

Ott
Deusch

Schnittstelle Mathematik

Vorbereitungskurs

Berufliches Gymnasium
Berufskolleg
Berufsoberschule
Gymnasium

Realschule
Werkrealschule
Berufsfachschule
Gemeinschaftsschule



Merkur 
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Ronald Deusch

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

* * * * *

2. Auflage 2018

© 2010 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung:

MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de

lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-0033-8

2 Rechnen mit Termen

2.1 Algebraische Begriffe

Beachten Sie:

Ein **Term** ist ein mathematischer Ausdruck.

Terme sind Zahlen

$$2; 3^2; \sqrt{12}; 4,5; \dots$$

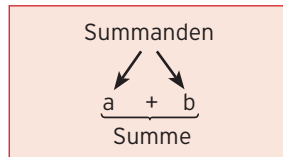
oder Variablen

$$a; b; x^3; \sqrt{x}; \dots$$

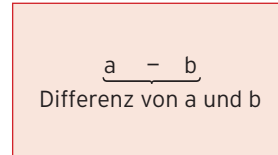
oder sinnvolle Kombinationen von

Variablen, Zahlen und Rechenzeichen. $5 \cdot \frac{6}{7} + 8; 4x + 5y; \dots$

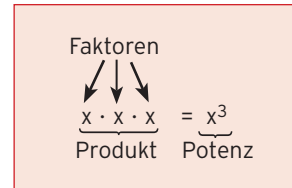
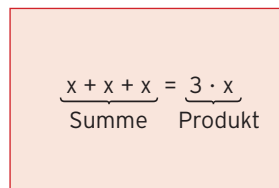
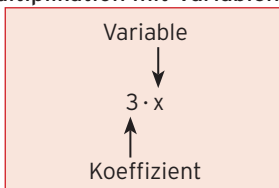
Addition



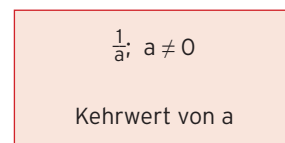
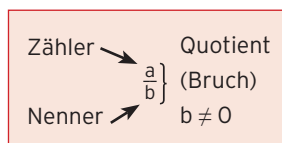
Subtraktion



Multiplikation mit Variablen:



Division



Beachten Sie:

Die **Quadratwurzel** aus einer nichtnegativen Zahl a ist die Zahl größer oder gleich null, die mit sich selbst multipliziert a ergibt.

Für $a \geq 0$ gilt $\sqrt{a} \geq 0$ und $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$.

Aufgaben

1 Berechnen Sie die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten aus den beiden Zahlen.

a) 14; 22

b) 3,5; 2,5

c) $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$

2 Zerlegen Sie in ein Produkt.

a) 3^4

b) $4\pi + 4$

c) $2x + 5x + 4,5x$

3 Kürzen Sie den Bruch soweit wie möglich.

a) $\frac{156}{9}$

b) $\frac{24}{176}$

c) $\frac{102}{60}$

4 Bilden Sie den Kehrwert.

a) 5

b) 2,3

c) $\frac{3}{7}$

d) $5\frac{1}{2}$

e) $\frac{a}{3}$

5 Vereinfachen Sie.

a) $\frac{13}{\frac{7}{3}}$

b) $\frac{2}{\frac{5}{9}}$

c) $(4 + \frac{3}{7}) \cdot \frac{7}{6}$

d) $\frac{5}{17} \cdot 2 + \frac{5}{17} \cdot 8$

6 Vereinfachen Sie.

a) $(\sqrt{3})^2$

b) $\sqrt{50} + \sqrt{2}$

c) $(\sqrt{a})^3$

d) $\frac{1}{2}(\sqrt{2})^3$

7 Berechnen Sie ohne Hilfsmittel.

a) $1,02 \cdot 15$

b) 12 % von 550

c) $\frac{4}{5}$ von 30

d) $9,018 : 9$

e) $\frac{3}{4}$ von - 200

f) $\frac{12}{5}$ von 40

g) $(\frac{9}{11})^2$

h) $\frac{1}{2}$ von $\frac{3}{4}$

i) $2,6 \cdot (-1,2)$

8 Ergänzen Sie die folgende Tabelle

x	y	$x + 2y$	$x - 2y$	$1,2(x - y)$	$(x + y)^2$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	$\frac{1}{2} \cdot x^2$	$x \cdot y$	$-1 - y^2$
3	5								
- 2	- 6								
- 4	3								
0	- 12								
	- 5	0							
		6	- 2						
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$								
5	$\frac{1}{5}$								
- 0,2	1,4								
0,6	- 3								
a	2a								
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{3}$								

2.2 Rechnen mit Summen und Differenzen

- 1) Gleichartige Glieder lassen sich zusammenfassen.

$$2x + 5y - 4x - 15y - 23x + 2,5y = 2x - 4x - 23x + 5y - 15y + 2,5y = -25x - 7,5y$$

- 2) Rechenzeichen und Vorzeichen vor der Klammer beachten.

$$-(4a - 2b) - (b - a) + 5a = -4a + 2b - b + a + 5a = 2a + b$$

- 3) Jedes Glied der Summe wird mit dem Faktor multipliziert.

Gliedweise ausmultiplizieren.

$$6(x - 2y) - 8(3 - 4x - 2y) + 1 = 6x - 12y - 24 + 32x + 16y + 1 = 38x + 4y - 23$$

- 4) Faktoren dürfen vertauscht werden.

$$\frac{2}{3}xy \cdot (-3x) = \frac{2}{3} \cdot (-3) \cdot x \cdot x \cdot y = -2x^2y$$

- 5) Klammern werden von innen nach außen aufgelöst.

$$a - \frac{1}{2}[5a - (b - 8a)] = a - \frac{1}{2}[5a - b + 8a] = a - \frac{1}{2}(13a - b) = a - \frac{13}{2}a + \frac{1}{2}b = -\frac{11}{2}a + \frac{1}{2}b$$

- 6) Multiplikation von Summen.

$$(a - 3)(a + 8) = a^2 - 3a + 8a - 3 \cdot 8 = a^2 + 5a - 24$$

Beachten Sie:

Ausmultiplizieren von Summen heißt, jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multiplizieren.

Unterscheiden Sie:

$$(x - 4)(x - 2) = x^2 - 6x + 8$$

$$x - 4 \cdot (x - 2) = x - 4x + 8 = -3x + 8$$

Punktrechnung vor Strichrechnung

Aufgaben

- 1 Vereinfachen Sie.

a) $18a - 3x + 6a - 3(x + a) - 5(a - 2x)$

b) $15ax + 3ax - 7a \cdot (-2x)$

c) $2 \cdot 4a \cdot 3b + 5a \cdot 2b - 18ab$

d) $-3(x^2 - x) + (x^2 - 2x + 3) \cdot (-2)$

e) $6,5x^2 - [5x - x(3 - 4x) + 2] \cdot (-0,5)$

f) $x - 5x(x^2 - 3x) \cdot (-4) - 5x^2$

g) $1,2 \cdot (x + x \cdot 1,2) + 1,2^2 \cdot x$

h) $-\frac{a^2}{2} - (\frac{3}{2}a)^2 + \frac{1}{4}(2 - 2a^2)$

i) $\frac{1}{5}x - 3 \cdot [x - x(1 - 4a) + ax]$

j) $\frac{3}{2} \cdot [5 \cdot (x - 2 \cdot (x - 4)) + 2]$

- 2 Multiplizieren Sie aus.

a) $(x - 5)(x - 2)$

b) $\frac{2}{3}(x - 2)(x + 3)$

c) $\frac{1}{2}(x - 5)(x + 5)$

d) $\frac{3}{2}(x + 4)(x + 4)$

e) $(4 - 2x) \cdot (-2x + 4)$

f) $\frac{x-5}{2} \cdot (4x + 8)$

3.4 Quadratische Gleichungen

3.4.1 Lösung mit Formel

Beachten Sie:

Eine **quadratische Gleichung** in x kann auf die Form $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$, gebracht werden. Die Lösungsvariable x tritt in der 2. Potenz auf.

Beispiel 1

➡ Lösen Sie die Gleichung.

a) $6x^2 - 3x - 2 = 0$

b) $-0,5x^2 + 5x - 12,5 = 0$

c) $3x^2 - 2x = -5$.

Lösung

Beachten Sie:

Lösungsformel für $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$): $x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$D = b^2 - 4ac$ heißt Diskriminante.

a) Mit $a = 6$, $b = -3$ und $c = -2$:

$$x_{1|2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{12}$$

Diskriminante $D = 57$

Wegen $D > 0$ gibt es **zwei Lösungen** $x_{1|2} = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{12}$.

b) Mit (-2) multiplizieren:

$$-0,5x^2 + 5x - 12,5 = 0$$

Nullform:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

Mit $a = 1$, $b = -10$ und $c = 25$:

$$x_{1|2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = 5$$

Diskriminante $D = 0$

Wegen $D = 0$ gibt es **eine (doppelte) Lösung** $x_{1|2} = 5$.

c) Quadratische Gleichung in Nullform:

$$3x^2 - 2x + 5 = 0$$

Mit $a = 3$, $b = -2$ und $c = 5$:

$$x_{1|2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{-56}}{6}$$

Diskriminante $D = -56$

Wegen $D < 0$ hat die Gleichung **keine Lösung**.

Die Wurzel aus einer negativen Zahl kann in $\mathbb{R}$ nicht gezogen werden.

Beispiel 2

☞ Lösen Sie die Gleichung.

a) $x^2 - 3x - 2 = 0$

b) $-0,5x^2 + 3x - 4,5 = 0$

Lösung

Lösungsformel für $x^2 + px + q = 0$: $x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ mit $D = \frac{p^2}{4} - q$

a) Mit $p = -3$ und $q = -2$: $x_{1|2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{(-3)^2}{4} - (-2)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$

Diskriminante $D = \frac{17}{4}$

Wegen $D > 0$ gibt es zwei Lösungen $x_{1|2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$.

b) Mit (-2) multiplizieren: $-0,5x^2 + 3x - 4,5 = 0$

Geeignete Nullform: $x^2 - 6x + 9 = 0$

Mit $p = -6$ und $q = 9$: $x_{1|2} = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3 \pm \sqrt{0} = 3$

Diskriminante $D = 0$

Wegen $D = 0$ gibt es eine (doppelte) Lösung $x_{1|2} = 3$.

Die Anzahl der Lösungen hängt von der Diskriminante (D) ab.

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D > 0$$

zwei Lösungen

$$D = 0$$

eine (doppelte) Lösung

$$D = \frac{p^2}{4} - q$$

$$D < 0$$

keine Lösung

Aufgaben

1 Lösen Sie die quadratische Gleichung mit der abc-Formel.

a) $4x^2 + 8x - 48 = 0$

b) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}$

c) $3 + \frac{1}{3}x^2 = 2x$

d) $x^2 + x + 7 = -3x + 2$

e) $-2x^2 - 3x = 2,5$

f) $(x - 3)^2 - 9 = 0$

g) $3x^2 + 5x - 8 = 0$

h) $\frac{1}{2}(x^2 - 4x - 5) = 0$

i) $-x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{5}{4}$

j) $0 = 1,5x(x + 2) - 3$

k) $(2x + 5)^2 = 4$

l) $x(2x + 1) - 5 = 0$

m) $x^2 - 4x + 2 = 5$

n) $\frac{1}{2}(x^2 - 2) = 0$

o) $-6x^2 + 2x - 2 = 0$

2 Lösen Sie die quadratische Gleichung mit der pq-Formel.

a) $x^2 + 2x - 24 = 0$

b) $\frac{1}{2}x^2 + 4x = 4$

c) $1 - x + \frac{1}{3}x^2 = 0$

d) $x^2 - x = 2$

e) $x(x - 5) + 1 = 0$

f) $(x + 3)^2 - 2 = 0$

3.4.2 Lösung ohne Formel

1) $ax^2 + c = 0$

Beispiel

➡ Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $0,5x^2 - 5 = 0$.

Lösung

Quadratische Gleichung:

$$0,5x^2 - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 10$$

Wurzelziehen ergibt:

$$x_1 = \sqrt{10}; x_2 = -\sqrt{10}$$

Die Gleichung hat zwei Lösungen:

$$x_{1|2} = \pm \sqrt{10}$$

2) $ax^2 + bx = 0$

Beispiel

➡ Lösen Sie durch Ausklammern: $x^2 + 3x = 0$

Lösung

Gleichung:

$$x^2 + 3x = 0$$

x ausklammern:

$$x(x + 3) = 0$$

Satz vom Nullprodukt anwenden:

$$x = 0 \text{ oder } x + 3 = 0$$

Die Gleichung hat zwei Lösungen:

$$x_1 = 0; x_2 = -3$$

Beachten Sie:

Satz vom Nullprodukt: Ein **Produkt ist null**, wenn **mindestens ein Faktor null** ist:

$$u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee v = 0 \text{ („}\vee\text{“ bedeutet „oder“)}$$

3) $a(x - u)(x - v) = 0$

Beispiel 1

➡ Lösen Sie die Gleichung. a) $4(2x - 6)(5 - x) = 0$ b) $x^2 + 6x + 9 = 0$

Lösung

a) **Hinweis:** $4 \neq 0$ ist ein konstanter Faktor.

Nullprodukt:

$$(2x - 6)(5 - x) = 0.$$

Satz vom Nullprodukt anwenden:

$$2x - 6 = 0 \vee 5 - x = 0$$

Die Gleichung hat zwei Lösungen:

$$x_1 = 3; x_2 = 5$$

b) Der Term kann mit Hilfe einer binomischen Formel faktorisiert werden.

Quadratische Gleichung:

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

Binom:

$$(x + 3)^2 = 0$$

Faktorform:

$$(x + 3)(x + 3) = 0$$

Die Gleichung hat eine (doppelte) Lösung: $x_{1|2} = -3$.

Beispiel 2

☞ Lösen Sie die Gleichung a) $x^2 + 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x - 5 = 0$

Lösung

Für die Lösungen von $x^2 + px + q = 0$ gilt: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$

Damit kann der Term $x^2 + px + q$ faktorisiert werden: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = 0$

a) Aus $x_1 + x_2 = -6$ und $x_1 \cdot x_2 = 8$ ergibt sich $x_1 = -4$ und $x_2 = -2$

Gleichung in Faktorform: $(x + 4)(x + 2) = 0$

b) Aus $x_1 + x_2 = -4$ und $x_1 \cdot x_2 = -5$ ergibt sich $x_1 = -5$ und $x_2 = 1$

Gleichung in Faktorform: $(x + 5)(x - 1) = 0$

Aufgaben

1 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen.

a) $x^2 + 3x = 0$

b) $4x^2 - x = 0$

c) $\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}x^2$

d) $\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}x^2 = 0$

e) $\frac{14}{15}(x^2 - 7x) = 0$

f) $\frac{x^2}{7} + \frac{x}{7} = 0$

g) $-\frac{1}{8}x^2 + tx = 0$

h) $x^2 - tx = 0$

i) $tx - \frac{x^2}{t} = 0; t \neq 0$

j) $3x(x - 4) = 0$

k) $(5x + 2)x = 0$

l) $ax - 2x^2 = 0$

m) $-\frac{1}{8}(x^2 - 8x) = 0$

n) $4x^2 = (t - 1)x$

o) $\frac{x - 5x^2}{12} = 0$

p) $5 - (x^2 + 4x + 5) = 0$

q) $(2x + 1)x = 3$

r) $5(\frac{5}{4}x - \frac{1}{2}x^2) = 0$

s) $0,5k^2 - 2k = -3$

t) $\frac{u^2 + u}{2} = 4$

u) $x^2 + 9x + 20 = 0$

2 Lösen Sie möglichst ohne Formel.

a) $(x + 4)(x - 5) = 0$

b) $(2x + 7)(4x - 1) = 0$

c) $(x + t)(x - 2t) = 0$

d) $x^2 + 8x + 16 = 0$

e) $x^2 = 14x - 49$

f) $3a(2x - x^2) = 0; a \neq 0$

g) $x(x - 12) = -36$

h) $3(1 - x)^2 - 3 = 9$

i) $k^2 + k - 12 = 0$

j) $n^2 - 16n + 60 = 0$

k) $(x - 1)^2 - 2x = 0$

l) $1 = a + a^2$

3 Lösen Sie die quadratische Gleichung nach x auf.

a) $2 - x^2 = 0$

b) $\frac{4}{5}(x^2 - 5) = 0$

c) $\frac{5}{4} - \frac{1}{2}x^2 = x^2$

d) $3x^2 + 6 = 15$

e) $\frac{1}{2}x^2 = 9$

f) $\frac{4}{5}x^2 = 2x^2$

g) $6x^2 = 0$

h) $3x^2 + 4 = -x^2 + 1$

i) $7(x - 1)^2 = -14x$

j) $x^2 - 2t^2 = 0$

k) $x^2 = \frac{a^2}{2}$

l) $ax = x(x + a)$

4 Für welche Werte von a ($a \in \mathbb{R}$) hat die Gleichung $ax^2 + 1 = 0$ keine Lösung?

Was man wissen sollte...**zum Lösen quadratischer Gleichungen**

Die quadratische Gleichung wird in Nullform umgeformt (wenn nötig).

Lösung mit Formel:

$$ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$$

Lösung mit der abc-Formel

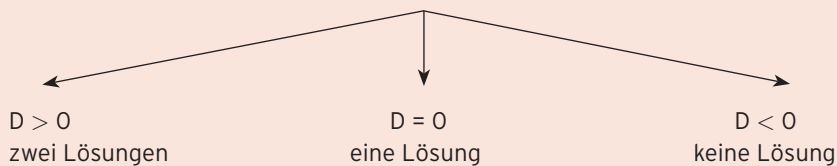
$$x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{mit } D = b^2 - 4ac$$

$$x^2 + px + q = 0$$

Lösung mit der pq-Formel

$$x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{mit } D = \frac{p^2}{4} - q$$

Die Anzahl der Lösungen hängt von der Diskriminante D ab.

**Lösung ohne Formel:**

$$ax^2 + c = 0; a \neq 0$$

Umformung zu $x^2 = -\frac{c}{a}$

Lösung durch **Wurzelziehen**.

$$ax^2 + bx = 0; a \neq 0$$

Lösung durch **Ausklammern**

$$x \cdot (ax + b) = 0$$

Satz vom Nullprodukt anwenden.

Zerlegung in Linearfaktoren

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

(Faktorisieren)

mithilfe der **Binomischen Formeln**:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

$$(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$$

oder

mithilfe des **Satzes von Vieta**:

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

Seite 28

- 1 a) $-3; 0$
d) $-0,4; 0$
g) $0; 8t$
j) $0; 4$
m) $0; 8$
p) $0; -4$
s) keine Lösung
 - 2 a) $-4; 5$
d) -4
g) 6
j) $10; 6$
 - 3 a) $\pm \sqrt{2}$
d) $\pm \sqrt{3}$
g) 0
j) $\pm t\sqrt{2}$
 - 4 $a \geq 0$
- b) $0; \frac{1}{4}$
e) $0; 7$
h) $0; t$
k) $-0,4; 0$
n) $\frac{t-1}{4}; 0$
q) $-1,5; 1$
t) $-3,37; 2,37$
 - b) $-3,5; \frac{1}{4}$
e) 7
h) $-1; 3$
k) $0,27; 3,73$
 - b) $\pm \sqrt{5}$
e) $\pm \sqrt{18}$
h) keine Lösung
k) $\pm \frac{a}{\sqrt{2}}$
- c) $0; \frac{3}{2}$
f) $-1; 0$
i) $0; t^2$
l) $0; \frac{a}{2}$
o) $0; 0,2$
r) $0; \frac{5}{2}$
u) $-4; -5$
 - c) $-t; 2t$
f) $2; 0$
i) $-4; 3$
l) $-1,62; 0,62$
 - c) $\pm 0,91$
f) 0
i) keine Lösung
l) 0

Seite 30

1	Gleichung	a	b	c
	$3x^2 + 4x - 12 = 0$	3	4	-12
	$x^2 + 2x - 6 = 0$	1	2	-6
	$-\frac{1}{6}x^2 + x = 0$	$-\frac{1}{6}$	1	0
	$\frac{1}{2}(x^2 + 2x - 7) = 0$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{7}{2}$
	$-x^2 + 2 = 0$	-1	0	2
	$x^2 + 2x - 2 = x - 4 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0$	1	1	2
	$-2x^2 - x + 1 = 0$	-2	-1	1

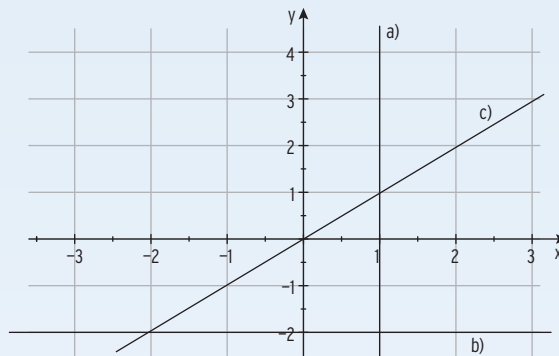
- 2 a) $-1; 11$
d) $0; 4$
g) $2t^2; 0$
- b) $-2; -\frac{2}{3}$
e) $0; 24$
h) $0,5a$
- c) $-5; 0$
f) $0; -2t$
i) $\pm \sqrt{t} + 1$

Seite 30

- 3 a) $0; \frac{8}{5}$ b) $0; 9$ c) $0; -\frac{6}{7}$
d) $0; 16a$ e) $0; \frac{1}{a}$ f) $0; \frac{1}{3}$
g) $0; 3$ h) $\pm 1 + a$ i) $0; -2$
- 4 Für $a = 1$ ist $x = -1$ doppelte Lösung.
- 5 a) $0; 5$ b) $-7; \frac{1}{2}$ c) $-0,73; 2,73$
- 6 a) $D = 4 + 4a = 0$ für $a = -1$.
b) $a(x^2 + x - 1) = 0$; $D = 5 > 0$; Für alle $a \neq 0$ zwei Lösungen, es gibt also kein a .
c) $x = \frac{a-2}{2}$; Für alle $a \neq -2$ gibt es eine Lösung.
- 7 Division beider Seiten durch x ist keine Äquivalenzumformung. $x = 0$ ist auch Lösung.
- 8 a) $x^2 - 1 = 0$ b) $x^2 - 5x = 0$ c) $(x+3)^2 = 0$
d) $x^2 + 1 = 0$
- 9 $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = -0,5$
b) $L = \{1\}$ ist die richtige Lösungsmenge.

Seite 31

- 1 a) bis c)



- d)

- e) Kreis um O
mit Radius 1

