe 1.7 (Tensorprodukte und Abbildungen).** Seien $V$, $V'$, $V''$, $W$, $W'$ und $W''$ Vektorräume und seien lineare Abbildungen $\phi : V \longrightarrow V'$ und $\psi : W \longrightarrow W'$ sowie $\phi' : V' \longrightarrow V''$ und $\psi' : W' \longrightarrow W''$ vorgegeben.

*i.)* Zeigen Sie, daß es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\phi \otimes \psi : V \otimes W \longrightarrow V' \otimes W'$ gibt, welche

$$(\phi \otimes \psi)(v \otimes w) = \phi(v) \otimes \psi(w) \tag{1.56}$$

erfüllt. Zeigen Sie

$$(\phi' \otimes \psi') \circ (\phi \otimes \psi) = (\phi' \circ \phi) \otimes (\psi' \circ \psi) \quad \text{sowie} \quad \mathsf{id}_V \otimes \mathsf{id}_W = \mathsf{id}_{V \otimes W}\,. \tag{1.57}$$

*ii.)* Für $\alpha \in (V')^*$ definiert man den *pull-back* $\phi^*\alpha \in V^*$ durch

$$(\phi^*\alpha)(v) = \alpha(\phi(v)). \tag{1.58}$$

Der pull-back $\phi^* : (V')^* \otimes \cdots \otimes (V')^* \longrightarrow V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ ist als $\phi^* \otimes \cdots \otimes \phi^*$ im Sinne von Teil *i.)* definiert. Zeigen Sie:

$$(\phi' \circ \phi)^* = \phi^* \circ (\phi')^* \quad \text{und} \quad (\mathsf{id}_V)^* = \mathsf{id}_{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}\,. \tag{1.59}$$

**Aufgabe 1.8 (Algebren und Derivationen).** Sei $\mathcal{A}$ eine assoziative Algebra über $\mathbb{k}$, also ein $\mathbb{k}$-Vektorraum mit einer $\mathbb{k}$-bilinearen assoziativen Verknüpfung $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, der *Algebra-Multiplikation.*

*i.)* Zeigen Sie, daß die Multiplikation mit einer *linearen* Abbildung $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ identifiziert werden kann und daß $\mathcal{A}$ genau dann assoziativ ist, wenn

$$\mu \circ (\mu \otimes \mathsf{id}) = \mu \circ (\mathsf{id} \otimes \mu) \tag{1.60}$$

gilt. Sei mit $\tau : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ die kanonische *Flip*-Abbildung bezeichnet, also $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$. Wie können Sie die Kommutativität von $\mu$ formulieren?

*ii.)* Sei $D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ eine *Derivation*, also eine lineare Abbildung mit $D(ab) = D(a)b + aD(b)$. Sei weiter $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein *Algebrahomomorphismus*, also eine lineare Abbildung mit $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$. Formulieren Sie diese Bedingungen auf äquivalente Weise mit Hilfe von $\mu$.

*iii.)* Zeigen Sie, daß der Kommutator

$$[a, b] = ab - ba = \mathrm{ad}(a)b \tag{1.61}$$

die Algebra zu einer Lie-Algebra macht. Zeigen Sie weiter, daß jede Linearkombination und der Kommutator zweier Derivationen wieder eine Derivation ist und folgern Sie, daß die Derivationen $\mathsf{Der}(\mathcal{A})$ von $\mathcal{A}$ eine Lie-Algebra bilden.

*iv.)* Eine Derivation $D$ heißt *innere Derivation*, wenn $D = \mathrm{ad}(a)$ für ein $a \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, daß die inneren Derivationen $\mathsf{InnDer}(\mathcal{A})$ von $\mathcal{A}$ einen Untervektorraum von $\mathsf{Der}(\mathcal{A})$ bilden, so daß für eine beliebige Derivation $D'$ und eine innere Derivation $D = \mathrm{ad}(a)$ immer $[D', \mathrm{ad}(a)] \in \mathsf{InnDer}(\mathcal{A})$ gilt. Zeigen Sie so, daß der Quotient $\mathsf{OutDer}(\mathcal{A}) = \mathsf{Der}(\mathcal{A}) \big/ \mathsf{InnDer}(\mathcal{A})$ der *äußeren Derivationen* in kanonischer Weise (wie?) zu einer Lie-Algebra wird.

**Aufgabe 1.9 (Isotrope, Lagrangesche und koisotrope Unterräume).** Sei $(V, \omega)$ ein symplektischer Vektorraum der Dimension $2n$. Ein Teilraum $W \subseteq V$ heißt

- *isotrop*, falls $W \subseteq W^{\perp}$,
- *Lagrangesch*, falls $W = W^{\perp}$,
- *koisotrop*, falls $W^{\perp} \subseteq W$,
- *symplektisch*, falls $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

Der sportliche Ehrgeiz bei dieser Aufgabe besteht darin, einen unabhängigen Beweis für das lineare Darboux-Theorem zu finden und dabei auch noch etwas Neues zu lernen. Die Aufgabe 1.4, Teil *iv.)* soll also *nicht* verwendet werden. Die Idee ist im wesentlichen aus [234, Sect. 1.2].

*i.)* Zeigen Sie, daß $W$ genau dann isotrop ist, wenn $W^{\perp}$ koisotrop ist. Zeigen Sie, daß $W$ genau dann symplektisch ist, falls $\omega$ eingeschränkt auf $W$ symplektisch ist.

*ii.)* Zeigen Sie, daß jeder symplektische Vektorraum einen Lagrangeschen Teilraum besitzt, indem Sie mit einem isotropen Teilraum starten und diesen maximal vergrößern, so daß er noch isotrop ist. Folgern Sie so, daß jeder isotrope Unterraum in einem (nicht notwendigerweise eindeutigen) Lagrangeschen Unterraum enthalten ist.

*iii.)* Seien $W_1, \ldots, W_r$ Lagrangesche Teilräume von $V$. Zeigen Sie, daß es dann einen weiteren Lagrangeschen Teilraum $W_0$ gibt, welcher $W_0 \cap W_j = \{0\}$ für alle $j = 1, \ldots, r$ erfüllt.
**Hinweis:** Sei $W_0$ ein isotroper Teilraum, welcher $W_0 \cap W_j = \{0\}$ erfüllt. Solch einen Teilraum gibt es immer (warum?). Zeigen Sie: ist $W_0$ maximal mit dieser Eigenschaft (also in keinem isotropen Unterraum enthalten, der alle $W_j$ transversal schneidet), so ist $W_0$ Lagrangesch.

*iv.)* Seien nun $W_1$ und $W_2$ zwei transversale Lagrangesche Unterräume von $V$, deren Existenz nach *ii.)* und *iii.)* garantiert ist. Es gilt also insbesondere $W_1 \oplus W_2 = V$ (warum?). Zeigen Sie, daß die Einschränkung von $\omega$ auf $W_1 \times W_2$ nichtausgeartet ist und daher einen Isomorphismus $W_1^* \cong W_2$ induziert. Zeigen Sie, daß eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ von $W_1$ und die zugehörige duale Basis von $W_1^*$ mit diesem Isomorphismus eine Basis $f_1, \ldots, f_n$ von $W_2$ liefert, so daß $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ eine Darboux-Basis von $(V, \omega)$ ist.

*v.)* Zeigen Sie damit: Für zwei symplektische Vektorräume $(V, \omega)$ und $(V', \omega')$ der selben Dimension mit jeweils zwei transversalen Lagrangeschen Unterräumen $W_i \subset V$ und $W_i' \subseteq V'$, $i = 1, 2$, gibt es einen linearen Symplektomorphismus $\phi : V \longrightarrow V'$, so daß $\phi(W_i) = W_i'$, $i = 1, 2$.

*vi.)* Zeigen Sie, daß es für einen $k$-dimensionalen isotropen Unterraum $W$ eine Darboux-Basis $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ gibt, so daß $W = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$.

*vii.)* Sei nun $W$ koisotrop. Zeigen Sie, daß es einen Lagrangeschen Unterraum $L \subseteq W$ gibt. Wählen Sie einen Lagrangeschen Unterraum $L'$ transversal zu $L$ und sei $U = W \cap L'$. Wählen Sie nun auf geeignete Weise eine Basis von $U$, $L'$ und $L$, um eine Darboux-Basis zu erhalten, so daß $W = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_{n-k}\}$, wobei $k = \operatorname{codim}(W)$.