

Logik – was ist das eigentlich?



In diesem Kapitel ...

- ▶ Betrachten Sie unsere Welt von einem logischen Standpunkt aus
- ▶ Nutzen Sie die Logik, um gültige Argumente aufzubauen
- ▶ Wenden Sie die Gesetze des Denkens an
- ▶ Begreifen Sie den Zusammenhang zwischen Mathematik und Logik

Wir alle leben in einer unlogischen Welt. Wenn Sie daran zweifeln, dann schauen Sie sich doch einfach einmal die Abendnachrichten an. Oder hören Sie einmal dem Typen neben Ihnen an der Bar zu. Oder – noch besser – verbringen Sie das nächste Wochenende mit Ihren Schwiegereltern!

Wenn es so viele Menschen gibt, die unlogisch denken und handeln, warum sollten ausgerechnet Sie eine Ausnahme sein? Wäre es nicht vernünftiger, ebenso unlogisch wie die übrige Menschheit zu sein?

Nun gut, sich absichtlich unlogisch zu verhalten, ist wahrscheinlich nicht gerade die beste Idee. Denn wie kann es vernünftig sein, unlogisch zu sein? Und dass Sie dieses Buch in die Hand nehmen und lesen wollen, zeigt doch, dass Sie selbst wahrscheinlich nicht zu den Unlogischen in diesem Land zählen. Doch schauen wir den Tatsachen ins Auge – manche Leute entfalten sich eben erst im Chaos (oder behaupten es zumindest), andere dagegen nicht.

In diesem Kapitel werde ich Sie in die Grundlagen der Logik einführen und Ihnen zeigen, welche Bedeutung sie für Ihr Leben hat. Ich werde Ihnen etwas über die Vorstellungen erzählen, die der Schlüssel zur Logik sind. Und ich werde kurz die Verbindungen zwischen Logik und Mathematik streifen.

Wie man die Dinge logisch sieht

Bewusst oder unbewusst verstehen Sie schon eine ganze Menge von Logik. Tatsächlich besitzen Sie bereits einen eingebauten Logikdetektor. Sie glauben mir nicht? Dann machen Sie doch einfach einmal den folgenden Schnelltest, um zu sehen, ob Sie logisch sind:

F: Wie viele Pfannkuchen benötigt man, um das Dach einer Hundehütte zu bedecken?

A: 23, denn Bananen haben keine Knochen.

Wenn Ihnen die Antwort unlogisch vorkommt, dann ist das ein gutes Zeichen dafür, dass Sie auf dem besten Wege sind, logisch nachzudenken. Warum? Ganz einfach deshalb, weil Sie das Unlogische an dieser Antwort erkannt haben: Sie müssen schon ein richtiges Gespür dafür haben, was tatsächlich *logisch* ist.

In diesem Abschnitt beginne ich mit dem, was Sie über Logik bereits wissen (auch wenn Sie sich dessen noch nicht bewusst sind), und baue langsam eine Basis auf, die Ihnen bei Ihrem Logikstudium behilflich sein wird.

Wie man von der Frage zur Antwort kommt

Die meisten Kinder sind von Geburt an neugierig. Immer wollen sie wissen, *warum* etwas so ist, wie es ist. Und nach jedem *Weil*, das sie auf ihre Frage bekommen, halten sie ein neues *Warum* parat. Schauen Sie sich beispielsweise die folgenden alltäglichen Kinderfragen an:

Warum geht die Sonne morgens auf?

Warum muss ich zur Schule gehen?

Warum startet der Automotor, wenn du den Schlüssel drehst?

Warum brechen Menschen die Gesetze, wenn sie genau wissen, dass sie dafür ins Gefängnis kommen?

Wenn Sie einmal darüber nachdenken, dann haben wir es hier doch mit einem großen Geheimnis zu tun: Weshalb sieht es so aus, als hätte die Welt einen Sinn, auch dann, wenn sie keinen hat?

Kinder spüren schon in ganz jungen Jahren, dass es, selbst wenn sie etwas nicht verstehen, dennoch irgendwie eine Antwort darauf geben muss. Und sie denken: »Wenn ich mit meiner Frage hier bin und die Antwort ist irgendwo anders: Was muss ich tun, um dorthin zu gelangen?« (Häufig besteht ihre Antwort dann darin, ihre Eltern mit weiteren Fragen zu nerven.)



Von hier nach dort zu gelangen – vom Nichtwissen zum Verstehen – ist einer der Hauptgründe dafür, warum es überhaupt so etwas wie Logik gibt. Die Logik erwuchs aus einem angeborenen menschlichen Bedürfnis, der Welt einen Sinn zu verleihen und so viel Kontrolle wie nur möglich über sie zu gewinnen.

Was Ursache und Wirkung miteinander zu tun haben

Eine Möglichkeit, die Welt zu begreifen, ist, die Verbindung zwischen Ursache und Wirkung zu erkennen.

Wenn man vom Kind zum Erwachsenen wird, beginnt man darüber nachzudenken und sich zusammenzupuzzeln, wie ein Ereignis das jeweils nächste verursacht. Normalerweise können diese Beziehungen zwischen Ursache und Wirkung in einer *Wenn-Aussage*, einem sogenannten *Konditional* zum Ausdruck gebracht werden. Schauen Sie sich einmal die folgenden Konditionalaussagen an:

Wenn ich meinen Lieblingsball unter das Sofa rollen lasse, *dann* kann ich ihn nicht mehr erreichen.

Wenn ich alle meine Hausarbeiten erledige, bevor Papa nach Hause kommt, *dann* wird er noch vor dem Abendessen Fangen mit mir spielen.

Wenn ich in diesem Sommer ausreichend trainiere, dann wird mich der Trainer im Herbst in die Fußballmannschaft aufnehmen.

Wenn ich sie immer ganz lieb darum bitte, mit mir auszugehen, dann wird sie schließlich doch irgendwann Ja sagen.

Ein Verständnis für die Funktion von Wenn-Aussagen zu entwickeln ist ein wichtiger Aspekt der Logik.

Wie man Wenn-Aussagen zerlegt



Jedes Konditional besteht aus zwei kleineren Aussagen, die man als *Teilaussagen* bezeichnet: Das *Antezedens*, das auf das Wort *wenn* folgt, und das *Konsequens*, das sich dem Wort *dann* anschließt. Betrachten wir die folgende Wenn-Aussage:

Wenn es 17 Uhr ist, dann ist es Zeit, nach Hause zu gehen.

Bei dieser Aussage ist das Antezedens die Teilaussage:

Es ist 17 Uhr.

Das Konsequens ist die Teilaussage:

Es ist Zeit, nach Hause zu gehen.

Beachten Sie, dass beide Teilaussagen als vollständige Aussagen ganz für sich alleine stehen.

Wie man Wenn-Aussagen aneinanderreicht

In vielen Fällen wird das Konsequens einer Wenn-Aussage zum Antezedens eines weiteren Konditionals. Wenn dies geschieht, dann haben wir es mit einer Reihe von Folgen beziehungsweise Konsequenzen zu tun, die von den Griechen als *sorites* bezeichnet wurde (bitte lassen Sie sich nicht verwirren, das Wort »die Konsequenz« geht auf das lateinische Substantiv *consequentia* zurück und wird auf der letzten Silbe betont; das Wort »das Konsequens« geht hingegen auf auf das Partizip Präsens des lateinischen Verbs *consequi* zurück und wird auf der zweiten Silbe betont; entsprechend ist auch »das Antezedens« – Betonung auf der 3. Silbe – aus dem Partizip Präsens des lateinischen Verbs *antecedere* hergeleitet). Zum Beispiel:

Wenn es 17 Uhr ist, dann ist es Zeit, nach Hause zu gehen.



Wenn es Zeit ist, nach Hause zu gehen, dann ist es fast schon Zeit zum Abendessen.



Wenn es fast Zeit zum Abendessen ist, dann muss ich meinen Mann anrufen, damit er einen Tisch im Restaurant bestellen kann.

Im vorliegenden Fall können Sie diese Konditionalaussagen miteinander verbinden, um daraus eine neue Wenn-Aussage zu formulieren:

Wenn es 17 Uhr ist, dann muss ich meinen Mann anrufen, damit er einen Tisch im Restaurant bestellen kann.

Langsam wird es interessant

Mit zunehmender Lebenserfahrung meinen Sie vielleicht, dass der Bezug zwischen Ursache und Wirkung immer anspruchsvoller wird:

Wenn ich meinen Lieblingsball unter das Sofa rollen lasse, *dann* kann ich ihn nicht mehr erreichen, *es sei denn*, ich schreie so laut, dass Oma ihn für mich holt, *doch wenn* ich das öfter als einmal tue, *dann* wird sie böse und holt den Ball nicht mehr für mich.

Wenn ich in diesem Sommer alleine trainiere, *aber* dennoch nicht so hart, dass ich mir dabei die Knie verletze, *dann* wird mich der Trainer im Herbst *nur dann* in die Fußballmannschaft aufnehmen, *wenn* noch eine Position unbesetzt ist, *doch wenn* ich überhaupt nicht trainiere, *dann* wird mich der Trainer in keinem Fall aufnehmen.

Alles und noch mehr

Sobald man immer mehr von der Welt begreift, fängt man auch damit an, allgemeine Aussagen über sie zu treffen. Beispielsweise:

Alle Pferde sind lieb.

Alle Jungen sind blöd.

Jeder Lehrer auf dieser Schule ist hinter mir her.

Jedes Mal, wenn das Telefon klingelt, ist es für meine Schwester.



Durch Wörter wie *alle* und *jeder* können wir Dinge in *Gruppen* (Gruppen von Gegenständen) und *Untergruppen* kategorisieren. Wenn man zum Beispiel sagt: »Alle Pferde sind lieb«, so meint man damit, dass die Gruppe aller Pferde *enthalten* ist *in* der Gruppe aller lieben Dinge.

Sein oder Nichtsein

Außerdem entdeckt man die Welt, indem man herausfindet, was *existiert* und was *nicht existiert*. Beispielsweise:

Einige meiner Lehrer sind attraktiv.

Es gibt in der Schule mindestens ein Mädchen, das mich mag.

Niemand im Schachclub kann mich schlagen.

Es gibt keine Marsmännchen.



Wörter und Ausdrücke wie *einige*, *es gibt* und *es existiert* zeigen eine Überschneidung von Gruppen an, was in Form einer *Schnittmenge* dargestellt werden kann. Wenn man etwa sagt: »Einige meiner Lehrer sind attraktiv«, dann meint man damit, dass dies eine Schnittmenge zwischen der Gruppe seiner Lehrer und der Gruppe der attraktiven Dinge ist.



Ebenso zeigen Wörter und Ausdrücke wie *keine*, *es gibt nicht* und *niemand*, dass es sich nicht um Überschneidungen von Gruppen handelt. Wenn Sie beispielsweise sagen: »Niemand im Schachclub kann mich schlagen«, dann meinen Sie damit, dass es keine Schnittmenge zwischen der Gruppe aller Schachclubmitglieder und der Gruppe aller Schachspieler gibt, die Sie schlagen können.

Wichtige Wörter in der Logik

Wie man sieht, zeigen bestimmte Wörter eine ganze Menge an, wenn man damit anfängt, logische Verbindungen zu knüpfen. Einige dieser allgemein gebräuchlichen Wörter sind:

wenn ... dann	und	aber	oder
nicht	es sei denn	obwohl	jeder
alle	jeder Einzelne	es gibt	einige
es existiert	es gibt nicht	manche	niemand

Eine wichtige Aufgabe der Logik ist es nun, diese Wörter einmal etwas näher zu betrachten, denn dabei erkennt man, wie wir durch diese Wörter die Welt auf unterschiedliche Weise einteilen (und sie damit besser verstehen) können.

Wie man Argumente konstruiert

Wenn die Leute sagen: »Gehen wir das Ganze doch einmal logisch an«, sobald sie eine bestimmte Situation oder ein Problem analysieren und erörtern wollen, dann meinen sie normalerweise damit: »Gehen wir das Ganze doch Schritt für Schritt durch.«

1. Finden wir heraus, was die Tatsachen sind.
2. Denken wir einige Zeit darüber nach.
3. Überlegen wir uns die optimale Vorgehensweise.



Logisch ausgedrückt bedeutet dieser dreistufige Prozess die Konstruktion eines *Arguments*. Ein Argument enthält eine Gruppe von Prämissen zu Beginn und eine Konklusion am Schluss. In vielen Fällen werden die Prämissen und die Konklusion durch eine Reihe von Zwischenschritten miteinander verknüpft sein. In den folgenden Abschnitten werde ich diese in der Reihenfolge behandeln, in der sie Ihnen wahrscheinlich begegnen werden.

Wie man Prämissen aufstellt

Prämissen sind die Fakten des betreffenden Sachverhalts: jene Aussagen, von denen man weiß (oder zumindest fest daran glaubt), dass sie wahr sind. In vielen Situationen ist es ein wichtiger erster Schritt bei der Lösung eines Problems, wenn man zunächst eine Reihe von Prämissen aufschreibt.

Nehmen wir einmal an, Sie gehören der Schulbehörde an und müssen nun entscheiden, ob dem Bau einer neuen Schule, die im September eröffnen soll, zugestimmt werden kann. Alle Beteiligten sind sehr aufgeregt wegen des Bauprojekts, doch Sie selbst tätigen einige Telefonanrufe und sammeln die Fakten – die Prämissen – zusammen.

Prämissen:

Die nötigen finanziellen Mittel werden erst ab März bereitstehen.

Die Baugesellschaft wird erst dann mit der Arbeit beginnen, wenn sie das Geld bekommt.

Das gesamte Vorhaben wird mindestens acht Monate in Anspruch nehmen.

Bis jetzt haben wir nur eine Reihe von Prämissen. Doch wenn wir sie zusammensetzen, dann nähern wir uns dem Endergebnis – unserem Argument. Im nächsten Abschnitt zeige ich Ihnen, wie Sie die Prämissen miteinander kombinieren können.

Wie man mit Zwischenschritten zur Antwort gelangt

Manchmal ist ein Argument nur eine Reihe von Prämissen, denen eine Konklusion folgt. In vielen Fällen jedoch enthält ein Argument auch noch *Zwischenschritte*, die anzeigen, wie die Prämissen stufenweise zu dieser Konklusion führen.

Auf das Schulbaubeispiel aus dem vorgehenden Abschnitt angewandt, könnte man den Sachverhalt folgendermaßen näher erklären:

Unseren Prämissen folgend, werden wir das Bauvorhaben nicht vor März bezahlen können, sodass die Arbeiten erst acht Monate später, das heißt im November, beendet sein werden. Doch der Schulbeginn liegt bereits im September. Deshalb ...

Das Wort *deshalb* weist auf einen Schluss, auf eine Konklusion, hin und ist somit der Anfang des letzten Schrittes, den ich im nächsten Abschnitt behandeln werde.

Wie man eine Konklusion formuliert

Die *Konklusion* ist das Ergebnis unseres Arguments. Wenn wir die Zwischenschritte in einem klaren, fortschreitenden Prozess aufgeschrieben haben, dann sollte die Konklusion recht deutlich vor uns liegen. Für das besagte Schulbaubeispiel sieht das dann so aus:

Konklusion:

Das Gebäude wird zu Schulbeginn noch nicht fertig sein.

Wenn die Konklusion nicht einleuchtend ist oder keinen Sinn ergibt, dann kann etwas mit Ihrem Argument nicht stimmen. In manchen Fällen kann es sein, dass das Argument nicht gültig ist. In anderen Fällen haben Sie vielleicht Prämissen ausgelassen, die Sie noch unbedingt hinzufügen müssen.

Wie man entscheidet, ob das Argument gültig ist

Nachdem wir ein Argument erstellt haben, müssen wir entscheiden können, ob es *gültig* ist, das heißt, ob es ein gutes Argument ist.



Um ein Argument auf seine Gültigkeit hin zu überprüfen, geht man davon aus, dass alle seiner Prämissen wahr sind. Dann schaut man, ob die Konklusion automatisch aus ihnen folgt. Wenn dies der Fall ist, dann weiß man, dass es ein gültiges Argument ist. Wenn nicht, so ist das Argument *ungültig*.

Was sind Enthymeme?

Das Argument für unser Schulbaubeispiel mag gültig erscheinen, aber vielleicht haben Sie ja doch noch einige Zweifel. Wenn sich etwa eine weitere Geldquelle auftut, dann kann die Bau-gesellschaft früher mit ihren Arbeiten beginnen und bis September eventuell fertig werden. Daher gibt es doch noch eine verborgene Prämisse, die als *Enthymem* bezeichnet wird:

Für dieses Bauvorhaben gibt es keine anderen Finanzquellen.



Argumente zu real existierenden Situationen haben (im Gegensatz zu mathematischen oder naturwissenschaftlichen Argumenten) fast immer Enthymeme. Je mehr Sie sich daher der versteckten Enthymeme eines Arguments bewusst werden, desto bessere Chancen haben Sie, sicherzustellen, dass Ihr Argument gültig ist.

Unentdeckte, verborgene Prämissen bei Realargumenten haben eher etwas mit der *Rhetorik* zu tun, wobei es dort darum geht, triftige und überzeugende Argumente zu formulieren. In Kapitel 3 werde ich kurz auf Rhetorik sowie weitere Details der Struktur von Argumenten eingehen.

Logische Schlüsse: leicht gemacht durch Denkgesetze

Um die Logik von Grund auf zu verstehen, entwarf der Philosoph Bertrand Russell drei Denkgesetze. Diese Gesetze basieren alle auf Vorstellungen, die bis auf Aristoteles zurückgehen, der vor mehr als 2300 Jahren die klassische Logik begründete. (Siehe Kapitel 2 für weitere Informationen zur Geschichte der Logik.)

Alle drei Gesetze sind wirklich fundamental und leicht zu verstehen. Doch das Wichtigste daran ist, dass es mithilfe aller dieser drei Sätze möglich wird, auch dann logische Schlüsse über Aussagen zu ziehen, wenn man nicht mit den Realbedingungen vertraut ist, mit denen sie sich befassen.

Der Satz der Identität



Der Satz *der Identität* oder auch *das Identitätsprinzip* besagt, dass jedes Einzel-
ding identisch mit sich selbst ist.

Zum Beispiel:

Johnny Cash ist Johnny Cash.

Meine Katze Miezi ist meine Katze Miezi.

Das Brandenburger Tor ist das Brandenburger Tor.

Auch ohne irgendeine Information über die Welt zu haben, kann man alleine aus der Logik heraus erkennen, dass alle diese Aussagen wahr sind. Der *Satz der Identität* sagt uns, dass jede Aussage der Form »X ist X« wahr sein muss. Anders ausgedrückt: Jeder Gegenstand, den es im Universum gibt, stimmt mit sich selbst überein. In Kapitel 19 erfahren Sie, wie dieses Gesetz explizit auf die Logik angewandt wird.

Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten



Der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* besagt, dass jede Aussage entweder
wahr oder falsch ist.

Betrachten wir einmal die beiden folgenden Aussagen:

Mein Name ist Mark.

Mein Name ist Algernon.

Auch hierbei erkennt man logisch, ohne irgendetwas über die Welt zu wissen, dass jede einzelne dieser Aussagen entweder wahr oder falsch ist. Beim *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* gibt es keine dritte Möglichkeit – oder, anders ausgedrückt: Aussagen können nicht nur teilweise wahr oder falsch sein. Sondern jede Aussage in der Logik ist entweder vollkommen wahr oder vollkommen falsch.

Es trifft sich gut, dass die erste Aussage wahr ist, und ich bin erleichtert, dass die zweite falsch ist.

Das Gesetz der Nichtwidersprüchlichkeit



Das *Gesetz der Nichtwidersprüchlichkeit* besagt, dass bei einer gegebenen Aus-
sage und ihrem Gegenteil, die eine wahr und die andere falsch ist.

Zum Beispiel:

Mein Name ist Algernon.

Mein Name ist nicht Algernon.

Auch wenn Sie meinen Namen gar nicht kennen, so können Sie sich doch alleine von der Logik her sicher sein, dass eine dieser Aussagen wahr und die andere falsch sein muss. Oder anders ausgedrückt: Aufgrund des Gesetzes von der Nichtwidersprüchlichkeit kann mein Name nicht sowohl Algernon als auch *nicht* Algernon sein.

Wie man Logik und Mathematik miteinander kombiniert

An vielen Stellen in diesem Buch beweise ich die Gültigkeit meiner Argumente mit Beispielen aus der Mathematik. (Keine Angst – Schwierigeres als das, was Sie in der 5. Klasse gelernt haben oder sogar noch früher, kommt hier nicht vor.) Mathematik und Logik passen toll zusammen, was ich Ihnen in den nächsten Abschnitten erklären werde.

Die Mathematik hilft, die Logik zu verstehen

Wenn ich in diesem Buch versuche, Ihnen die Logik näherzubringen, brauche ich manchmal Beispiele, die eindeutig wahr oder falsch sind, um meine Argumente zu beweisen. Und dabei stellt es sich nun einmal heraus, dass sich mathematische Beispiele für diesen Zweck ganz hervorragend eignen, weil eine Aussage in der Mathematik stets entweder wahr oder falsch ist, es gibt keine Grauzone dazwischen.

Andererseits können beliebige Gegebenheiten des Alltagslebens eher subjektiv oder sogar ein Streitobjekt sein. Betrachten wir doch einmal die folgenden Aussagen:

Elvis war ein großartiger Musiker.

Robinson Crusoe ist ein miserables Buch.

Die meisten Menschen würden in diesem Fall wahrscheinlich zustimmen, dass die erste Aussage wahr ist und die zweite falsch, dennoch kann man über beide durchaus diskutieren. Doch sehen Sie sich jetzt folgende Aussagen an:

Die Zahl 7 ist kleiner als die Zahl 8.

Fünf ist eine gerade Zahl.

Hierbei gibt es natürlich keinerlei Diskussion darüber, dass die erste Aussage wahr und die zweite falsch ist.

Die Logik hilft, die Mathematik zu verstehen

Wie wir eben sahen, beruhen die Denkgesetze, auf denen die Logik basiert – wie der Satz vom ausgeschlossenen Dritten – auf einem Schwarz-Weiß-Denken. Und, natürlich, nichts ist wohl schwärzer und weißer als die Mathematik. Auch wenn es vielleicht Bereiche geben mag, die mehr Spaß machen – wie Geschichte, Literatur, Politik oder Kunst –, so ist man in diesen Bereichen häufiger mit Grauzonen konfrontiert als in der Mathematik.

Die Mathematik baut auf der Logik auf, so wie ein Haus auf einem Fundament errichtet ist. Wenn Sie sich für die Beziehung zwischen Mathematik und Logik interessieren, dann lesen Sie Kapitel 22, das sich darauf konzentriert, wie die Mathematik mit klaren Fakten beginnt, die man als *Axiome* bezeichnet, und sich dann der Logik bedient, um interessante und komplexe Konklusionen zu formulieren, die als *Theoreme* bezeichnet werden.