

Hans J. Schmidt

Die

Mathe Merk Mappe

Klasse

10

Mathe zum
Nachschlagen,
Üben und
Wiederholen

 Verlag an der Ruhr

Impressum

Titel

Die Mathe-Merk-Mappe – Klasse 10

Mathe zum Nachschlagen, Üben und Wiederholen

Autor

Hans J. Schmidt

Umschlagmotiv

Zahlenhintergrund: © Wilm Ihlenfeld – stock.adobe.com

Illustrationen

Streifen Zahlenhintergrund: © Wilm Ihlenfeld – stock.adobe.com; Hand-Icon(s) und Abbildungen im Lösungsteil: © Hans J. Schmidt; ansonsten siehe Copyrighthinweise

Druck

AZ Druck und Datentechnik GmbH, Kempten, DE



Verlag an der Ruhr

Mülheim an der Ruhr

www.verlagruhr.de

Geeignet für die Klasse 10

Urheberrechtlicher Hinweis

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen oder außerhalb dieser Bedingungen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Im Werk vorhandene Kopiervorlagen dürfen vervielfältigt werden, allerdings nur für Schüler*innen der eigenen Klasse/des eigenen Kurses. Die dazu notwendigen Informationen (Buchtitel, Verlag und Autor) haben wir für Sie als Service bereits mit eingedruckt. Diese Angaben dürfen weder verändert noch entfernt werden. Die Weitergabe von Kopiervorlagen oder Kopien (auch von Ihnen veränderte) an Kolleg*innen, Eltern oder Schüler*innen anderer Klassen/Kurse ist nicht gestattet.

Der Verlag untersagt ausdrücklich das Herstellen von digitalen Kopien, das digitale Speichern und Zurverfügungstellen dieser Materialien in Netzwerken (das gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen), per E-Mail, Internet oder sonstigen elektronischen Medien außerhalb der gesetzlichen Grenzen. Kein Verleih. Keine gewerbliche Nutzung.

Bitte beachten Sie zusätzlich die Informationen unter www.schulbuchkopie.de.

Soweit in diesem Produkt Personen fotografisch abgebildet sind und ihnen von der Redaktion fiktive Namen, Berufe, Dialoge u. Ä. zugeordnet oder diese Personen in bestimmte Kontexte gesetzt werden, dienen diese Zuordnungen und Darstellungen ausschließlich der Veranschaulichung und dem besseren Verständnis des Inhalts.

© **Verlag an der Ruhr 2014**, Nachdruck 2021

ISBN 978-3-8346-2518-2

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen	4	Die Oberfläche von Kegeln	47
Kapitel 1 – Quadratische Funktionen	5	Das Volumen und die Oberfläche von Kugeln.....	48
Einführende Beispiele	5	<i>Teste dein Wissen:</i>	
Nullstellen quadratischer Funktionen	7	Volumen und Oberflächen von Körpern.....	49
Die quadratische Funktion $y = x^2$	8	Kapitel 5 – Trigonometrie	50
Die quadratische Funktion $y = ax^2$	9	Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck:	
Die quadratische Funktion $y = x^2 + e$	11	Sinus.....	50
Die quadratische Funktion $y = (x - d)^2$	12	Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck:	
Die quadratische Funktion $y = (x - d)^2 + e$	13	Kosinus.....	51
Scheitelpunktform und Normalform	14	Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck:	
Die quadratische Funktion $y = ax^2 + bx + c$	15	Tangens.....	52
<i>Teste dein Wissen:</i> Quadratische Funktionen....	16	sin-, cos- und tan-Werte mit dem	
Kapitel 2 – Quadratische Gleichungen.....	19	Taschenrechner ermitteln.....	53
Grafische Lösungen quadratischer		Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck.....	55
Gleichungen – Teil 1.....	19	Graphen der Winkelfunktionen.....	58
Grafische Lösungen quadratischer		<i>Teste dein Wissen:</i> Trigonometrie	62
Gleichungen – Teil 2.....	20	Kapitel 6 – Exponentialfunktionen.....	63
Rechnerische Lösungen quadratischer		Exponentialfunktionen zur Basis a	63
Gleichungen – Teil 1.....	22	Lineares und exponentielles Wachstum.....	64
Rechnerische Lösungen quadratischer		Wachstumsrate und Abnahmerate.....	65
Gleichungen – Teil 2.....	23	Gemischte Aufgaben zum exponentiellen	
Rechnerische Lösungen quadratischer		Wachstum.....	66
Gleichungen – Teil 3.....	24	Gemischte Aufgaben zur exponentiellen	
Eulers p-q-Formel zur Berechnung gemischt-		Abnahme	67
quadratischer Gleichungen	25	Der Logarithmus.....	68
Der Satz des Vieta	26	<i>Teste dein Wissen:</i> Exponentialfunktionen	69
Textaufgaben.....	27	Kapitel 7 – Kombinatorik.....	70
<i>Teste dein Wissen:</i>		Permutationen	70
Quadratische Gleichungen.....	28	Auswählen ohne Beachtung der Reihenfolge	71
Kapitel 3 – Potenzen und Wurzeln	31	Auswählen unter Beachtung der Reihenfolge	72
Potenzen	31	Zickenkrieg beim Pferderennen	73
Multiplikation und Division von Potenzen.....	32	Auf dem Weg zur Lottomillion	74
Potenzieren von Potenzen	33	<i>Teste dein Wissen:</i> Kombinatorik	75
n-te Wurzel	34	Lösungen	77
Potenzieren mit rationalen Exponenten	35	Kapitel 1 – Quadratische Funktionen	78
Potenzfunktionen $y = x^n$	36	Kapitel 2 – Quadratische Gleichungen.....	85
Potenzfunktionen $y = x^{-n}$	39	Kapitel 3 – Potenzen und Wurzeln	94
Wurzelfunktionen	41	Kapitel 4 – Volumen und Oberflächen	
<i>Teste dein Wissen:</i> Potenzen und Wurzeln.....	42	von Körpern.....	104
Kapitel 4 – Volumen und Oberflächen		Kapitel 5 – Trigonometrie	109
von Körpern	43	Kapitel 6 – Exponentialfunktionen.....	116
Das Volumen von Pyramiden.....	43	Kapitel 7 – Kombinatorik	121
Die Oberfläche von Pyramiden	45		
Das Volumen von Kegeln	46		

Vorbemerkungen

Du kennst doch sicherlich die Sendung „Wer wird Millionär“? Dort muss sich der Kandidat für eine von vier vorgegebenen Antworten entscheiden. Vor einiger Zeit durfte eine Frau, die eigentlich bei der 16000-Euro-Frage ausgeschieden war, weil sie die Frage nicht beantworten konnte und wollte, erneut antreten und um das große Geld spielen. Was war passiert?
Die Frage lautete damals:

Jedes Rechteck ist ein ...

A: Rhombus	B: Quadrat
C: Trapez	D: Parallelogramm

Die Auflösung wurde mit „D: Parallelogramm“ angegeben. Daraufhin hagelte es Proteste von allen Seiten, weil natürlich auch die Antwort „**C: Trapez**“ richtig gewesen wäre. Die Kandidatin hätte also theoretisch für die richtige Antwort eine fifty-fifty-Chance gehabt, ohne den entsprechenden Joker einzusetzen.

Sehr oft tun sich die Kandidaten in solchen Sendungen schwer mit Fragen zur Mathematik. Als beliebte Ausreden hört man dann „Mathe habe ich noch nie gekonnt“ oder „Wozu brauche ich schon Mathematik?“

Dabei kann Mathematik nicht nur viel Geld bringen, sondern auch ganz schön spannend sein! Wusstest du z. B., dass große Primzahlen genutzt werden, um Nachrichten oder Banküberweisungen zu verschlüsseln? Oder dass man die Zahl π auf Milliarden von Nachkommastellen berechnet, weil dies die ideale Testaufgabe für neue Computer ist?

Wenn also zwei verschiedene Computer unabhängig voneinander dieselbe Ziffernfolge dieser Zahl liefern, dann muss man bei einer Fülle von Milliarden Rechenoperationen davon ausgehen, dass beide richtig gerechnet haben. 1986 entdeckten Mathematiker auf diese Weise übrigens einen Fehler beim ersten Pentium-Prozessor (einem Bauteil für Computer).

Aber auch ganz alltägliche Dinge und Tätigkeiten, wie Geldbeträge beim Einkaufen, Uhrzeiten, Statistiken oder Fahrstrecken und Fahrzeiten, haben sehr viel mit Mathematik zu tun, ohne dass es uns immer bewusst ist.

Mathematik ist vor allem auch sehr einfach. Du musst nicht unbedingt jede Woche 50 neue Vokabeln lernen, wie im Englisch- oder Französischunterricht; du brauchst nur ein wenig Übung in den Grundrechenarten und ein paar Rechenregeln konsequent zu befolgen, dann kommst du mit vielen Dingen des täglichen Lebens leichter klar. Diese Mathe-Merk-Mappe wird dir dabei helfen, wichtige Rechenregeln und Sachverhalte zu verstehen und zu verinnerlichen. Zu jedem Themengebiet findest du zunächst einen Infokasten mit den wichtigsten Regeln und Beispielaufgaben, die dir zeigen, wie es funktioniert. Dann bist du selbst gefordert: Mithilfe verschiedener Aufgaben und den Lösungen im hinteren Teil des Buches kannst du feststellen, ob du alles verstanden hast oder welche Bereiche du noch mal üben musst. So wirst du immer sicherer und kannst dich bald zu den Matheprofis zählen!

Solltest du die Mathe-Merk-Mappe ganz durchgearbeitet haben, dann hebe sie gut auf, denn auch später kannst du sie zum Nachschlagen und Wiederauffrischen benutzen, wenn dir ein Thema nicht mehr geläufig ist oder du eine Regel vergessen hast. Die passenden Beispiele helfen dir, dich schnell wieder zu erinnern.

Viel Spaß beim Rechnen wünscht dir
der Verlag an der Ruhr und

Hans J. Schmidt

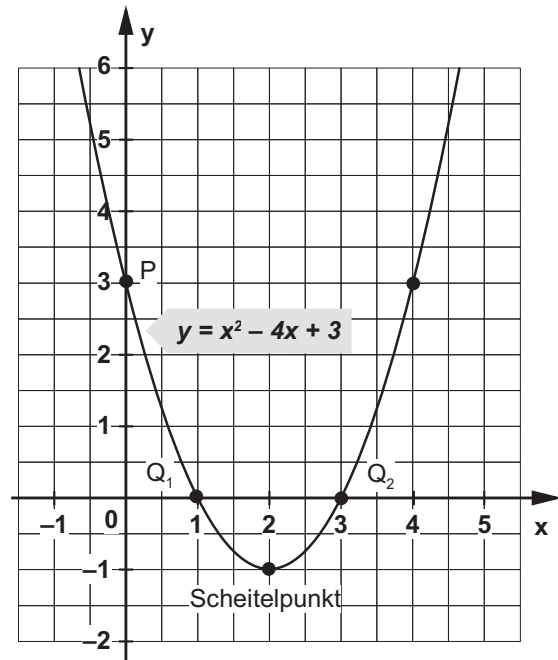
Einführende Beispiele (1/2)

Quadratische Funktionen haben eine Funktionsgleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).
Den Graphen einer quadratischen Funktion nennt man eine **Parabel**.

- Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet,
- für $a < 0$ ist sie nach unten geöffnet.

Beispiel 1: $y = x^2 - 4x + 3$

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	-1	0	3	8



Aufgabe 1:

Setze für das Beispiel 1 die richtigen Wörter bzw. Zahlen ein:

- a) Die Parabel ist nach geöffnet.
- b) Der Graph ist zu einer Parallelen zur y-Achse.
- c) Der Graph hat mit der y-Achse den Punkt P(|) gemeinsam.
- d) Die Koordinaten des lauten (2 | -1).
- e) Der Graph hat gemeinsame Punkte Q_1 (|) und Q_2 (|) mit der x-Achse.
- f) Der Scheitelpunkt ist der Punkt des Graphen.
- g) Der Graph ständig bis zum Scheitelpunkt und dann wieder an.

Scrambled words and numbers for the task:

- Scheitelpunkts
- fällt
- tiefste
- 1
- oben
- 3
- 3
- 0
- 0
- symmetrisch
- 0
- steigt

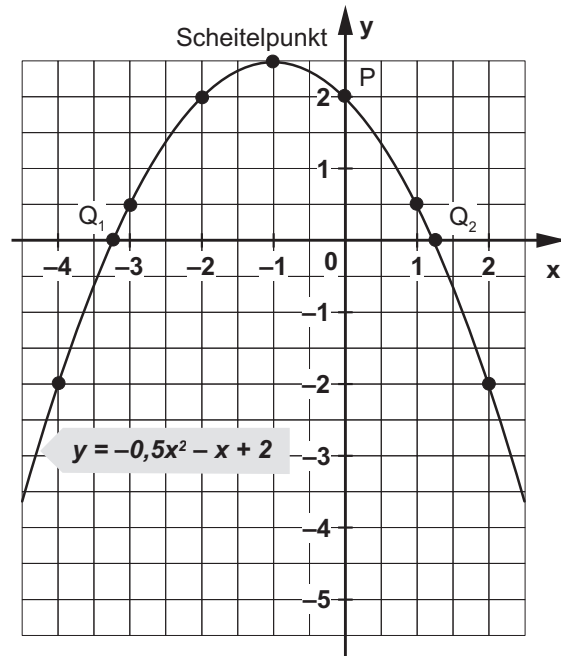
Einführende Beispiele (2/2)

Quadratische Funktionen haben eine Funktionsgleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).
Den Graphen einer quadratischen Funktion nennt man eine **Parabel**.

- Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet,
- für $a < 0$ ist sie nach unten geöffnet.

Beispiel 2: $y = -0,5x^2 - x + 2$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	-2	0,5	2	2,5	2	0,5	-2



Aufgabe 2:

Setze für das Beispiel 2 die richtigen Wörter bzw. Zahlen ein:

- a) Die Parabel ist nach geöffnet.
- b) Der Graph ist symmetrisch zu einer zur y-Achse.
- c) Der Graph hat mit der den Punkt P(0|2) gemeinsam.
- d) Die Koordinaten des Scheitelpunktes P lauten (|).
- e) Der Graph hat gemeinsame Punkte $Q_1 (\approx -3,2|0)$ und $Q_2 (\approx 1,2|0)$ mit der .
- f) Der Scheitelpunkt ist der Punkt des Graphen.
- g) Der Graph ständig bis zum Scheitelpunkt und dann wieder.

unten

steigt

Parallelen

fällt

x-Achse

höchste

2,5

y-Achse

-1

Nullstellen quadratischer Funktionen

In der Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) nennt man

- ax^2 das **quadratische Glied**,
- bx das **lineare Glied** und
- c das **absolute Glied**.

Die Stelle x , an der eine Funktion den Wert 0 annimmt, heißt **Nullstelle** der Funktion.

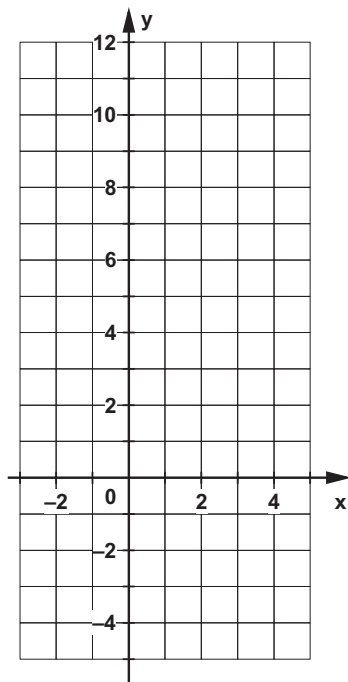
An den Nullstellen Q_1 und Q_2 der Funktion schneidet oder berührt der Graph die x -Achse.

Aufgabe 1:

Lege für die quadratische Funktion eine Wertetabelle an, zeichne den Graphen und bestimme die Nullstellen.

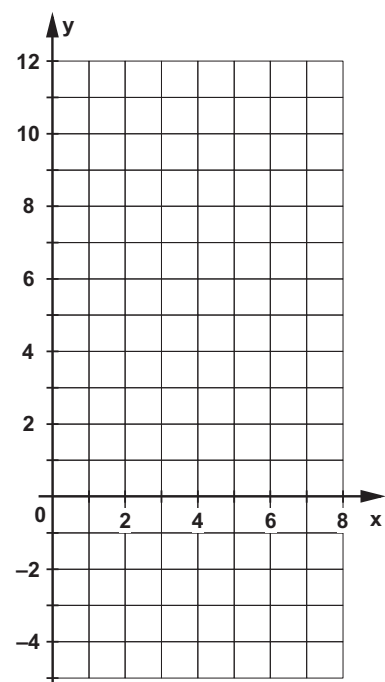
a) $y = x^2 - 2x - 3$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	
5	



b) $y = 0,5x^2 - 4x + 3$

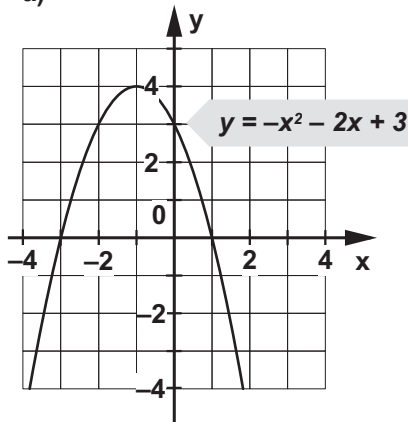
x	y
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	



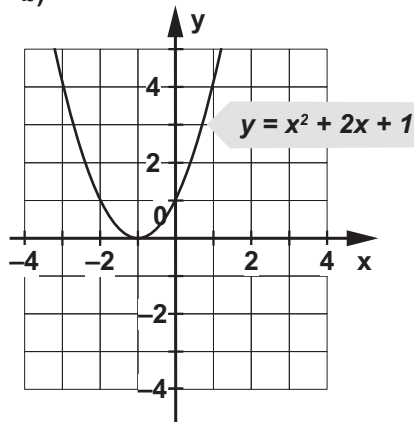
Aufgabe 2:

Lies die Nullstellen aus der Zeichnung ab.

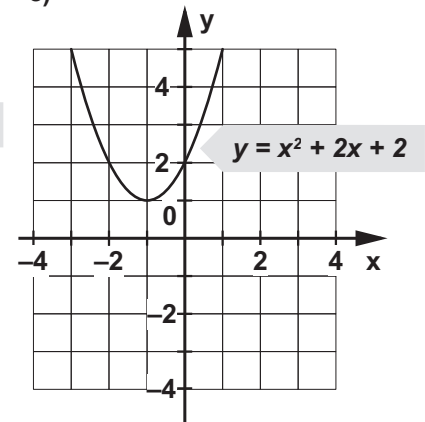
a)



b)



c)

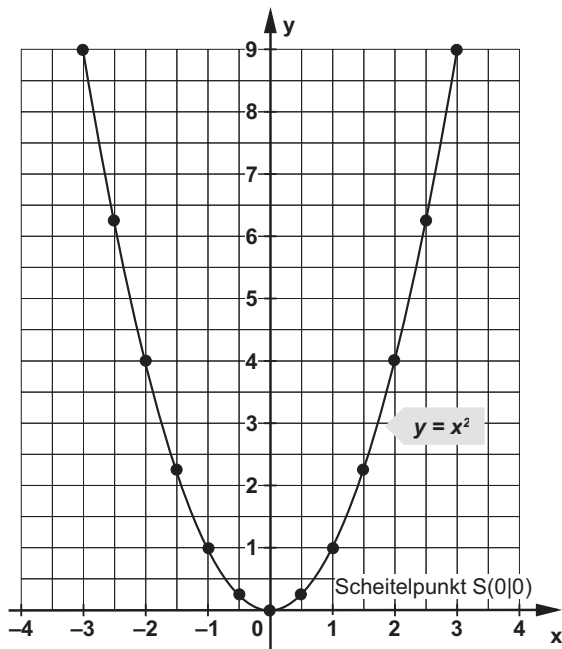


Die quadratische Funktion $y = x^2$

Setzt man in der Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ den Faktor $a = 1$, den Faktor $b = 0$ sowie die Konstante $c = 0$, so erhält man die Funktionsgleichung $y = x^2$. Der Graph dieser Funktion heißt **Normalparabel**.

Beispiel: $y = x^2$

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9



Für die Normalparabel gilt:

- Die Normalparabel mit der Funktion $y = x^2$ ist nach oben geöffnet. Sie fällt im 2. Quadranten bis zum Ursprung (0|0) und steigt dann im 1. Quadranten wieder an.
- Der Scheitelpunkt S ist der tiefste Punkt der Normalparabel. Der Scheitelpunkt ist identisch mit dem Ursprung (0|0).
- Die Normalparabel ist symmetrisch zur y-Achse.

Aufgabe 1:

Der Punkt P liegt auf der Normalparabel. Bestimme die fehlende Koordinate.

- a) $P(1,6 | \quad)$ b) $P(\quad | 2,89)$ c) $P(\quad | 1,69)$ d) $P(0,9 | \quad)$ e) $P(\quad | 3,61)$ f) $P(-0,3 | \quad)$

Aufgabe 2:

Lies näherungsweise an der Normalparabel ab.

- a) $1,4^2 = ?$ b) $(-2,1)^2 = ?$ c) $0,8^2 = ?$ d) $(-2,8)^2 = ?$ e) $2,7^2 = ?$ f) $(-1,6)^2 = ?$

Aufgabe 3:

Gib zu den Punkten $P(0,7|0,49)$, $Q(-2,5|6,25)$, $R(3,5|12,25)$ und $S(-1,2|1,44)$ der Normalparabel den zur y-Achse symmetrischen Punkt

$P'(\quad | \quad)$, $Q'(\quad | \quad)$, $R'(\quad | \quad)$, $S'(\quad | \quad)$ an.

Aufgabe 4:

Löse die Gleichungen näherungsweise mit der Normalparabel. Jede Gleichung hat entweder zwei Lösungen, eine oder gar keine Lösung.

- a) $x^2 = 6$ b) $x^2 = -4$ c) $x^2 = 0$ d) $x^2 = 2,5$ e) $x^2 = 8,2$ f) $x^2 = -1$

Aufgabe 5:

Liegt der Punkt P auf, oberhalb oder unterhalb der Normalparabel? Löse ohne zu zeichnen.

- a) $P(3,1|9,11)$ b) $P(1,4|1,96)$ c) $P(-0,4|0,164)$ d) $P(-4,5|20,2)$ e) $P(7,2|52)$ f) $P(-2,4|5,764)$

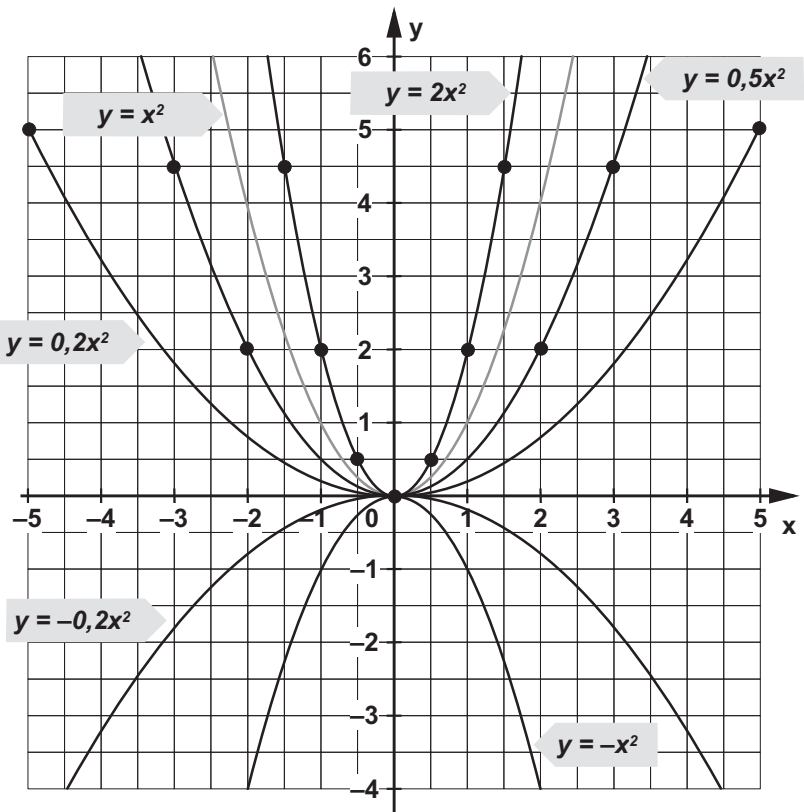
Die quadratische Funktion

$$y = ax^2 \quad (1/2)$$

Die Graphen von quadratischen Funktionen der Form $y = ax^2$ sind Parabeln mit dem Scheitelpunkt $S(0|0)$. Sie sind symmetrisch zur y-Achse.

Es gilt:

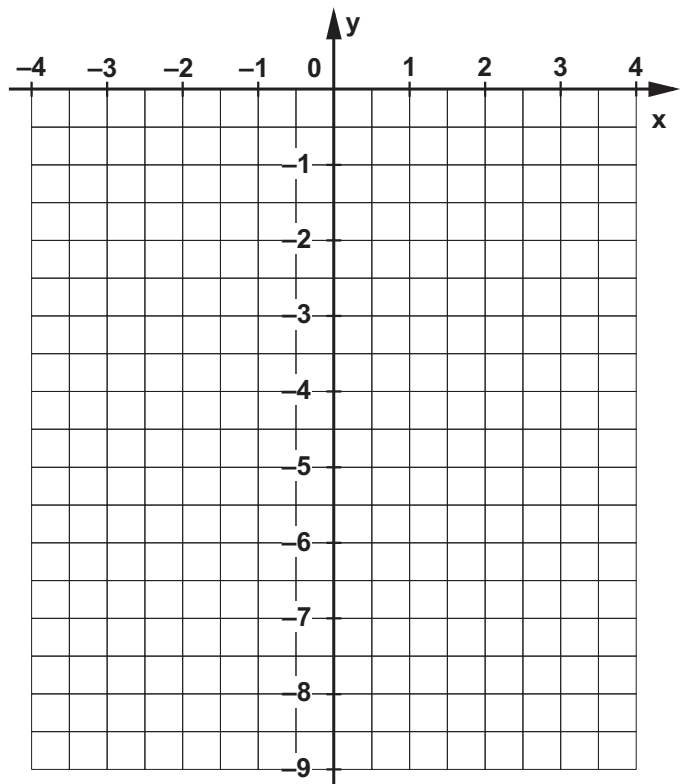
- Die Parabeln sind für $a > 0$ nach **oben**, für $a < 0$ nach **unten** geöffnet.
- Jede Parabel mit $|a| > 1$ verläuft **steiler** als die Normalparabel → sie ist **gestreckt**.
- Jede Parabel mit $0 < |a| < 1$ verläuft **flacher** als die Normalparabel → sie ist **gestaucht**.
- Die Parabel mit der Funktionsgleichung $y = -x^2$ entsteht durch Spiegeln der Normalparabel an der x-Achse.



Aufgabe 1:

- a) Fülle für die quadratische Funktion $y = -0,5x^2$ die Wertetabelle aus und zeichne den dazugehörigen Graphen.
- b) Beschreibe den Verlauf des Graphen im Vergleich mit dem einer Normalparabel.

x	y
-4	
-3	
-2,5	
-2	
-1,5	
-1	
-0,5	
0	
0,5	
1	
2	
3	
4	



Die quadratische Funktion

$$y = ax^2 \quad (2/2)$$

Aufgabe 2:

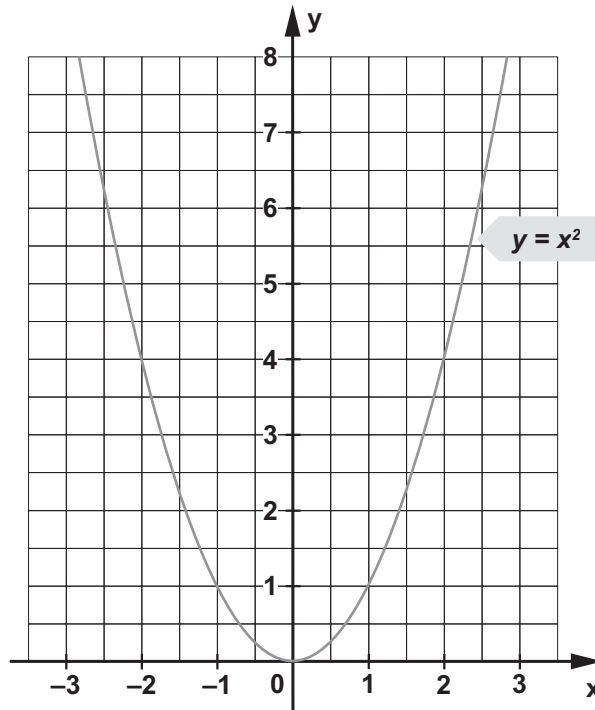
- a) Lege für die quadratischen Funktionen $y = 0,5x^2$ und $y = 1,5x^2$ Wertetabellen an und zeichne die Graphen.
b) Vergleiche den Verlauf der Graphen mit dem der Normalparabel.

$$y = 0,5x^2$$

x	y
-3	
-2	
-1	
-0,5	
0	
0,5	
1	
2	
3	

$$y = 1,5x^2$$

x	y
-2	
-1,5	
-1	
-0,5	
0	
0,5	
1	
1,5	
2	



Aufgabe 3:

Wie groß muss der Faktor a sein, damit der Punkt P zum Graphen der Funktion mit der Gleichung $y = ax^2$ gehört?

- a) $P(1|-3)$ b) $P(4|8)$ c) $P(1,5|4,5)$ d) $P(0,5|1)$

Aufgabe 4:

Finde heraus, welcher der Punkte $P_1(3|-18)$, $P_2(-2,5|7,8125)$, $P_3(1,5|9)$, $P_4(-4|-8)$ auf dem Graphen welcher der folgenden Funktionsgleichungen liegt.

- a) $y = -0,5x^2$ b) $y = -2x^2$ c) $y = 1,25x^2$ d) $y = 4x^2$

Aufgabe 5:

Welche Funktionsgleichung gehört zu dem dargestellten Graphen?

