
Vorwort

Die vorliegende Schrift ist eine verbesserte Neuauflage der in den Bonner Mathematischen Schriften, Nr. 26, zuerst erschienenen Arbeit gleichen Titels. Sie hat ihren Ursprung in einer Vortragsreihe, die der Verfasser in den Jahren 1965/66 im Oberseminar von W. KRULL in Bonn gehalten hat. Da es in der Literatur an einer einheitlichen, auf den modernen kohomologischen Methoden beruhenden Abhandlung der Klassenkörpertheorie mangelte, schien eine zusammenfassende Ausarbeitung der Vorträge nützlich zu sein. Dabei kam es vor allem darauf an, dem Leser, der sich mit den Grundlagen der algebraischen Zahlentheorie vertraut gemacht hat, einen raschen und möglichst unmittelbaren Zugang zur Klassenkörpertheorie zu verschaffen.

Die Schrift besteht aus drei Teilen, deren erster die Kohomologie der endlichen Gruppen behandelt. Die Kohomologie hat sich heute weite Bereiche der algebraischen Zahlentheorie erobert. Dennoch wird immer wieder die Frage geäußert, ob nicht die Klassenkörpertheorie von ihr wieder befreit werden könne. Abgesehen von den mit der Kohomologie eng verknüpften algebrentheoretischen Formulierungsmöglichkeiten steht eine solche Theorie bis heute nicht zur Verfügung, wenn auch Erwägungen dieser Art durch die Ergebnisse von J. LUBIN und J. TATE über die explizite Bestimmung des lokalen Normrestsymbols neue Nahrung gefunden haben. Bei allem darf jedoch nicht übersehen werden, dass die Kohomologie – insbesondere für den Lernenden – eine Fülle weitreichender Vorteile bietet. Sie spielt in der Klassenkörpertheorie die Rolle eines Kalküls, der einen klaren, logischen und nach einheitlichen Gesichtspunkten geordneten Aufbau der Theorie ermöglicht. Ihre Bedeutung liegt aber keineswegs allein im Formalen. Vielmehr erlebte die lokale Klassenkörpertheorie, die zunächst über das durch den Frobeniusautomorphismus gegebene Normrestsymbol nur für die unverzweigten Körpererweiterungen entwickelt werden konnte, einen entscheidenden Fortschritt gerade durch die Kohomologie, die auch die verzweigten Erweiterungen der klassenkörpertheoretischen Behandlung zugänglich machte. Diese durch H. HASSE entdeckte Gesetzmäßigkeit, die eine unmittelbare Auswirkung auch auf die globale Theorie hatte, wur-

de zwar zunächst in algebrentheoretischer Formulierung ausgesprochen, doch blieben die dahinter stehenden kohomologischen Prinzipien nicht lange verborgen. Aber über die Klassenkörpertheorie hinaus ist die Kohomologie auch in die allgemeinere Körpertheorie vorgedrungen und hat durch die Galoiskohomologie zu einer Fülle weitreichender Resultate von gänzlich neuartigem Reiz geführt. Auch aus diesem Grund kann es dem Studierenden gelegen sein, die Wirkungsweise des kohomologischen Kalküls in der Algebra an einem so konkreten Beispiel wie der Klassenkörpertheorie kennenzulernen und sich damit gleichzeitig einen Zugang zu weiteren Bereichen der Mathematik zu eröffnen. Auf der anderen Seite ist jedoch nicht zu verkennen, dass mancher an der Klassenkörpertheorie an sich interessierte Studierende gerade von der Kohomologie abgeschreckt wird, die ihm auf den ersten Blick als ein rätselvoller formaler Mechanismus erscheinen mag, der sich einem unmittelbaren Verständnis nur schwerlich erschließt. Aus diesem Grund werden in der vorliegenden Abhandlung nur die für die körpertheoretischen Anwendungen wesentlichen Begriffsbildungen und Sätze der Kohomologietheorie gebracht, und es wird überall eine möglichst elementare Darstellung angestrebt, während die Verwendung allgemeiner Begriffe der homologischen Algebra vermieden wird.

Der zweite Teil behandelt die lokale Klassenkörpertheorie. An den Anfang wurde die ARTIN-TATESche Theorie der Klassenformationen gestellt, die den auf der Grundlage des Satzes von TATE beruhenden rein gruppentheoretischen Formalismus der lokalen und globalen Klassenkörpertheorie herausarbeitet. Aus Gründen der formalen Einfachheit wird hier der Begriff der pro-endlichen Gruppe verwandt. Zum Verständnis alles Weiteren jedoch ist er nicht unbedingt erforderlich, da sich die wesentlichen Sätze doch immer nur auf die endlichen Gruppen beziehen, aus denen sich die pro-endlichen aufbauen. Im §7 sind die neueren Ergebnisse von LUBIN und TATE [34] über die explizite Darstellung des Normrestsymbols aufgenommen worden, die später auch im globalen Teil beim Beweis des ARTINSchen Reziprozitätsgesetzes Anwendung finden.

Der Teil III schließlich behandelt die Klassenkörpertheorie der endlichen algebraischen Zahlkörper. Um eines möglichst gradlinigen Aufbaus willen wurde die Theorie der Funktionenkörper über endlichen Konstantenkörpern nicht eingearbeitet. Um herauszustellen, inwieweit sich die globalen Sätze aus der lokalen Theorie herleiten lassen, sind die Überlegungen rein lokalen Charakters ausdrücklich von jenen getrennt worden, die spezifisch globale Natur besitzen. Für eine durchsichtige Darstellung erwies es sich als sehr zweckmäßig, gewisse Kohomologiegruppen zu identifizieren, die bei der gleichzeitigen Betrachtung verschiedener Körpererweiterungen auftreten. Beim Aufbau der globalen Theorie wird durchweg mit dem CHEVALLEYSchen Idelbegriff gearbeitet, doch wird großer Wert darauf gelegt, die Bedeutung der klassischen KUMMERSchen Theorie herauszupräparieren. Beim Reziprozitätsgesetz wurde ein klarer Beweisaufbau dadurch erzielt, dass die Behandlung der Idelgruppe von der der Idelklassengruppe scharf getrennt wurde. Im letzten Paragraphen

wird die Verbindung zwischen der modernen und der klassischen rein idealtheoretischen Fassung der Klassenkörpertheorie im Sinne des HASSESchen Zahlberichts hergestellt.

Meinem verehrten Lehrer Herrn Professor W. KRULL möchte ich für sein aktives Interesse und seine rege Anteilnahme an der Entstehung dieser Abhandlung recht herzlich danken. Ein besonderes Verdienst hat sich Herr K.-O. STÖHR um die Schrift erworben. Für seine erste Ausarbeitung meiner teilweise nur skizzenhaften Vorträge über die Kohomologie und die lokale Klassenkörpertheorie und für die vielen wesentlichen Verbesserungsvorschläge bin ich ihm zutiefst dankbar.

Bonn, Juli 1969

Jürgen Neukirch