

BERNARD BOLZANO - GESAMTAUSGABE

**HERAUSGEGEBEN VON EDUARD WINTER †, JAN BERG,
FRIEDRICH KAMBARTEL, JAROMÍR LOUŽIL, BOB VAN ROOTSELAAR**

REIHE II

NACHLASS

B. WISSENSCHAFTLICHE TAGEBÜCHER

BAND 9

ERSTER TEIL

MISCELLANEA MATHEMATICA

BERNARD BOLZANO

MISCELLANEA MATHEMATICA 15

HERAUSGEGEBEN

VON

BOB VAN ROOTSELAAR

UND

ANNA VAN DER LUGT

FRIEDRICH FROMMANN VERLAG · GÜNTHER HOLZBOOG

STUTTGART-BAD CANNSTATT 2000

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Bolzano, Bernard:

Bernard-Bolzano-Gesamtausgabe / hrsg. von Eduard Winter ... –
Stuttgart-Bad Cannstatt : frommann-holzboog

~~ISBN 3-7728-0074-2~~

Reihe 2. Nachlass

B. Wissenschaftliche Tagebücher

Bd. 9.

Teil 1. Miscellanea mathematica. – 15.

Hrsg. von Bob van Rootselaar und Anna van der Lugt 2000

ISBN 3-7728-0486-1

© Friedrich Frommann Verlag · Günther Holzboog

Stuttgart-Bad Cannstatt 2000

Satzgestaltung und Druck: Offizin Chr. Scheufele, Stuttgart

Einband: Ernst Riethmüller & Co GmbH, Stuttgart

Gedruckt auf säurefreiem und alterungsbeständigem Papier

INHALTSVERZEICHNIS

| | |
|---|-----|
| Vorwort | 7 |
| Editionsbericht | 9 |
| Einleitung | 11 |
| Miscellanea Mathematica, Heft 15: MM 1267 – MM 1358 | 17 |
| Bibliographie | 157 |
| Personenregister | 167 |
| Bolzano's Sachregister MM 1267 – MM 1358 nach Repertorium für Mathematik | 171 |
| Sachregister | 173 |

VORWORT

Der Band II B 9/1 der *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe* (BGA) umfaßt die Transkription von Heft 15 der *Miscellanea Mathematica* (MM 1267–1358). Die Veröffentlichung dieser mathematischen Tagebücher wurde von der Handschriftensammlung der Österreichischen Nationalbibliothek Wien am 2. Januar 1967 genehmigt. Die Originale liegen dort unter den Signaturen Series Nova 3453 (Heft 1–7), 3454 (Heft 8–15) und 3455 (Heft 16–24) (vergl. auch BGA Band E 2/1, S. 28–30).

Wir danken Dr. S. J. Suys-Reitsma für ihre Hilfe bei der Bearbeitung der griechischen und lateinischen Textteile. Herrn Professor Dr. J. Berg verdanken wir eine Fotokopie des Manuskripts, auf das in MM 1342, Z. 35/36 hingewiesen wird. Vergl. auch die Fußnote 89.

Den Bibliotheken der Bundesrepublik Deutschland, der Österreichischen Nationalbibliothek Wien und den holländischen Bibliotheken sind wir für ihre freundliche Unterstützung bei der Vorbereitung dieses Bandes zu Dank verpflichtet.

Der Redaktion des Verlags, insbesondere M. Jungbauer, danken wir für die Sorgfalt, mit der auch dieser Band betreut wurde.

Die Herausgeber

B. VAN ROOTSELAAR

A. VAN DER LUGT

EDITIONSBERICHT

Das Manuskript von Heft 15 der *Miscellanea Mathematica* ist gemäß den Editionsprinzipien, die in Band E 2/1, S. 8–15 der Gesamtausgabe aufgeführt sind, bearbeitet. Daraus ergibt sich ein bestimmter Zusammenhang zwischen Manuskript und gedrucktem Text, der im folgenden zur klareren Übersicht kurz zusammengefaßt und erläutert wird.

Der durchgängige deutschsprachige Text ist in Bolzanos Manuskript in deutscher Schrift niedergeschrieben. Für fremdsprachige Teile, Formeln und vereinzelte Buchstaben (besonders in den Figuren) verwendete er die lateinische Schrift. Einzelne Buchstaben, die im Manuskript in deutscher Schrift stehen, sind im Druck in Fraktur gesetzt. Die von Bolzano unterstrichenen Wörter, Sätze und Formeln wurden kursiv gesetzt. Bezüglich der Kursivierungen innerhalb der Interpolationsklammern sei auf die Editionsprinzipien verwiesen. Absätze im Druck entsprechen den Absätzen des Manuskripts.

Am Rand des Manuskripts verzeichnete Vertikallinien, geschwungene Klammern, quer geschriebene Wörter und dgl. sind in Fußnoten erläutert. An mehreren Stellen hat Bolzano in Klammern kritische Bemerkungen zu eigenem oder fremdem Text hinzugefügt, versehen mit hochgestellten Zeichen, beispielsweise $\circ(\)^\circ$. Diese Zeichen sind im allgemeinen im Druck unverändert wiedergegeben, manchmal mußten wir allerdings ein anderes Zeichen wählen.

Die in den Formeln vorkommenden Zeichen der speziellen mathematischen Funktionen wurden einheitlich durch die heute üblichen ersetzt. Die Differentiale sind, wo kein Mißverständnis zu befürchten war, mit d bezeichnet.

Exzerpte aus Büchern und Abhandlungen werden als Paraphrasen behandelt, nicht als Zitate, obgleich sie bisweilen einem Zitat sehr nahekommen. Unklarheiten und Fehler, die sich in Bolzanos Zusammenfassungen und Paraphrasen eingeschlichen haben, sind in den Fußnoten vermerkt. Im übrigen wurden die Exzerpte wie die eigenen Texte Bolzanos behandelt.

Es muß hier bemerkt werden, daß wir von Stahls *Anfangsgründen* nur die erste Ausgabe 1797 haben einsehen können.

Zuletzt noch eine Bemerkung zu den Interpolationen in den Zusammenfassungen. Da die von Bolzano behandelten Texte im sprachlichen Ausdruck erheblich variieren, war es bei der Auflösung von Bolzanos Kurzschrift nicht immer möglich, die Ergänzungen in moderner Rechtschreibung wiederzugeben. In solchen Fällen haben wir auf die jeweiligen Originalschriften zurückgegriffen.

EINLEITUNG

Der vorliegende, in der Gesamtausgabe (BGA) mit 2B 9/1 bezeichnete Band enthält die Transkription der Aufzeichnungen des 15. Hefts der *Miscellanea Mathematica* (MM 1267–1358), die zwischen dem 8. Februar 1816 (MM 1267) und dem 8. Juni 1817 (MM 1359, Heft 16) entstanden sind. Daneben finden sich weitere Datierungen vom 11. August 1816 (MM 1296), Raditsch, den 18. Oktober 1816 (MM 1298), vom 29. Dezember 1816 (MM 1319), 26. Januar 1817 (MM 1328) und 13. April 1817 (MM 1347).

Das Heft enthält vor allem eine beträchtliche Anzahl von Lehrbuch-Titeln, des weiteren Arbeiten, die aus literarischen Zeitschriften gesammelt sind, sowie Auszüge aus Rezensionen in diesen Zeitschriften mit vereinzelt kritischen Bemerkungen Bolzanos. In einem kleineren Teil ist Bolzano mit eigenständigen Untersuchungen beschäftigt. Zu diesen Untersuchungen, die nicht unmittelbar an die Prüfung von Büchern und Abhandlungen anschließen und mit wechselndem Erfolg durchgeführt werden, gehören:

Ein unvollendeter Versuch, die Produktdarstellungen für $\sin x$ und $\cos x$ herzuleiten (MM 1269/74), und die Berechnung von bestimmten trigonometrischen Reihen anlässlich einer Frage von Gerstner (MM 1323/27);

ferner Untersuchungen über den Begriff der Potenz und seiner Anwendung auf die Binomialformel (MM 1267/69, 1331/35), Versuche, den Taylorschen Satz zu beweisen (MM 1329/31, 1336/41, 1344/50, 1352/53), Versuche, den Begriff der Größe zu definieren (MM 1298–1311, 1313), Betrachtungen über die Konvergenz unendlicher Reihen (MM 1319/21, 1355/58) und über den Zwischenwertsatz sowie den Begriff der Stetigkeit (MM 1296, 1342/44);

neben diesen Untersuchungen finden sich ausführliche Berechnungen und zerstreute kürzere Bemerkungen zu verschiedenen Begriffen wie z. B. zu den imaginären Größen (MM 1296/97), zum Raumbegriff (MM 1298, 1357) und den Begriffen von Linie, Fläche und Körper (MM 1354), zur Physik (MM 1313), zu

den Begriffen einer organischen Kraft sowie der Attraktions- und Repulsionskraft (MM 1328/29).

Im folgenden wird auf einige dieser Untersuchungen sowie auf weitere kritische Bemerkungen Bolzanos etwas näher eingegangen. Dabei werden die Themen Geometrie und Analysis unterschieden:

Geometrie

Bei der algebraischen Untersuchung über den Begriff einer Potenz macht Bolzano (MM 1267) beispielsweise den Unterschied zwischen dem allgemeinen Begriff einer Fläche und den Begriffen einzelner Flächen. Der allgemeine Begriff einer Fläche entspricht demjenigen in MM 309¹ (Ende 1813), der später auch in der Arbeit *Die drey Probleme*² § 35.1 angeführt wird, wo es heißt: »Ein Raunding, zu dessen jedem Punkte es, anzufangen von einer gewissen Entfernung für alle kleineren abwärts, wenigstens eine, und höchstens nur eine endliche Menge getrennter Linien voll Punkte gibt, heißt eine Fläche überhaupt.« Wenn man also eine Kugelfläche definiert als die Menge der Punkte (im Raume) die gleichweit von einem gegebenen entfernt sind, so ist es methodisch richtig, wenn man zeigt, daß die derart definierte Menge tatsächlich eine Fläche nach der allgemeinen Definition ist.

Um folgern zu können, daß die Entfernung das einfachste Verhältnis sei, schlägt Bolzano eine neue Definition des Ortes und des Raums vor. In MM 1187³ (25. 9. 1815) heißt es noch: »Der Ort ist dasjenige Verhältnis unter den Dingen welches den Grund enthält, weshalb sie nur unter diesen und jenen Zeitverhältnissen erscheinen.« Der Raum ist dann der Inbegriff aller möglichen Orte.

Die im 15. Heft (MM 1298) gegebene Definition der Orte weicht von dieser ab, insofern die gegenseitige Einwirkung der Dinge einbezogen wird: »Die Orte der Dinge sind diejenigen Verhältnisse unter denselben, die den Grund davon enthalten, weshalb sie in bestimmten Zeitverhältnissen auf einander wirken.« Eine im wesentlichen damit übereinstimmende Erklärung findet sich in den Arbeiten *Die drey Probleme, Versuch einer objectiven Begründung* und in *Den Para-*

¹ BGA 2B 3/2, S. 34.

² B. Bolzano, *Die drey Probleme der Rectification, der Complation und der Cubirung*. Leipzig 1817. Vergl. auch B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, Leipzig 1851, § 40, Fußnote.

³ BGA 2B 8/2, S. 47.

*doxien des Unendlichen*⁴, mit der Maßgabe, daß in der zweiten und dritten Arbeit »Verhältnisse« durch »Bestimmungen« ersetzt worden sind. Anschließend lautet die Definition des Raums jetzt (MM 1357): »Der Raum ist dasjenige Verhältnis [der Dinge] unter einander, welches den Grund enthält, weshalb sie in diesen oder jenen Zeiten auf einander wirken.« Daraus folgert Bolzano sofort, daß nicht der Ort eines Atoms das einfachste Verhältnis im Raume sein muß, sondern die Entfernung. Diese letzte Erklärung ist nicht sehr glücklich und scheint nur aufgestellt zu sein, um die Entfernung als einfachstes Verhältnis im Raum zu rechtfertigen. Bolzano hat sie denn auch nicht beibehalten; in den späteren, oben genannten Arbeiten ist der Raum wieder der Inbegriff der Orte.

Es fällt jedoch in der obigen Definition des Orts (MM 1298) auf, daß die Orte zusammen erklärt werden. Wenn man versucht, die Mehrzahl in Einzahl zu ändern, also *den Ort* bestimmen will, stößt man offenbar auf eine Schwierigkeit. In der von Bolzano beabsichtigten Weise läßt sich der Ort (eines Dinges) nicht ohne Heranziehung anderer Dinge erklären⁵. Im Vergleich dazu erscheint die oben angeführte, wenn auch verdächtige Erklärung (MM 1187) ein wenig abgeändert doch noch besser. Daraus die objektive Begründung der drei Dimensionen des Raumes herzuleiten, würde aber schwieriger, wenn nicht gar unmöglich, sein.

Der Begriff des Raums hängt bei Bolzano eng zusammen mit dem Begriff der Zeit. In MM 995⁶ (3. 1. 1815) wird die Zeit erklärt als diejenige Bedingung, unter welcher einem Subjekt verschiedene einander widersprechende Prädikate beigelegt werden können, d. h. als diejenige Bedingung, unter der das Subjekt sich verändert. Offenbar ist Bolzano mit dieser Definition noch nicht zufrieden, denn er stellt im vorliegenden Heft MM 1283 eine neue auf: »Zeit ist dasjenige Verhältnis der Erscheinungsdinge zu mir, aus dessen Änderung ich mir erkläre ...«. In den späteren Schriften kehrt er jedoch im wesentlichen zu seiner ersten Erklärung (MM 995) zurück.

Die Kritik (MM 1336), die Bolzano an dem von Klügel vorgeschlagenen Grundsatz der Rektifikation übt, ist völlig berechtigt. Dieser Grundsatz lautet: Zwei Linien, die zwischen denselben Endpunkten liegen, sind desto weniger an

⁴ Vergl. z. B. B. Bolzano, *Die drey Probleme der Rectification, der Complation und der Cubirung*, Leipzig 1817, § 30, *Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von den drei Dimensionen des Raumes*, Prag 1843, § 4.5–7 (BGA I 18, S. 232) und *Paradoxien des Unendlichen*, Prag 1851, § 40.

⁵ Vergl. MM 333 (BGA 2B 3/2, S. 77): Man stelle sich vor, daß nur 1 Atom existierte, so könnte ich von keinem Orte desselben reden.

⁶ BGA 2B 7/1, S. 131.

Länge verschieden, je mehr Punkte sie mit einander gemein haben⁷. Zu diesem Satz hat Bolzano mehrere Gegenbeispiele gegeben, z. B. MM 55–56 (BGA 2B 2/1, S. 101–103), MM 416 (BGA 2B 4/1, S. 99–100); auch in dem Fall, wo Bolzano die Gültigkeit offenläßt, ist der Satz falsch. Um dies zu zeigen, hätte er nur eines seiner früheren Beispiele ein wenig zu präzisieren brauchen.

Analysis

Gleich am Anfang des Heftes⁸ stellt Bolzano sich die Aufgabe, den allgemeinen Begriff einer Potenz zu definieren. Im Anschluß daran (MM 1331) stellt er sich die Frage, wie eine Funktion $F(a, m)$, von zwei Größen a und m , beschaffen sein muß, wenn $F(a, m) \cdot F(a, n) = F(a, m+n)$ für jeden Wert von a, m, n . Unter der Voraussetzung $F(a, 1) = a$ kann er die Funktion $F(a, m)$ für rationale m (mit einiger Mühe) identifizieren mit a^m . Doch weiter kommt er trotz einiger Anstrengungen nicht, eben weil er noch nicht über eine richtige Erklärung von x^m verfügt. Der wesentliche Teil der Bestimmung von $F(a, m)$ für alle a und nicht-rationale m fehlt.

Die stetigen Lösungen der Gleichung $F(a, m) \cdot F(a, n) = F(a, m+n)$ kann man tatsächlich identifizieren mit $F(a, 1)^m$ (m beliebig). In diesem Sinne kann die allgemeine Exponentialfunktion gekennzeichnet werden. Es ist aber nicht der Weg, die Exponentialfunktionen einzuführen.

Die größte Aufgabe der Analysis ist für Bolzano wohl der Beweis des Taylorschen Theorems, den er noch immer nicht gefunden hat. In diesem Heft unternimmt er einen weiteren Versuch: Er fängt an, eine Gültigkeitsbedingung aufzustellen (MM 1329/31). Diese Bedingung lautet, daß die Glieder der Taylorschen Reihe stärker abnehmen als eine fallende geometrische Reihe, denn aus mehreren zeigt sich, daß er diese Eigenschaft als eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Konvergenz unendlicher Reihen ansieht. Bolzano sucht das Problem zu analysieren, um eine Beweisstrategie zu entwerfen. Die beste Möglichkeit sieht er noch in einer Verbesserung des MacLaurinschen Beweises, d. h. darin, den Übergang von der Formel mit Differenzen zu derjenigen mit Differentialquotienten als richtig zu beweisen. Entsprechende Ansätze hierzu finden sich schon im 12. Heft⁹, aber nun arbeitet Bolzano ausführlicher

⁷ Dieser Satz ist auch enthalten in der kritischen Übersicht (von 1815) der Theorien der Rektifikation MM 1164/65 (BGA 2B 8/1).

⁸ MM 1267, Fortsetzung 1331–1335.

⁹ MM 1056–1058, 1060–1061, 1063–1067 (BGA 2B 7/2, S. 76–79, 84–85, 87–92).

daran¹⁰. Es gelingt ihm aber nicht, die Unterschiede der Differenzenquotienten und den Differentialquotienten, die zwar einzeln beliebig klein gemacht werden können, in ihren Gesamtheit zu beherrschen. Die Abschätzung von Lagrange von f durch ein endliches Anfangsstück der Taylorschen Reihe kann er nicht verwenden, weil der Gültigkeitsbereich der Abschätzung bei wachsendem Anfangsstück immer kleiner werden kann. Nach all diesen ergebnislosen Bemühungen versucht Bolzano schließlich noch einen Beweis zu führen, der dem des Binomialtheorems nachgebildet ist, d. h. nach dem Aufbau der Funktion¹¹. Ein sehr zweifelhaftes Unternehmen.

Außer Betrachtungen über die Konvergenz der Taylorschen Reihe gibt es auch ähnliche für allgemeine Reihen (mit positiven Gliedern). Die ersten diesbezüglichen Aufzeichnungen (MM 1319–1321) sind noch ein wenig ungeordnet. Eine konvergente Reihe Σa_n ist für Bolzano eine Reihe, die sich einem bestimmten Wert beliebig nähert, wenn man sie weit genug fortsetzt, und sich von diesem Werte nicht wieder entferne, wenn man sie weiter fortsetzt; d. h. wenn es bei einer vorgegebenen Annäherung bis auf eine Größe d ein r gibt, derart daß $a_r + \dots + a_{r+s} < d$ für alle natürlichen Zahlen s ¹². Diese Formulierung folgt ganz natürlich aus der Bolzanoschen Definition einer Reihe als einer endlichen Summe, die immer weiter fortgesetzt werden kann. Deshalb bin ich der Meinung, daß die Frage, woher Bolzano diese Bedingung hat, überflüssig ist. Eine andere, tiefer liegende Frage ist, ob es zu einer Reihe, welche diese Bedingung erfüllt, immer einen solchen bestimmten Wert gibt. Dies wird zwar in der Arbeit *Rein analytischer Beweis*, § 7 behauptet, aber nicht bewiesen.

Im Zusammenhang mit der oben genannten Strategie, den Taylorschen Satz nach dem Aufbau der Funktion zu beweisen, zeigt Bolzano, daß die Produktreihe zweier Reihen, die stärker als eine konvergente geometrische abnehmen, wieder durch eine solche Reihe beschränkt wird (MM 1355–1358).

Zur Frage der Gültigkeit des Taylorschen Satzes gehört auch eine Untersuchung der Natur der bezüglichen Funktionen, z. B. der Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Insbesondere der Begriff der Stetigkeit war zu Bolzanos Zeiten noch ziemlich schwankend und wurde auch wohl so verstanden, daß die Differenzierbarkeit darin begriffen war. Es liegt also auf der Hand, mit einer Analyse des Begriffs der Stetigkeit anzufangen.

¹⁰ MM 1329–1331, 1336–1341.

¹¹ Vergl. MM 1348–1350, 1352–1353.

¹² Genau so im Manuskript »Die ersten Gründe ...«, § 60, aus dem Jahre 1815. Vergl. auch die Einschiebung MM 1048 (BGA 2B 7/2, S. 63). Diese Einschiebung dürfte also auch 1815 datiert sein.

Bis dahin hatte Bolzano unter der Stetigkeit einer Funktion die Eigenschaft verstanden, die er durch die Formel $f(x + \omega) - f(x) = \Omega$ beschreibt, deren Bedeutung dieselbe wie die heutige ist¹³. In MM 1342 aber meint er, daß zum Begriff der Stetigkeit noch mehr gehört, nämlich daß von einem gewissen Punkte an Ω einerlei Vorzeichen behält. Als Beispiel einer Funktion, die diese Bedingung nicht erfüllt, d. h. einer Funktion, für die Ω in einer Umgebung von 0 unendlich oft von Zeichen wechselt, betrachtet er die (von ihm so genannte) Spiralsinuslinie, welche aus der Sinuslinie entsteht, wenn man den Kreis durch eine Spirale ersetzt. Diese Berechnungen führen ihn zu der folgenden vereinfachten Form einer solchen Linie (MM 1343)

$$y = a + (x - b) \cdot \sin(\ln(x - b)), \text{ oder wenn man } a = b = 0 \text{ setzt}$$

$$y = x \cdot \sin(\ln x) \text{ (für } x > 0 \text{ und ergänzt durch } y(0) = 0)$$

Zu der Funktion $y(x) = x \cdot \sin(\ln x)$ bemerkt Bolzano, daß der Wert zwar gegen $y = 0$ strebt, wenn $x(>0)$ gegen Null strebt, aber die Näherung ist in der Bolzanoschen Terminologie nicht stetig, weil der Unterschied $y(x) - y(0)$ in einer Umgebung von 0 unendlich oft sein Vorzeichen wechselt. Man könnte von einer stetigen Annäherung sprechen, wenn die Funktion monoton ist, d. h. mit wachsendem x wächst oder fällt. Jedenfalls ist Bolzano der Auffassung, daß bei dem Taylorschen Satz die Stetigkeit in der allgemeinen Bedeutung nicht genügt. Nebenbei sei bemerkt, daß die obige Funktion, definiert durch $y(x) = x \cdot \sin(\ln x)$ für $x > 0$ und $y(0) = 0$ für alle $x \geq 0$, stetig ist, für $x > 0$ differenzierbar, aber für $x = 0$ nicht.

Der Begriff der Stetigkeit beschäftigt Bolzano auch in den späteren Heften, z. B. in den Heften 16, 19–23, also bis in das Jahr 1834 hinein. In Heft 19 (MM 1674) kommt obige Funktion wieder vor, während in Heft 23 (MM 2015) folgende »merkwürdige Funktion der Lehre von der Stetigkeit« betrachtet wird: $y = x^2 \cdot \sin \ln x$ für $x > 0$ und $f(0) = 0$, eine Funktion, die nach der allgemeinen Definition stetig ist und für die $f'(0)$ existiert, aber $f''(0)$ nicht.

B. VAN ROOTSELAAR

¹³ Vergl. *Rein analytischer Beweis*, Vorrede II a, S. 11–12.

MISCELLANEA MATHEMATICA

Analysis. Uib[e]r d[en] B[e]griff e[ine]r Potenz. (d[en] 8 F[e]br.[uar] 1816.) |

B[e]k[a]nnntl[i]ch n[e]nnt m[an] d[ie] Größ[en], w[e]lche $a^3, a^{-3}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{2}{3}}, a^{\sqrt{2}}$,

... be-|zeichn[en], s[ü]ntl[i]ch Potenz[en] von a. W[a]s v[e]rst[eh]t m[an]
5 denn also hier [un]t[er] e[ine]r Pot[en]z? || Was hab[en] alle d[ie]se Größ[en]
G[e]m[ein]sch[a]ftl[i]ch[e]s?

10 Ich hätte Lust z[u] antwort[en]: ||

Wenn e[ine] Größe M aus ein[er] and[er]n a v[e]r[m]itt[e]lst e[ine]r dritt[en] m
auf e[ine] solche | Art (o[der] nach e[ine]r solch[en] R[e]g[e]l) h[er]g[e]leitet
w[ir]d, d[a]ß w[enn] d[ie] Größe N aus a v[e]r[m]itt[e]lst d[er] | n auf eb[en]
d[ie]s[e]lbe Art h[er]r[e]it[et] a r ist, d[ie] Größe M. N aus a v[e]r[m]itt[e]lst d[er] |
Größe m + n auf eb[en] d[ie]s[e]lbe Art sich h[er]leit[en] l[ä]ßt: so ne[un]t
m[an] m, n d[ie] Expo-|n[en]t[en] d[er] Gr[ö]ße a, u[nd] M, N d[ie] dies[en] Ex-
15 pon[en]t[en] z[u]g[e]hör[ig]e Potenz[en], d[ie] Gr[ö]ße a d[ie] W[ur]z[e]l. ||

Dieß ist, w[enn] ich [n]icht irre, d[er] eig[en]tl[iche] B[e]griff, d[en] m[an]
[m]it d[ie]s[en] Wort[en] nach d[e]m j[e]tz[t] h[er]r[sch]end[en] mathem[ati-]
t[ische]n Spr[ach]g[e]br[ä]uche v[e]rb[ir]det. M[an] v[e]rf[ie]h[et] n[ach] h[er]m
erst d[ar]a[uf], statt | $a \times a \times a \times a \times a$ d[er]gl[iche]n z[u] schr[e]ib[en] a^5 ,
d[er]gl[iche]n u[nd] na[un]te die a^3 e[ine] Pot[en]z v[on] a, | u[nd] 5 ihr[en]
Expo[nen]t[en]. M[an] b[e]m[er]kte hier[au]f, d[a]ß w[enn] solche Pot[en]-
z[en] d[er]s[elben] W[ur]z[e]l [m]it e[inan]d[er] z[u] [m]ult[ip]l[iz]ieren |
sey[en], ihre Exp[on]ent[en] [n]ur add[iert] z[u] w[e]rd[en] brauch[en]. Dieß

20 hätte z[u]r F[ol]ge, d[a]ß w[enn] e[ine] Pot[en]z, d[ur]ch || d[ie] and[er]e
div[idiert] w[e]rd[en] sollte, u[nd] d[er] Divis[or] e[ine] nied[er]g[e]re
P[ot]en]z war, als d[er] Div[ide]nd[us], m[an] d[ie] Exp[on]ent[en] | [n]ur
abz[u]zieh[en] br[ä]uchte, z. B. $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$. Z[u]w[e]il[e]n ereign[ete] sich
ab[er], d[a]ß d[er] | Exp[on]ent des Divis[ors] jenem des Divid[en]d[en]
gl[ei]ch o[der] noch gr[ö]ß[er] war: z. B. $\frac{a^3}{a^5}$, u[nd] m[an] b[e]m[er]kte, | d[a]ß sich
auch hier d[ie] Exp[on]ent[en] abzieh[en] liess[en], w[enn] m[an] a^{-2} in d[er]
B[e]d[eu]t[un]g nähme, d[a]ß es $\frac{1}{a^2}$ sey, | u[nd] d[a]ß hieb[er] d[ie] R[e]g[e]l
v[on] d[er] Add[ition] noch i[m]m[er]st[eh]en bl[ei]b[en] w[ür]de; n[ach] h[er]-
25 l[ich] $a^{-2} \times a^7 = a^5$ || u. s. w. Also entschloß m[an] sich, auch Ausd[ruc]ke v[on]
d[er] Form a^{-2} Pot[en]z[en] z[u] n[enne]n. |

U[nd] so gi[n]g m[an] i[n]m[er] w[e]it[er]. | M[an] na[un]te j[e]de Gr[ö]ße M |
e[ine] Pot[en]z, d[er] H[er]l[e]it[un]g aus a sich v[e]r[m]itt[e]lst e[ine]r
zweyt[en] Gr[ö]ße m (d[e]m Expo[nen]t[en] so | b[e]stimm[en] ließ, d[a]ß
w[enn] N e[ine] zweyte Gr[ö]ße war, d[ie] nach d[er]s[elben] Art aus a v[e]r-
30 [m]itt[e]lst || d[er] Gr[ö]ße n war h[er]g[e]leitet word[en], d[ie] Gr[ö]ße M. N