

I Statistik

1 Diagramme

1 Datenerhebung in einer 11. Klasse

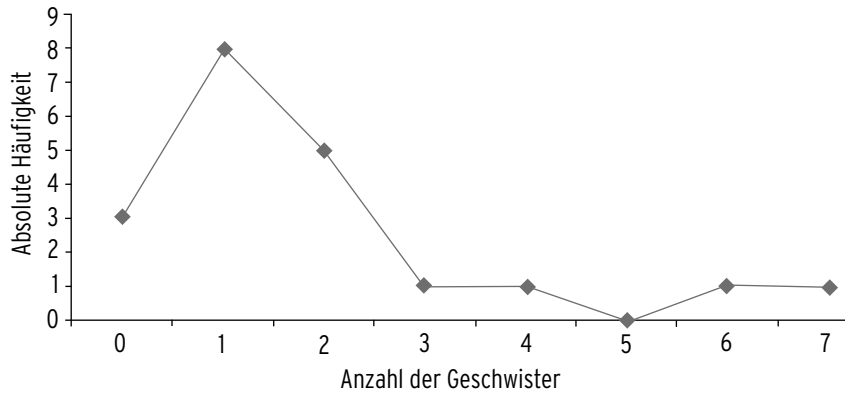


Diagramm 1:

Diagramm 2:

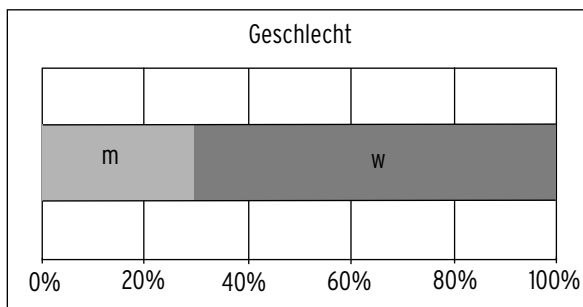


Diagramm 3:

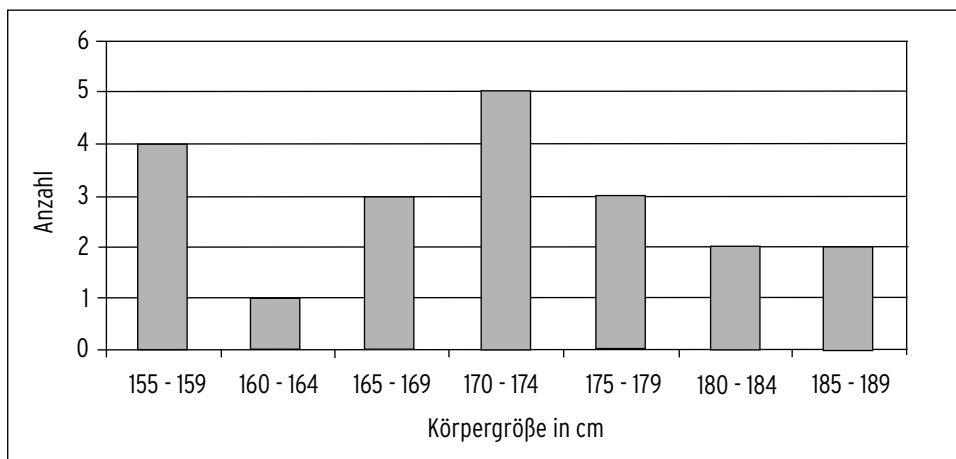
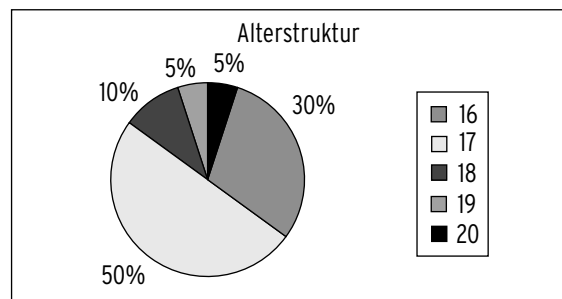


Diagramm 4:

1.1 Wie heißen die dargestellten Diagrammtypen? Tragen Sie die Bezeichnungen ein!

1.2 Was unterscheidet die Diagramme D2 und D3 von den Diagrammen D1 und D4?

1.3 Was unterscheidet das Diagramm D4 von allen anderen?

- 4 Die gegebenen Zufallsexperimente sollen über Ziehungen aus Urnen modelliert werden. Geben Sie die Anzahl der gezogenen Kugeln an. Sollten die Ziehungen mit Zurücklegen oder ohne Zurücklegen stattfinden?

Zufallsexperiment	Anzahl gezogener Kugeln	Mit/ohne Zurücklegen
a) Ein Würfel wird vier Mal geworfen.		☐ mit ☐ ohne
b) Ein Kartenstapel enthält 4 Herz-Karten und 2 Karo-Karten. Ein Spieler zieht drei Karten aus dem Stapel.		☐ mit ☐ ohne
c) Ein Glücksrad mit 3 roten und 2 blauen Feldern wird sieben Mal gedreht.		☐ mit ☐ ohne
d) Ein Bogenschütze trifft 80 % der Schüsse und schießt fünf Mal.		☐ mit ☐ ohne
e) In einer Lostrommel befinden sich 5 Gewinnlose und 25 Nieten. Es werden 4 Lose gezogen.		☐ mit ☐ ohne
f) Es befinden sich 10 Teile in einem Karton, von denen 3 defekt sind. Aus dem Karton werden zwei Teile entnommen.		☐ mit ☐ ohne
g) Es befinden sich immer 10 Teile in einem Karton, von denen 3 defekt sind. Es werden sieben Kartons kontrolliert.		☐ mit ☐ ohne

- 5 Ein Würfel wird ein Mal geworfen und die Augenzahl wird notiert. Die Ereignisse A bis I sind in Worten beschrieben. Ordnen Sie jedem Ereignis die zugehörige Mengenschreibweise zu.

- A: Eine ungerade Zahl _____ = {1, 2, 3, 4}
- B: Eine größere Zahl als 2 _____ = {2, 3, 5}
- C: Höchstens die Zahl 4 _____ = {1, 2}
- D: Mindestens 4 _____ = { }
- E: Eine Primzahl _____ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- F: Höchstens eine 6 _____ = {4, 5, 6}
- G: Kleiner 3 _____ = {3, 4, 5, 6}
- H: Gegenereignis von E _____ = {1, 4, 6}
- I: Die Zahl 8 _____ = {1, 3, 5}

6 Ein Würfel wird ein Mal geworfen und die Augenzahl wird notiert. Die Ereignisse $A = \{1; 2; 4\}$, $B = \{1; 5; 6\}$ und $C = \{2; 3; 6\}$ sind gegeben. Geben Sie die durch die Verknüpfungen hervorgehenden Ereignisse in aufzählender Schreibweise an.

- a) $A \cap B = \{ \quad \quad \quad \}$ b) $A \cup C = \{ \quad \quad \quad \}$
c) $A \cap \overline{A} = \{ \quad \quad \quad \}$ d) $\overline{A} \cap B = \{ \quad \quad \quad \}$

7 Eine Münze wird drei Mal geworfen. Beschreiben Sie die Ereignisse in Worten bzw. in aufzählender Schreibweise.

$A = \{www, zzz\}$	A:
$B = \{ \quad \quad \quad \}$	B: Im dritten Wurf Wappen
$C = \{ \quad \quad \quad \}$	C: Mindestens zwei Mal Zahl
$D = \overline{C}$	$D = \{ \quad \quad \quad \}$
E: genau zwei Mal Zahl	E =
$F = \{wzz, zzz\}$	F:

8 Die Schülerinnen einer beruflichen Schule werden zum privaten Einsatz von internetfähigen Geräten befragt. Das Ereignis A sei „eine zufällig ausgewählte Schülerin besitzt ein Smartphone“, das Ereignis B sei „eine zufällig ausgewählte Schülerin besitzt ein Tablet“. Beschreiben Sie die durch die Verknüpfungen hervorgehenden Ereignisse in Worten. Eine zufällig ausgewählte Schülerin besitzt...

$\overline{A}$:

$A \cap B$:

$A \cup B$:

$\overline{A} \cap B$:

$A \cup \overline{B}$:

9 Drei weiße und 7 rote Bälle liegen in einer Kiste. Ein Besucher entnimmt 3 Bälle nacheinander ohne Zurücklegen aus der Kiste. Beschreiben Sie das folgende Ereignis.

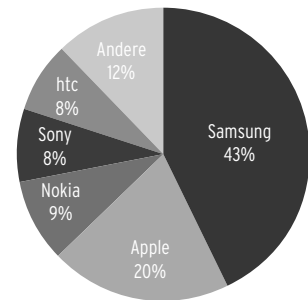
- A: Der zweite Ball ist weiß. A =
B: Mindestens ein Ball ist weiß. B =
C: genau zwei Bälle haben die gleiche Farbe. C =

2 Wahrscheinlichkeit

- 1 Nebenstehend sind die Marktanteile der im Jahr 2014 in Deutschland eingesetzten Smartphones dargestellt.

Ein zufällig ausgewählter Nutzer eines Smartphones wird in diesem Jahr befragt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ...



- a) hat dieser ein Smartphone von htc?
- b) hat dieser ein Smartphone von Sony, Nokia oder htc?
- c) hat dieser kein Smartphone der Marke Samsung?
- d) hat dieser kein Smartphone von Samsung oder Apple?

- 2 Die 98 Schüler der Jahrgangsstufe 1 eines Wirtschaftsgymnasiums werden nach ihrem Alter und nach der gewählten Naturwissenschaft befragt.

	16 Jahre	17 Jahre	18 Jahre	19 Jahre	20 Jahre
Biologie	1	16	14	5	1
Chemie	1	19	14	4	2
Physik	2	6	7	5	1

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit.

$$P =$$

- Ein zufällig ausgewählter Schüler hat Chemie gewählt.
- Ein zufällig ausgewählter Schüler ist 19 Jahre alt.
- Ein zufällig ausgewählter Schüler ist 16 Jahre alt und hat Physik gewählt.
- Ein zufällig ausgewählter Schüler ist nicht 18 Jahre alt.
- Ein Schüler hat Chemie gewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er 20 Jahre alt?
- Ein Schüler ist 17 Jahre alt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er nicht Physik gewählt?

- 3 Eine Fußballmannschaft hat 72 % der letzten 35 Spiele gewonnen. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft das nächste Spiel gewinnt, ungefähr 72 %. Nehmen Sie Stellung.

- 5 Andreas möchte eine 10-tätige Gebirgstour machen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag beträgt dort in dieser Jahreszeit 34 %.

Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Bernoulli-formel.

X: Anzahl _____ ; X ist _____ -verteilt

Wahrscheinlichkeit für 2 Regentage?	$P(X = \underline{\quad})$ $= \underline{\hspace{2cm}}$
Wahrscheinlichkeit für 3 oder 4 Regentage?	$P(X = \underline{\quad}) + P(\underline{\quad})$ $= \underline{\hspace{2cm}}$
Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Regentag?	$1 - P(X = \underline{\quad})$ $= \underline{\hspace{2cm}}$
Wahrscheinlichkeit für höchstens 8 Regentage?	$1 - P(X = \underline{\quad}) - \underline{\quad}$ $= \underline{\hspace{2cm}}$

- 6 Bei einer Tombola führen 10 % der Lose zu einem Gewinn. Jan kauft 12 Lose. Geben Sie jeweils eine Aufgabenstellung an, deren Lösung auf die folgende Weise berechnet wird. Gehen Sie von einer Binomialverteilung aus.

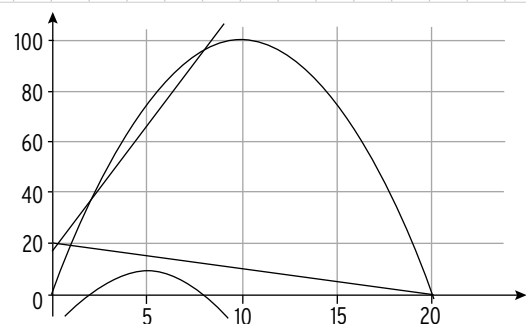
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Jan:

	$P = \binom{12}{3} \cdot 0,10^3 \cdot 0,90^9$
	$P = \binom{12}{2} \cdot 0,10^2 \cdot 0,90^{10} + \binom{12}{3} \cdot 0,10^3 \cdot 0,90^9$
	$P = 1 - \binom{12}{0} \cdot 0,10^0 \cdot 0,90^{12}$
	$P = \binom{12}{0} \cdot 0,10^0 \cdot 0,90^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0,10^1 \cdot 0,90^{11}$

• • • • •

- a) Berechnen Sie den Höchstpreis und die Sättigungsmenge.

- Beschriften Sie die Abbildung.



III Ganzrationale Funktionen

- 9 Die Analyse für ein schmerzlinderndes Präparat ergibt, dass sich die Angebotspreise und die Nachfragesituation auf dem Markt darstellen lassen durch p_A und p_N mit $p_A(x) = 0,1x^2 + 0,4x + 5,4$ und $p_N(x) = 12 - 0,15 \cdot x^2$, x in ME, $p_A(x)$ bzw. $p_N(x)$ in GE pro ME.

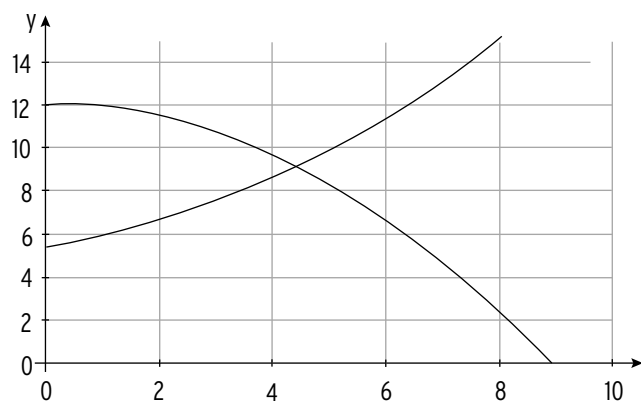
- a) Geben Sie die Sättigungsmenge und den Höchstpreis an.



- b) Berechnen Sie die Gleichgewichtsmenge und das Marktgleichgewicht.



- c) Kennzeichnen Sie die Situation im nebenstehenden Koordinatensystem.



Monotonie und Extrempunkte

1 Bestimmen Sie die Monotoniebereiche von f mithilfe der Abbildung.

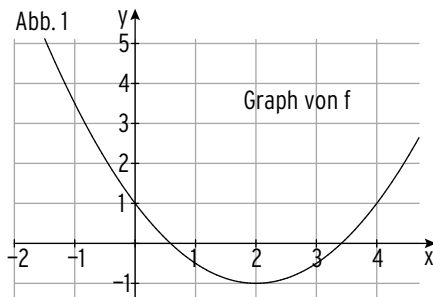


Abb. 1:

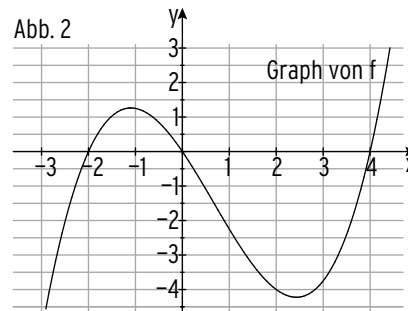


Abb. 2:

2 Zeigen Sie, f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 10$; $x \in \mathbb{R}$, ist monoton wachsend.

Ableitung:

3 Gegeben ist die Funktion f . Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f .

$$f(x) = 2x^2 - 2x^3 + 1;$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 4x - 6x^2; f''(x) = 4 - 12x$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$4x - 6x^2 = 0$$

Ausklammern:

$$x(4 - 6x) = 0$$

Satz vom Nullprodukt:

$$x = 0 \vee 4 - 6x = 0$$

Stellen mit waagrechter Tangente:

$$x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$$

Mit $f''(0) = 4 > 0$ und $f(0) = 1$:

$$T(0 \mid 1)$$

Mit $f''(\frac{2}{3}) = -4 < 0$ und $f(\frac{2}{3}) = \frac{35}{27}$:

$$H\left(\frac{2}{3} \mid \frac{35}{27}\right)$$

$$f(x) = x^3 - 3x - 1;$$
$$x \in \mathbb{R}$$

A blank sheet of graph paper with a grid pattern. The grid consists of small squares formed by thin gray lines. There are 20 columns and 15 rows of squares. A thicker black border runs along the top and left edges of the page.

4 Gegeben ist die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E. Füllen Sie die Tabelle aus.

Kostenfunktion K Erlösfunktion E	$K(x) = x^3 - 4x^2 + 19x + 18$ $E(x) = 30x$	$K(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 41$ $E(x) = -9x^2 + 72x$
Gewinnfunktion		
Variable Stückkostenfunktion		
Stückkostenfunktion		
Gewinnmaximum		
Betriebsminimum; kurzfristige Preisuntergrenze		
Zeigen Sie: Das Betriebsoptimum liegt bei x_{BO}	$x_{BO} = 3$	$x_{BO} \approx 5,25$
Langfristige Preisuntergrenze		

5 Bestimmen Sie die Krümmungsbereiche des Graphen von f mithilfe der Abbildung.

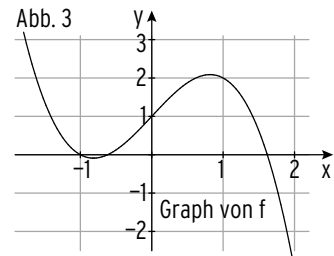
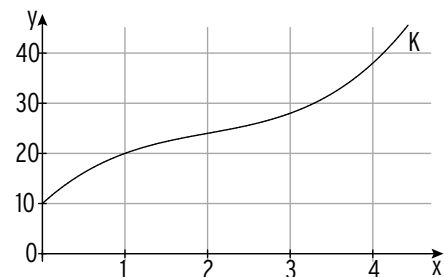


Abb. 3:

Ableitungen:

Ableitungen:



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

VI Finanzmathematik

1 Zins- und Zinseszinsrechnung

1 Ergänzen Sie die Lücken im Text.

Wird ein _____ über mehrere _____ zu einem festen _____ angelegt, so erhält der Anleger für jedes Jahr _____. Werden diese _____ nicht ausgezahlt, sondern weiter _____, so erhält der Anleger in den Folgejahren sogenannte _____. Nach Ablauf der _____ verfügt der Anleger dann über ein _____, das sich durch die folgende Formel berechnen lässt: _____

2 Füllen Sie die Tabelle aus.

Anfangskapital in EUR	Zinssatz p % $q = 1 + \frac{p}{100}$	Laufzeit in Jahren	Kapital nach n Jahren
700	2,5 %	6	$K_6 = 700 \cdot 1,025^6$ $K_6 = 811,79$
	4 %	5	2200
500		8	800
12500	1,5 %	6	
1000	3 %		1344

Rentenendwert

1 Ergänzen Sie die Lücken im Text.

Eine Geldleistung heißt _____, wenn sie

1. zu _____ Zeitpunkten fällig wird

2. in _____ Höhe gezahlt wird.

Wenn die _____ jeweils am Ende eines Zeitraums (z.B. Jahr) fällig sind,

spricht man von einer _____ Rente. Liegt der Fälligkeitszeitpunkt der Rate

dagegen jeweils _____ des Zeitraums, dann spricht man von einer

Rente. Zur Berechnung des **Rentenendwertes** R_n bzw. $\bar{R}_n$

gelten die folgenden Formeln:

Nachschüssig:

Vorschüssig:

$$R_n =$$
$$\bar{R}_n =$$

2 Peter Lustig zahlt 15 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres 24.000,00 € auf ein Sparkonto ein. Wie hoch ist das Guthaben nach 15 Jahren, wenn mit einem Zinssatz von 5% gerechnet wird?

Gesucht: Rentenendwert (Guthaben nach 15 Jahren, nachschüssig)

3 Kurt zahlt jeweils zu Jahresbeginn 10.000€ auf ein Konto, welches 8% Verzinsung bietet. Wie hoch ist der Kontostand nach 10 Jahren?

[illegible]

I Statistik

1 Diagramme

1 Datenerhebung in einer 11. Klasse

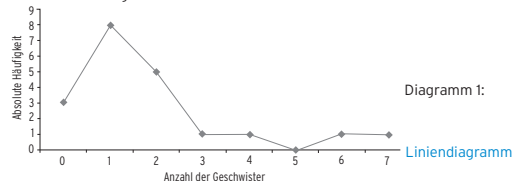


Diagramm 2: Streifendiagramm

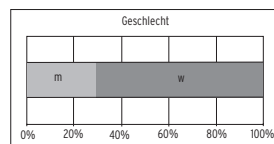


Diagramm 3: Kreisdiagramm

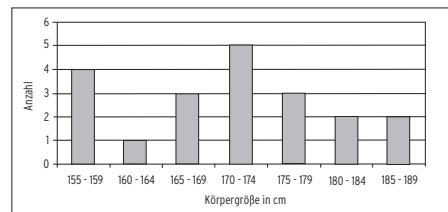
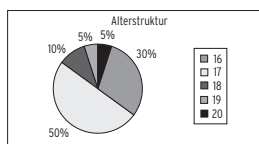


Diagramm 4: Balkendiagramm

- 1.1 Wie heißen die dargestellten Diagrammtypen? Tragen Sie die Bezeichnungen ein!
- 1.2 Was unterscheidet die Diagramme D2 und D3 von den Diagrammen D1 und D4?
Einteilung nach Prozents
- 1.3 Was unterscheidet das Diagramm D4 von allen anderen?
Unterteilung in Klassen

4

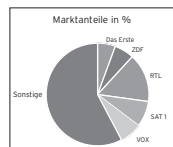
2 Monatlich werden die Marktanteile der Fernsehanstalten ermittelt.

2.1 Dazu werden 3 600 Personen im Alter von 14 bis 49 Jahre befragt. Die Tabelle zeigt die Marktanteile bei den 14 - 49-Jährigen. Berechnen Sie die Anzahl der Stimmen für den jeweiligen Sender. Zeichnen Sie ein Kreisdiagramm, in dem das Ergebnis dargestellt wird.



Sender	Das Erste	ZDF	RTL	SAT 1	VOX	Sonstige
rel. Häufigkeit	5,6 %	6,2 %	15,4 %	8,1 %	7,0 %	57,7 %
abs. Häufigkeit	202	223	554	292	252	2077

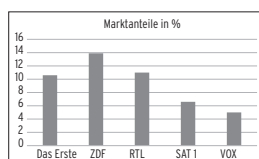
Kreisdiagramm:



2.2 Um die Marktanteile beim Gesamtpublikum (ab 3 Jahre) zu ermitteln, werden 5000 Personen befragt. Die Tabelle zeigt das Ergebnis der Befragung. Erstellen Sie ein Säulendiagramm.

Sender	Das Erste	ZDF	RTL	SAT 1	VOX	Sonstige
abs. Häufigkeit	530	695	550	330	250	2645
rel. Häufigkeit	10,6 %	13,9 %	11,0 %	6,6 %	5,0 %	52,9 %

Säulendiagramm:
(ohne sonstige)



6

2 Beantworten Sie folgende Aufgaben mithilfe der Diagramme auf Seite 4. Notieren Sie auch Rechnungen, wenn diese hierzu erforderlich sind.

a) Wie hoch ist der Anteil der männlichen Schüler in der Klasse?

30 %

b) Wie alt sind die meisten Schüler der Klasse?

17 Jahre

c) Wie viel Schüler und Schülerinnen haben 3 Geschwister?

ein

d) Wie viele Geschwister haben die Schülerinnen und Schüler im Durchschnitt?

$$0 \cdot 3 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 38; \quad \frac{38}{20} = 1,9$$

2 Absolute und relative Häufigkeit

1 In vier verschiedenen Klassen der HöHa wurde das Alter von Schülern und Schülerinnen ermittelt. Man erhielt folgende Daten:

Klasse A	Alter	17	18	19	20
Anzahl		4	16	3	2

Klasse B	Alter	17	18	19	20
Anzahl		4	13	2	1

a) In welcher Klasse ist die relative Häufigkeit der 18-Jährigen größer?

$$\text{Klasse A: } 25 \text{ Schüler/innen} \quad \text{relative Häufigkeit } \frac{16}{25} = 0,64 = 64 \%$$

$$\text{Klasse B: } 20 \text{ Schüler/innen} \quad \text{relative Häufigkeit } \frac{13}{20} = 0,65 = 65 \%$$

Die relative Häufigkeit der 18-Jährigen ist im Klasse B höher.

b) In Klasse C sind $\frac{3}{5}$ der Schüler 18 Jahre alt, in Klasse D wird der Anteil derer mit 0,72 angegeben. Wie viele 18-Jährige sind in diesen beiden Klassen, wenn insgesamt jeweils 25 Schüler die Klasse C und D besuchen?

$$\text{Klasse C: } 25 \text{ Schüler/innen} \quad \frac{3}{5} \text{ von } 25: \frac{3}{5} \cdot 25 = 15$$

$$\text{Klasse D: } 25 \text{ Schüler/innen} \quad 72 \% \text{ von } 25: 0,72 \cdot 25 = 18$$

Klasse C besuchen 15, Klasse D 18 Schüler/innen, die 18 Jahre alt sind.

5

3 In einem Studentenwohnheim wohnen 200 Studenten. 165 von ihnen sprechen Englisch, 73 Deutsch, 49 sprechen beide Sprachen.

3.1 Wie groß ist die relative Häufigkeit der Studenten, die mindestens eine der beiden Sprachen sprechen?

$$\text{Absolute Häufigkeit} = 165 + 73 - 49 = 189$$

$$\text{Relative Häufigkeit} = \frac{\text{Absolute Häufigkeit}}{n} = \frac{189}{200} = 0,945 = 94,5 \%$$



3.2 Wie groß ist die relative Häufigkeit der Studenten, die keine der beiden Sprachen sprechen?

$$\text{Absolute Häufigkeit} = 200 - 189 = 11$$

$$\text{Relative Häufigkeit} = \frac{\text{Absolute Häufigkeit}}{n} = \frac{11}{200} = 0,055 = 5,5 \% (= 100 \% - 94,5 \%)$$

4 50,9% aller Deutschen sind Frauen. Einer Studie zufolge schnarchen 60% aller deutschen Männer. Wie groß ist die relative Häufigkeit der schnarchenden Männer unter allen Deutschen?

$$\text{Anteil der Männer an der deutschen Gesamtbevölkerung: } 49,1 \%$$

$$\text{Anteil der Schnarcher unter den Männern: } 60 \%$$

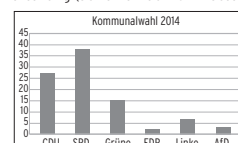
$$\text{Anteil der schnarchenden Männer unter den Deutschen (60% von 49,1%): } 0,6 \cdot 0,49 = 0,2946 = 29,46 \% (= \text{relative Häufigkeit})$$

5 Das Ergebnis der Kommunalwahl 2014 in Dortmund ist anhand der folgenden Tabelle ablesbar. 456 500 Personen waren wahlberechtigt, die Wahlbeteiligung lag bei 45 %.

Partei	Anzahl der Wählerstimmen	100 % = 205425
CDU	55 876	27,2 %
SPD	78 472	38,2 %
Grüne	31 635	15,4 %
FDP	4 930	2,4 %
Linke	13 969	6,8 %
AFD	6 984	3,4 %

5.1 Ermitteln Sie jeweils die prozentuale Verteilung (auf eine Nachkommastelle gerundet). siehe Tabelle

5.2 Stellen Sie die Daten in einem Säulendiagramm dar.



7

V Matrizenrechnung

.....

6 Ein Produktionsprozess kann durch ein Verflechtungsdiagramm, durch eine Verflechtungstabelle oder durch eine Verflechtungsmatrix beschrieben werden.

a) Ergänzen Sie die fehlenden Werte.

Verflechtungsdiagramm	Verflechtungstabelle	Verflechtungsmatrix																												
<pre>graph TD R1[R1] -- 6 --> Z1[Z1] R1 -- 3 --> Z2[Z2] R2[R2] -- 4 --> Z1 R2 -- 2 --> Z2 R2 -- 5 --> Z3[Z3] R3[R3] -- 1 --> Z1 R3 -- 5 --> Z2 Z1 -- 2 --> E1[E1] Z1 -- 3 --> E2[E2] Z2 -- 3 --> E1 Z2 -- 4 --> E2 Z3 -- 1 --> E1 Z3 -- 2 --> E2</pre>	<table><tr><th></th><th>Z₁</th><th>Z₂</th><th>Z₃</th></tr><tr><th>R₁</th><td>6</td><td>3</td><td>0</td></tr><tr><th>R₂</th><td>4</td><td>0</td><td>5</td></tr><tr><th>R₃</th><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr></table> <table><tr><th></th><th>E₁</th><th>E₂</th></tr><tr><th>Z₁</th><td>2</td><td>0</td></tr><tr><th>Z₂</th><td>3</td><td>4</td></tr><tr><th>Z₃</th><td>1</td><td>2</td></tr></table>		Z ₁	Z ₂	Z ₃	R ₁	6	3	0	R ₂	4	0	5	R ₃	2	1	5		E ₁	E ₂	Z ₁	2	0	Z ₂	3	4	Z ₃	1	2	$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
	Z ₁	Z ₂	Z ₃																											
R ₁	6	3	0																											
R ₂	4	0	5																											
R ₃	2	1	5																											
	E ₁	E ₂																												
Z ₁	2	0																												
Z ₂	3	4																												
Z ₃	1	2																												

b) Berechnen Sie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 12 \\ 13 & 10 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$$

c) Interpretieren Sie die Elemente der Matrix C.

Für die Produktion je einer ME E₁ braucht man 21 ME R₁, 13 ME R₂ und 12 ME R₃.

Für die Produktion je einer ME E₂ braucht man 12 ME R₁, 10 ME R₂ und 14 ME R₃.

d) Interpretieren Sie die zweite Spalte der Matrix B.

Für die Produktion je einer ME E₂ braucht man 0 ME Z₁, 4 ME Z₂ und 2 ME Z₃.

e) Interpretieren Sie die erste Zeile der Matrix A.

Für die Produktion einer ME Z₁ braucht man 6 ME R₁ und für eine ME Z₂ 3 ME R₁ und für eine ME Z₃ kein R₁.

76

V Matrizenrechnung

.....

Produktions- und Verbrauchsvektoren

1 Ein Betrieb fertigt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R₁, R₂ und R₃ zunächst die Zwischenprodukte Z₁, Z₂ und Z₃ und daraus die Endprodukte E₁, E₂ und E₃. Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sind gegeben durch

$$A = A_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B = B_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Wie viele Rohstoffe werden benötigt, um 6 ME von Z₁, 6 ME von Z₂ und 10 ME von Z₃ herzustellen?

$$\text{Lösung: } \vec{r} = A_{RZ} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 22 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Es werden 40 ME R₁, 22 ME R₂ und 70 ME R₃ benötigt.

b) Wie viele Zwischenprodukte werden benötigt, um jeweils 10 ME von E₁, E₂ und E₃ herzustellen?

$$\text{Lösung: } \vec{z} = B_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 60 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Es werden 110 ME von Z₁, 60 ME von Z₂ und 90 ME von Z₃ benötigt.

c) Berechnen Sie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C.

$$\text{Lösung: } C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 19 \\ 9 & 6 & 11 \\ 24 & 15 & 32 \end{pmatrix} \quad C = C_{RE}$$

d) Wie viel Rohstoffe braucht man zur Herstellung von 10 ME von E₁, 10 ME von E₂ und 5 ME von E₃?

$$\text{Lösung: } \vec{r} = C_{RE} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 395 \\ 205 \\ 550 \end{pmatrix}$$

Es werden 395 ME R₁, 205 ME R₂ und 550 ME R₃ benötigt.

77

V Matrizenrechnung

.....

2 Ein Betrieb fertigt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R₁, R₂ und R₃ zunächst die Zwischenprodukte Z₁, Z₂ und Z₃ und daraus die Endprodukte E₁, E₂ und E₃. Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sind gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Wie viele Rohstoffe werden benötigt, um 5 ME von Z₁, 8 ME von Z₂ und 8 ME von Z₃ herzustellen?

$$\text{Lösung: } \vec{r} = A_{RZ} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 26 \\ 37 \end{pmatrix}$$

Es werden 58 ME R₁, 26 ME R₂ und 37 ME R₃ benötigt.

b) Wie viele Zwischenprodukte werden benötigt, um 5 ME von E₁, 8 ME von E₂ und 8 ME von E₃ herzustellen?

$$\text{Lösung: } \vec{z} = B_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 37 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Es werden 26 ME von Z₁, 37 ME von Z₂ und 23 ME von Z₃ benötigt.

c) Berechnen Sie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C.

$$\text{Lösung: } C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 & 8 \\ 8 & 5 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \end{pmatrix} = C_{RE}$$

d) Wie viel Rohstoffe braucht man zur Herstellung von 10 ME von E₁, 10 ME von E₂ und 5 ME von E₃?

$$\text{Lösung: } \vec{r} = C_{RE} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 310 \\ 150 \\ 195 \end{pmatrix}$$

Es werden 310 ME R₁, 150 ME R₂ und 195 ME R₃ benötigt.

78

V Matrizenrechnung

.....

3 Ein Betrieb fertigt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R₁, R₂ und R₃ zunächst die Zwischenprodukte Z₁, Z₂ und Z₃ und daraus die Endprodukte E₁, E₂ und E₃. Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sind gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Wie viele ME an Zwischenprodukten können gefertigt werden, wenn 9 ME von R₁, 18 ME von R₂ und 13 ME von R₃ verarbeitet werden?

Lösung: Aus $\vec{r} = A_{RZ} \cdot \vec{z}$ ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für z₁, z₂ und z₃:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 9 \\ 2z_1 + z_2 + z_3 &= 19 \\ z_1 + 2z_3 &= 16 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 19 \\ 1 & 0 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 17 \\ 0 & -2 & 1 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Lösung des linearen Gleichungssystems: z₁ = 5; z₂ = 4; z₃ = 4

Es können 5 ME von Z₁, 4 ME von Z₂ und 4 ME von Z₃ gefertigt werden.

b) Wie viele ME an Endprodukten können gefertigt werden, wenn 31 ME von Z₁, 26 ME von Z₂ und 5 ME von Z₃ verarbeitet werden?

Lösung:

$$\text{Aus } \vec{z} = B_{ZE} \cdot \vec{x} \text{ ergibt sich ein lineares Gleichungssystem: } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 31 \\ 26 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 31 \\ 1 & 2 & 1 & 26 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 31 \\ 0 & 3 & 1 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung des linearen Gleichungssystems: x₂ = 5; x₃ = 6; x₁ = 10

Man kann 10 ME von E₁, 5 ME von E₂ und 6 ME von E₃ herstellen.

c) Berechnen Sie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C.

$$\text{Lösung: } C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Wie viele ME an Endprodukten können gefertigt werden, wenn 42 ME von R₁, 68 ME von R₂ und 30 ME von R₃ verarbeitet werden?

Lösung:

$$\text{Aus } C_{RE} \cdot \vec{x} = \vec{r} \text{ ergibt sich ein lineares Gleichungssystem: } \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 42 \\ 68 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 42 \\ 5 & 5 & 3 & 68 \\ 2 & 3 & 1 & 30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 42 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Lösung des linearen Gleichungssystems: x₂ = 4; x₃ = 6; x₁ = 6

Man kann 6 ME von E₁, 4 ME von E₂ und 6 ME von E₃ herstellen.

79