



Mathematik für die Fachhochschulreife

Gesamtausgabe

Bearbeitet von Mathematiklehrern und Ingenieuren an beruflichen Schulen
(Siehe nächste Seite)

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 85269 mit Beilage GTR
Europa-Nr.: 85085 ohne Beilage GTR

Autoren des Buches „Mathematik für die Fachhochschulreife Gesamtausgabe“

Josef Dillinger	München
Bernhard Grimm	Sindelfingen, Leonberg
Frank-Michael Gumpert	Stuttgart
Gerhard Mack	Stuttgart
Thomas Müller	Ulm
Bernd Schiemann	Durbach

Lektorat: Bernd Schiemann

Bildentwürfe: Die Autoren

Bildbearbeitung: Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel GmbH & Co. KG, Ostfildern

1. Auflage 2014

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN: 978-3-8085-8526-9 mit Beilage GTR
ISBN: 978-3-8085-8508-5 ohne Beilage GTR

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2014 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Umschlaggestaltung: Idee Bernd Schiemann, Ulm; Ausführung: Andreas Sonnhüter, 40625 Düsseldorf

Satz: TextDesign GreenOrange, 73252 Lenningen, www.textdesign-go.de

Druck: M. P. Media-Print Informationstechnologie GmbH, 33100 Paderborn

Vorwort zur 1. Auflage

Das vorliegende Buch für den Mathematikunterricht in Berufskollegs, Fachoberschulen, und Berufsfachschulen baut auf dem bewährten Konzept der Fachreihe Mathematik für die Fachhochschulreife des Verlags Europa-Lehrmittel auf.

Entsprechend den Vorgaben der Bildungspläne wird großer Wert auf die Selbstorganisation des Lernprozesses, d. h. auf immer größer werdende Eigenständigkeit und Eigenverantwortung der Schülerinnen und Schüler im Erwerb von Wissen und Können gelegt. Aus diesem Grund sind mathematische Zusammenhänge möglichst verständlich und schülernah formuliert. Die mathematischen Inhalte sind auf die besonderen Anforderungen der Bildungsgänge, die zur Fachhochschulreife führen, abgestimmt und werden schülergerecht vorwiegend anwendungsbezogen an praktischen Beispielen eingeführt und behandelt.

Zur Förderung des Interesses an der Mathematik sowie handlungsorientierter Themenbearbeitung enthält das Buch eine große Anzahl von Beispielen mit graphischen Darstellungen, anhand derer eine Vielzahl von Aufgaben zu lösen sind. Dabei sind die Aufgaben für selbstorganisiertes Lernen in Partner- oder Gruppenarbeit ausgelegt und deren Ergebnisse sind auf der selben Buchseite angegeben, um eine eigenständige Lernerfolgskontrolle zu ermöglichen.

Ein didaktisch aufbereiteter Lösungsband mit ausführlichen Schritten zur Lösung sowie die Formelsammlung „Formeln zu Mathematik für die Fachhochschulreife“ ergänzen das Buch. Das Buch enthält in einer Variante eine Einführung in den grafikfähigen Taschenrechner (GTR).

Zum Ausgleich unterschiedlicher Vorkenntnisse, aber auch zum intensiven Wiederholen, beginnt das Buch mit den Kapiteln Algebraische und Geometrische Grundlagen.

Die Hauptabschnitte des Buches sind

- **Algebraische Grundlagen**
- **Geometrische Grundlagen**
- **Analysis**
- **Differenzialrechnung**
- **Integralrechnung**
- **Komplexe Rechnung**
- **Vektorrechnung**
- **Stochastik**
- **Matrizen**
- **Prüfungsaufgaben**
 - **Musteraufgaben**
 - **Testen Sie Ihr Wissen zur Prüfung!**
- **Anwendungsbezogene Aufgaben**

Über Vorschläge, die zu einer Verbesserung des Buches führen, freuen sich Verlag und Autoren.

**Mathematik für die Fachhochschulreife
im Überblick**

Algebraische Grundlagen

Seite 11

Geometrische Grundlagen

Seite 53

Analysis

Seite 73

Differenzialrechnung

Seite 121

Integralrechnung

Seite 179

Komplexe Rechnung

Seite 221

Vektorrechnung

Seite 227

Stochastik

Seite 297

Matrizenrechnung

Seite 355

Prüfungsaufgaben

Seite 391

Anwendungsbezogene Aufgaben

Seite 411

Inhaltsverzeichnis

Übersicht mit Mindmap	8	2.3.1	Körper gleicher Querschnittsfläche	57
Zitate berühmter Wissenschaftler.....	9	2.3.2	Spitze Körper	58
Übersicht zu Kapitel 1.....	10	2.3.3	Abgestumpfte Körper.....	59
1 Algebraische Grundlagen		2.3.4	Kugelförmige Körper.....	60
1.1 Einführung	11	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	61
1.2 Zahlen.....	12	2.4	Trigonometrische Beziehungen.....	64
1.3 Terme und Gleichungen.....	13	2.4.1	Ähnliche Dreiecke.....	64
1.4 Definitionsmenge.....	13	2.4.2	Rechtwinklige Dreiecke	64
Ü	14	2.4.3	Einheitskreis.....	65
1.5 Potenzen.....	16	2.4.4	Sinussatz und Kosinussatz	66
1.5.1 Potenzbegriff.....	16	2.4.5	Winkelberechnung	67
1.5.2 Potenzgesetze	16	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	68
1.6 Wurzelgesetze.....	18	2.4.6	Goniometrische Gleichungen.....	71
1.6.1 Wurzelbegriff	18	Übersicht zu Kapitel 3.....		72
1.6.2 Rechengesetze beim Wurzelrechnen.....	18	3 Analysis		
1.6.3 Wurzelziehen mit dem Heron-Verfahren	19	3.1	Potenzfunktionen.....	73
Ü	20	3.2	Wurzelfunktionen	74
1.7 Logarithmengesetze.....	22	3.2.1	Allgemeine Wurzelfunktionen	74
1.7.1 Logarithmusbegriff.....	22	3.2.2	Arten von quadratischen Wurzelfunktionen	75
1.7.2 Rechengesetze beim Logarithmus	22	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	76
1.7.3 Basisumrechnung beim Logarithmus	23	3.3	Ganzrationale Funktionen höheren Grades	77
Ü	24	3.3.1	Funktion dritten Grades	77
1.8 Funktionen und Gleichungssysteme	26	3.3.2	Funktion vierten Grades.....	78
1.8.1 Rechtwinkliges Koordinatensystem.....	26	3.3.3	Nullstellenberechnung.....	78
1.8.2 Relationen und Funktionen.....	27	3.3.3.1	Nullstellenberechnung bei biquadratischen Funktionen	78
1.8.3 Lineare Funktionen.....	28	3.3.3.2	Nullstellenberechnung mit dem Nullprodukt	79
1.8.3.1 Ursprungsgeraden	28	3.3.3.3	Nullstellenberechnung durch Abspalten von Linearfaktoren	80
Ü	29	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	82
1.8.3.2 Allgemeine Gerade	30	3.3.4	Arten von Nullstellen	84
Ü	31	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	85
1.8.4 Lineare Gleichungssysteme LGS	33	3.3.5	Numerische Methoden	87
1.8.4.1 Lösungsverfahren für LGS	33	3.4	Eigenschaften von Funktionen	89
1.8.4.2 Lösung eines LGS mit einer Matrix	34	3.4.1	Symmetrie bei Funktionen	89
1.8.4.3 Über- und unterbestimmte LGS.....	35	3.4.2	Umkehrfunktionen	90
1.8.4.4 LGS mit Parameter	35	3.4.3	Monotonie und Umkehrbarkeit.....	92
1.8.4.5 Sarrus-Regel	36	3.4.4	Stetigkeit von Funktionen	94
1.8.4.6 Grafische Lösung eines LGS	37	3.4.5	Sätze zur Stetigkeit von Funktionen.....	95
Ü	38	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	96
1.8.5 Betragsfunktion	42	3.5	Gebrochenrationale Funktionen.....	98
1.8.6 Ungleichungen	43	3.5.1	Definitionsmenge	98
Ü	44	3.5.2	Polstellen.....	98
1.8.7 Quadratische Funktionen.....	45	3.5.3	Definitionslücke	98
1.8.7.1 Parabeln mit Scheitel im Ursprung.....	45	3.5.4	Grenzwerte.....	99
1.8.7.2 Verschieben von Parabeln	46	3.5.5	Grenzwertsätze	99
1.8.7.3 Normalform und Nullstellen von Parabeln	47	3.5.6	Asymptoten	101
1.8.7.4 Zusammenfassung der Lösungsarten	48	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	102
Ü	49	3.6	Exponentialfunktion	105
Übersicht zu Kapitel 2.....	52	3.7	e-Funktion	106
2 Geometrische Grundlagen		Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	107
2.1 Flächeninhalt geradlinig begrenzter Flächen	53	3.8	Exponentialfunktion und ihre Umkehrfunktion	109
2.2 Flächeninhalt kreisförmig begrenzter Flächen.....	54	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	111
Ü	55	3.10	Trigonometrische Funktionen.....	113
2.3 Volumenberechnungen.....	57	3.10.1	Sinusfunktion und Kosinusfunktion	113

3.10.2	Tangensfunktion und Kotangensfunktion	114
3.10.3	Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen	114
3.10.4	Allgemeine Sinusfunktion und Kosinusfunktion	115
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	117
	Berühmte Mathematiker 1	119

Übersicht zu Kapitel 4	120
------------------------------	-----

4 Differenzialrechnung

4.1	Erste Ableitung $f'(x)$	121
4.2	Differenzialquotient	122
4.3	Änderungsraten	124
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	125
4.4	Ableitungsregeln	126
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	128
4.5	Kurvendiskussion	130
4.5.1	Differenzierbarkeit von Funktionen	130
4.5.2	Regel von de l'Hospital	131
4.6	Höhere Ableitungen	132
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	134
4.7	Extremwerte und Wendepunkte	136
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	138
4.8	Extremwerte und Wendepunkte für die Sinusfunktion und e-Funktion	140
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	141
4.9	Tangenten und Normalen	142
4.9.1	Tangenten und Normalen in einem Kurvenpunkt	142
4.9.2	Tangenten parallel zu einer Geraden	143
4.9.3	Anlegen von Tangenten an K_f von einem beliebigen Punkt aus	143
4.9.4	Zusammenfassung Tangentenberechnung	144
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	145
4.10	Newton'sches Näherungsverfahren (Tangentenverfahren)	147
4.11	Grafische Differenziation	149
4.11.1	Von der Funktion zur Ableitungsfunktion	149
4.11.2	Von der Ableitungsfunktion zur Funktion	149
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	150
4.12	Extremwertberechnungen	152
4.12.1	Relatives Maximum	152
4.12.2	Relatives Minimum	153
4.12.3	Extremwertberechnung mit einer Hilfsvariablen	154
4.12.4	Randextremwerte	155
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	157
4.12.5	Relative Extremwerte bei gebrochenrationalen Funktionen	160
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	162
4.12.6	Einparametrische Funktionenschar	165
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	168
4.13	Ermittlung von Funktionsgleichungen	169
4.13.1	Gleichungsermittlung bei ganzrationalen Funktionen	169
4.13.2	Ganzrationale Funktion mit Symmetrieeigenschaft	172
4.13.3	Exponentialfunktion	173
4.13.4	Sinusförmige Funktion	174
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	175
4.13.5	Vom Schaubild zum Funktionsterm	176
	Berühmte Mathematiker 2	177

Übersicht zu Kapitel 5	178
------------------------------	-----

5 Integralrechnung

5.1	Einführung in die Integralrechnung	179
5.1.1	Beispiele zur Anwendung	179
5.1.2	Aufsuchen von Flächeninhaltsfunktionen	180
5.1.3	Stammfunktionen	181
5.2	Integrationsregeln	182
5.2.1	Potenzfunktionen	182
5.2.2	Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen	182
5.3	Das bestimmte Integral	183
5.3.1	Geradlinig begrenzte Fläche	183
5.3.2	„Krummlinig“ begrenzte Fläche	184
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	185
5.4	Berechnung von Flächeninhalten	187
5.4.1	Integralwert und Flächeninhalt	187
5.4.2	Flächen für Schaubilder mit Nullstellen	188
5.4.3	Musteraufgabe zur Flächenberechnung	189
5.4.4	Regeln zur Vereinfachung bei Flächen	190
5.4.5	Integrieren mit variabler Grenze	192
5.4.6	Vermischte Aufgaben zur Flächenberechnung	193
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	194
5.5	Flächenberechnung zwischen Schaubildern	196
5.5.1	Flächenberechnung im Intervall	196
5.5.2	Flächen zwischen zwei Schaubildern	196
5.5.3	Flächenberechnung mit der Differenzfunktion	198
5.5.4	Musteraufgabe zu gelifteten Schaubildern	199
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	200
5.5.5	Integration gebrochenrationaler Funktionen	202
5.6	Numerische Integration	203
5.6.1	Streifenmethode mit Rechtecken	203
5.6.2	Flächenberechnung mit Trapezen	204
5.6.3	Flächenberechnung mit Näherungsverfahren	206
5.7	Volumenberechnung	207
5.7.1	Rotation um die x-Achse	207
5.7.2	Rotation um die y-Achse	211
5.7.3	Zusammenfassung von Rotationskörperarten	214
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	215
5.8	Anwendungen der Integralrechnung	218
5.8.1	Zeitintegral der Geschwindigkeit	218
5.8.2	Mechanische Arbeit W	218
5.8.3	Schüttung von Flüssigkeiten	219
5.8.4	Mittelwertsberechnungen	219

Übersicht zu Kapitel 6	220
------------------------------	-----

6 Komplexe Rechnung

6.1	Darstellung komplexer Zahlen	221
6.2	Grundrechenarten mit komplexen Zahlen	223
6.3	Rechnen mit konjugiert komplexen Zahlen	223
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	224

Übersicht zu Kapitel 7	226
------------------------------	-----

7 Vektorrechnung

7.1	Der Vektorbegriff	227
7.2	Darstellung von Vektoren im Raum	228
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	230

7.3	Verknüpfungen von Vektoren	231	Übersicht zu Kapitel 8.....	296	
7.3.1	Vektoraddition	231	8 Stochastik		
7.3.2	Verbindungsvektor, Vektorsubtraktion.....	232	8.1	Anwendungen der Stochastik	297
7.3.3	Skalare Multiplikation, S-Multiplikation	233	8.2	Zufallsexperiment	298
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	234	8.2.1	Einstufige Zufallsexperimente	298
7.3.4	Einheitsvektor	235	8.2.2	Mehrstufige Zufallsexperimente.....	299
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	236	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	300
7.3.5	Teilen von Strecken	239	8.3	Ereignisse.....	302
7.3.5.1	Strecke, Mittelpunkt	239	8.3.1	Ereignisarten.....	302
7.3.5.2	Teilen einer Strecke im Verhältnis $m:n$	240	8.3.2	Logische Verknüpfung von Ereignissen.....	303
7.3.5.3	Teilen einer Strecke nach m Längeneinheiten	240	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	304
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	241	8.4	Häufigkeit und statistische Wahrscheinlichkeit	306
7.3.6	Skalarprodukt	242	8.4.1	Häufigkeiten.....	306
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	244	8.4.2	Statistische Wahrscheinlichkeit	307
7.4	Lineare Abhängigkeit von Vektoren	246	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	308
7.4.1	Zwei Vektoren im Raum	246	8.5	Klassische Wahrscheinlichkeit	309
7.4.2	Drei Vektoren im Raum	247	8.5.1	Wahrscheinlichkeit von verknüpften Elementarereignissen.....	310
7.4.3	Vier Vektoren im Raum	248	8.5.2	Wahrscheinlichkeit von verknüpften Ereignissen	311
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	249	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	312
7.4.4	Basisvektoren	250	8.5.3	Baumdiagramm.....	314
7.4.4.1	Eigenschaften von linear unabhängigen Vektoren	250	8.5.4	Pfadregeln bei mehrstufigen Zufallsexperimenten	315
7.4.4.2	Koordinatendarstellung von Vektoren	251	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	317
7.5	Orthogonale Projektion.....	252	8.6	Bedingte Wahrscheinlichkeit.....	319
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	253	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	320
7.6	Lotvektoren	254	8.6.1	Unabhängige und abhängige Ereignisse.....	321
7.6.1	Lotvektoren zu einem einzelnen Vektor	254	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	322
7.6.2	Lotvektoren einer Ebene.....	255	8.6.2	Zusammenhang zwischen Baumdiagramm und der Vierfeldertafel	323
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	256	8.6.3	Inverses Baumdiagramm	324
7.7	Vektorprodukt	257	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	325
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	260	8.7	Wahrscheinlichkeitsberechnung mit Gesetzen der Kombinatorik.....	326
7.8	Vektorgleichung einer Geraden im Raum	262	8.7.1	Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen	326
7.9	Orthogonale Projektion von Punkten und Geraden auf eine Koordinatenebene.....	265	8.7.2	Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen	327
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	267	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	329
7.10	Gegenseitige Lage von Geraden.....	270	8.7.3	Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen	330
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	275	8.7.4	Ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen	331
7.11	Abstandsberechnungen.....	277	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	332
7.11.1	Abstand Punkt-Gerade und Lotfußpunkt.....	277	8.7.5	Zusammenfassung Stichproben	333
7.11.2	Kürzester Abstand zweier windschiefer Geraden	279	8.8	Durchschnitt und Erwartungswert.....	334
7.11.3	Abstand zwischen parallelen Geraden	280	8.8.1	Zufallsvariable	334
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	281	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	335
7.12	Ebenengleichung.....	283	8.8.2	Wahrscheinlichkeitsfunktion.....	336
7.12.1	Vektorielle Parameterform der Ebene.....	283	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	337
7.12.2	Vektorielle Dreipunkteform einer Ebene	284	8.8.3	Erwartungswert einer Zufallsvariablen	338
7.12.3	Parameterfreie Normalenform	284	8.8.4	Faires und unfaires Gewinnspiel	339
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	286	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	342
7.13	Ebene-Punkt.....	288	8.9	Varianz und Standardabweichung	344
7.13.1	Punkt P liegt in der Ebene E	288	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	346
7.13.2	Abstand eines Punktes P zur Ebene E	288	8.10	Bernoulli-Ketten.....	348
7.14	Ebene-Gerade.....	289	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	351
7.14.1	Gerade parallel zur Ebene	289	Berühmte Mathematiker 3	353	
7.14.2	Gerade liegt in der Ebene	289			
7.14.3	Gerade schneidet Ebene	290			
7.15	Lagebezeichnung von Ebenen.....	291			
7.15.1	Parallele Ebenen.....	291			
7.15.2	Sich schneidende Ebenen.....	291			
7.15.3	Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen.....	292			
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	293			

Übersicht zu Kapitel 9.....	354
-----------------------------	-----

9 Matrizenrechnung

9.1	Matrizen erstellen.....	355
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	357
9.2	Transponierte Matrizen.....	358
9.3	Besondere Matrizen.....	359
9.4	Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl (Skalarmultiplikation).....	360
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	361
9.5	Matrizenaddition.....	362
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	363
9.6	Matrizenmultiplikation.....	364
9.6.1	Multiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor (Skalarprodukt).....	364
9.6.2	Multiplikation eines Zeilenvektors mit einer Matrix.....	365
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	366
9.6.3	Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor.....	367
9.6.4	Multiplikation zweier Matrizen.....	368
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	370
9.7	Inverse Matrizen.....	371
9.7.1	Berechnung der inversen Matrix A^{-1}	371
9.7.2	Lösen linearer Gleichungssysteme durch Matrixinvertierung.....	373
9.8	Matrizengleichungen.....	374
9.8.1	Matrizengleichungen der Form $k \cdot X = A$; $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	374
9.8.2	Matrizengleichungen der Form $A \cdot X = B$	374
9.8.3	Matrizengleichungen der Form $X \cdot A = B$	374
9.8.4	Matrizengleichungen der Form $A \cdot X \cdot B = C$	375
9.8.5	Matrizengleichungen mit singulärer Koeffizientenmatrix.....	375
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	376
9.9	Einstufige und zweistufige Produktionsprozesse.....	377
9.9.1	Einstufige Produktionsprozesse.....	377
9.9.2	Zweistufige Produktionsprozesse.....	379
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	381
9.10	Das Leontief-Modell (Input-Output-Analyse).....	382
9.10.1	Zwei-Sektoren-Modell.....	382
9.10.2	Drei-Sektoren-Modell.....	383
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!.....	388

Übersicht zu Kapitel 10.....	390
------------------------------	-----

10 Prüfungsaufgaben

10.1	Musteraufgaben.....	391
10.1.1	Ganzrationale Funktionen.....	391
10.1.2	Exponentialfunktion.....	393
10.1.3	Sinusfunktionen.....	395
10.1.4	Gebrochenrationale Funktionen.....	397
10.1.5	Vektoraufgabe Prisma.....	398
10.1.6	Vektoraufgabe Quader.....	399
10.1.7	Vektoraufgabe Pyramide.....	400
10.2	Testen Sie Ihr Wissen zur Prüfung!.....	401
10.2.1	Aufgaben mit ganzrationalen Funktionen.....	401
10.2.2	Funktionsterme und Schaubilder.....	403
10.2.3	Gebrochenrationale Funktionen.....	404
10.2.4	Aufgaben mit e-Funktionen.....	405

10.2.5	Aufgaben mit e- und ln-Funktion verknüpft mit rationaler Funktion.....	406
10.2.6	Vektorrechnung.....	407
10.2.7	Schaubilder ganzrationaler Funktionen.....	408
10.2.8	Schaubilder von e-Funktionen.....	409
10.2.9	Schaubilder von Kreisfunktionen.....	410

11 Anwendungsbezogene Aufgaben

11.1	Kostenrechnung.....	411
11.2	Optimierung einer Oberfläche.....	412
11.3	Optimierung einer Fläche.....	412
11.4	Flächenmoment.....	413
11.5	Sammellinse einer Kamera.....	414
11.6	Abkühlvorgang.....	415
11.7	Entladevorgang.....	415
11.8	Gebirgsmassiv.....	416
11.9	Bolzplatz für die Jugend.....	416
11.10	Berechnung von elektrischer Arbeit und Leistung.....	417
11.11	Sinusförmige Wechselgrößen.....	417
11.12	Effektivwertberechnung.....	418
11.13	Wintergarten.....	419
11.14	Bauvorhaben Kirche.....	419
11.15	Aushub Freibad.....	419
11.16	Pyramide.....	420
11.17	Kugelfangtrichter für Luftgewehre.....	421
11.18	Firmenschild.....	422
11.19	Anwendungen in der Differenzialrechnung.....	423

Mathematische Zeichen, Abkürzungen und Formelzeichen.....	424
---	-----

12 Anhang

Literaturverzeichnis.....	426
Sachwortverzeichnis.....	427

Zitate berühmter Wissenschaftler

„Er ist ein Mathematiker und also hartnäckig.“

Johann Wolfgang von Goethe (1748 bis 1832)

„Die erste Regel, an die man sich in der Mathematik halten muss, ist exakt zu sein. Die zweite Regel ist, klar und deutlich zu sein und nach Möglichkeit einfach.“

Lazare Nicolas Carnot (1753 bis 1823)

Es gibt Dinge, die den Menschen unglaublich erscheinen, die nicht Mathematik studiert haben.“

Archimedes (287 v. Chr. bis 212 v. Chr.)

„Manche Menschen haben einen Gesichtskreis vom Radius Null und nennen ihn ihren Standpunkt.“

David Hilbert (1862 bis 1943)

„In der Mathematik gibt es keine Autoritäten. Das einzige Argument für die Wahrheit ist der Beweis.“

Kasimir Urbanik, 1975

„Das Buch der Natur ist mit mathematischen Symbolen geschrieben. Genauer: Die Natur spricht die Sprache der Mathematik: die Buchstaben dieser Sprache sind Dreiecke, Kreise und andere mathematische Funktionen.“

Galileo Galilei (1564 bis 1642)

„Ich kann die Bewegung der Himmelskörper berechnen, aber nicht das Verhalten der Menschen.“

Sir Isaac Newton (1643 bis 1727)

„Wer die erhabene Weisheit der Mathematik tadelt, nährt sich von Verwirrung.“

Leonardo da Vinci (1452 bis 1519)

„Mathematik ist die einzige perfekte Methode, sich selbst an der Nase herumzuführen.“

Albert Einstein (1879 bis 1955)

„Die Mathematik muss man schon deswegen studieren, weil sie die Gedanken ordnet.“

Michail W. Lomonossow (1711 bis 1765)

„Die Furcht vor der Mathematik steht der Angst erheblich näher als der Ehrfurcht.“

Felix Auerbach (1856 bis 1933)

„Man darf nicht das, was uns unwahrscheinlich und unnatürlich erscheint, mit dem verwechseln, was absolut unmöglich ist.“

Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855)

„Es ist unglaublich, wie unwissend die studierende Jugend auf Universitäten kommt, wenn ich 10 Minuten rechne oder geometrisiere, so schläft $\frac{1}{4}$ derselben sanft ein.“

Michail W. Lomonossow (1711 bis 1765)

„Im großen Garten der Geometrie kann sich jeder nach seinem Geschmack einen Strauß pflücken.“

David Hilbert (1862 bis 1943)

„Du wolltest doch Algebra, da hast du den Salat.“

Jules Verne (1828 bis 1905)

„Beweisen muß ich diesen Käs, sonst ist die Arbeit unseriös.“

Friedrich Wille (1935 bis 1992)

„Wer sich keinen Punkt denken kann, der ist einfach zu faul dazu.“

Willhelm Busch (1832 bis 1908)

„Do not worry about your difficulties in mathematics, I assure you that mine are greater.“

Albert Einstein (1879 bis 1955)

„Mit Mathematikern ist kein heiteres Verhältnis zu gewinnen.“

Johann Wolfgang von Goethe (1748 bis 1832)

„If A equals success, then the formula is A equals X plus Y plus Z. X is work, Y is play. Z is keep your mouth shut.“

Albert Einstein (1879 bis 1955)

Algebraische Grundlagen

Einführung

Zahlenmengen

Terme und Gleichungen

Potenzen

Potenzbegriff

Potenzgesetze

Wurzelgesetze

Wurzelbegriff

Rechengesetze beim Wurzelrechnen

Wurzelziehen mit dem Heron-Verfahren

Logarithmengesetze

Logarithmusbegriff

Rechengesetze beim Logarithmus

Basisumrechnung beim Logarithmus

Funktionen und Gleichungssysteme

Rechtwinkliges Koordinatensystem

Relationen und Funktionen

Lineare Funktion

Ursprungsgeraden

Allgemeine Gerade

Lineare Gleichungssysteme LGS

Lösungsverfahren für LGS

Lösung eines LGS mit einer Matrix

Über und unterbestimmtes LGS

LGS mit Parameter

Grafische Lösung eines LGS

Sarrus-Regel

Betragsfunktionen

Ungleichungen

Quadratische Funktion

Parabeln mit Scheitel im Ursprung

Verschieben von Parabeln, Scheitelform

Normalenform und Nullstellen von Parabeln

Zusammenfassung der Lösungsarten

Welche Kompetenzen werden gefördert? ▲

A	
1	Gleichungen lösen
2	Potenzen berechnen
3	Wurzeln berechnen
4	Logarithmen berechnen
5	Funktionen anwenden
6	Gleichungssysteme lösen
7	Funktionsschaubilder darstellen

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

1 Algebraische Grundlagen

1.1 Einführung

Entwicklung der Zahlen

Zahlen sind die Basis, ohne die unsere Rechenoperationen wenig Sinn hätten. Damit die Menschen rechnen konnten, mussten erst geeignete Zahlendarstellungen und Zahlensysteme gefunden werden.

1. Finger und Zehen

Finger und Hände hatten einen entscheidenden Einfluss auf die ersten Zahlensysteme.

Mit den 5 Fingern einer Hand, den 10 Fingern beider Hände oder den insgesamt 20 Fingern und Zehen bediente man sich einer natürlichen Gliederung.

Eine 5er-Stufung findet man bei den Griechen, Mayas und Chinesen.

Das 10er-System hatten die Ägypter, Sumerer und Babylonier.

Die Mayas und die Inder benutzten auch eine 20er-Stufung in ihrem Zahlensystem. Die Auswirkungen dieses Systems findet man im englischen Pfund Sterling mit seinen 20 Schillingen sowie in ähnlicher Form im Französischen und Dänischen.

2. Astronomie

Eine Ausnahme der seitherigen Stufung stellt die 60er-Stufung dar, die bei den Sumerern und Babyloniern vorgefunden wurde. Vermutlich hat sie ihren Ursprung in der gut entwickelten Astronomie der Mesopotamier, die das Jahr in 360 Tage eingeteilt hatten.

Daraus resultiert bis heute die Kreiseinteilung in $6 \text{ mal } 60^\circ = 360^\circ$ sowie die Einteilung der Stunden in 60 Minuten und der Minuten in 60 Sekunden.

3. Römische Zahlen

Auf das unzuverlässige römische Zahlensystem wird hier nicht weiter eingegangen, da es zur Multiplikation und Potenzierung und damit für das Rechnen mit großen Zahlen völlig ungeeignet ist.

4. Indisch-arabische Zahlen

Die von uns heute verwendeten so genannten „arabischen“ Zahlen kommen ursprünglich aus Indien. Sie sind im Laufe der Jahrhunderte über Vorderasien und aus dem unter arabischem Einfluss stehenden Spanien zu uns gelangt.

Kennzeichnend für unser heutiges Zehnersystem ist die Verwendung von zehn verschiedenen Ziffern innerhalb eines Stellenwerts. Mit diesem Dezimalsystem ist ein einfaches und schnelles Rechnen möglich. In Deutschland wurde dieses System vor allem durch Adam Ries(e) bekannt.

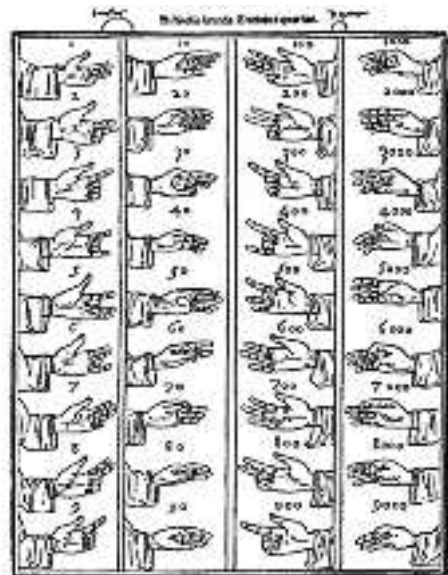


Bild 1: Fingerrechnen, wie es in alten Rechenbüchern vorkam



Bild 2: Babylonische Keilschrift hat die 60 als Basis (Sexagesimalsystem)

— = ≡ 7 7 6 7 4 2
Indisch 3. Jh. v. Chr
7 2 3 8 4 2 7 9 0
Indisch 8. Jh.
1 6 3 4 5 7 8 9 0
Westarabisch 11. Jh.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
Europäisch 15. Jh.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
Europäisch 16. Jh.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
Neuzeit 20. Jh.

Bild 3: Entwicklung der Dezimalzahlen bis heute

1.2 Zahlen

Zahlenmengen

In der Mengenlehre werden die Zahlen als Elemente von Zahlenmengen festgelegt.

Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Die Menge der natürlichen Zahlen beinhaltet alle Zahlen, die zum Abzählen benötigt werden. Sie enthält alle positiven ganzen Zahlen einschließlich der Null (**Tabelle 1**).

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Die Menge der ganzen Zahlen enthält die natürlichen Zahlen und alle negativen ganzen Zahlen. Damit ist die Rechenoperation Subtraktion uneingeschränkt möglich. Die Menge der ganzen Zahlen ohne Null ist $\mathbb{Z}^*$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Die Erweiterung der ganzen Zahlen um die Bruchzahlen machen die Rechenoperation Division (außer mit Null) möglich.

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q} \wedge p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Zusätzlich zu den rationalen Zahlen existieren am Zahlenstrahl Punkte, die nicht durch einen Bruch darstellbar sind (**Bild 1**). Diese Zahlen nennt man irrationale Zahlen. Beispiele für irrationale Zahlen sind: π ; e ; $\sqrt{2}$; $\lg 2$; ...

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist rational} \vee x \text{ ist irrational}\}$$

Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Gleichungen der Form $x^2 + 1 = 0$ sind mit reellen Zahlen nicht lösbar. Aus diesem Grund hat man die Zahlenmenge $\mathbb{R}$ um die imaginären Zahlen erweitert.

Beispiele für imaginäre Zahlen sind $-i$; $2i$; ... $2i$ bedeutet zweimal die imaginäre Zahl.

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + i \cdot b; a, b \in \mathbb{R}\}$$

Komplexe Zahlen bestehen aus dem Realteil a und dem imaginären Anteil b .

Komplexe Zahlen können wegen der imaginären Anteile nicht mehr am Zahlenstrahl dargestellt werden, sondern werden in der komplexen Zahlenebene dargestellt.

Tabelle 1: Zusammenfassung der Zahlenmengen

Zahlenmenge	Symbol	Zahlenart	Beispiele
Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	Positive ganze Zahlen	0; 1; 2; ...
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	Negative und positive ganze Zahlen	...; -2; -1; 0; 1; ...
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	Ganze Zahlen und Bruchzahlen	...; $-\frac{1}{2}$; $2\frac{2}{3}$; $\frac{7}{8}$; 6; ...
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	Rationale und irrationale Zahlen	...; -1; $\sqrt{2}$; $\frac{5}{3}$; π ; 7; ...
Komplexe Zahlen	$\mathbb{C}$	Reelle und imaginäre Zahlen	$-2i$; $2 + i$; $-1 + 2i$

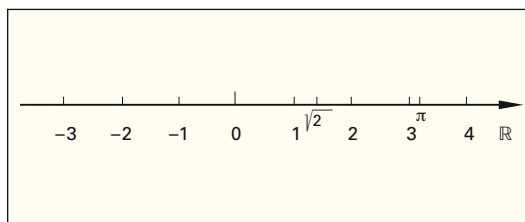


Bild 1: Zahlenstrahl

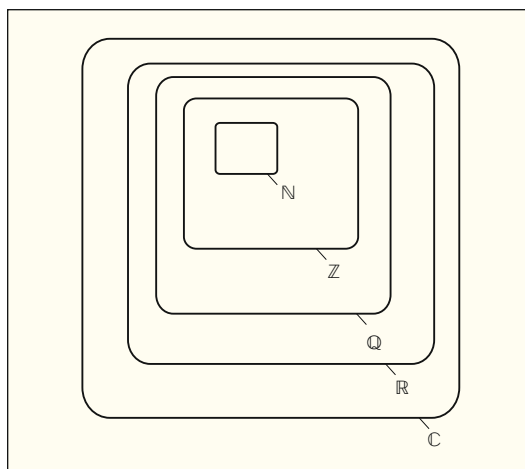


Bild 2: Zahlenmengen im Venndiagramm

1.3 Terme und Gleichungen

Terme können Zahlen, z. B. -1 ; $\frac{1}{2}$; 2 oder Variablen, z. B. a ; x ; y sein. Werden Terme durch Rechenoperationen verbunden, so entsteht wieder ein Term.

Eine Gleichung besteht aus einem Linksterm T_l und aus einem Rechtsterm T_r .

Werden zwei Terme durch das Gleichheitszeichen miteinander verbunden, so entsteht die Gleichung $T_l = T_r$.

Beispiel 1: Gleichung

Stellen Sie die beiden Terme T_l : $x + 2$ und T_r : -4 als Gleichung dar.

Lösung: $x + 2 = -4$

Werden an Gleichungen Rechenoperationen durchgeführt, so muss auf jeder Seite der Gleichung diese Rechenoperation durchgeführt werden (**Tabelle 1**). Eine Gleichung mit mindestens einer Variablen stellt eine Aussageform dar. Diese Aussageform kann eine wahre oder falsche Aussage ergeben, wenn den Variablen Werte zugeordnet werden.

Ein Wert x einer Gleichung heißt Lösung, wenn beim Einsetzen von x in die Gleichung eine wahre Aussage entsteht.

Beispiel 2: Lösung einer Gleichung

Ermitteln Sie die Lösung der Gleichung $x + 2 = -4$

Lösung: $x + 2 = -4$ | -2
 $x + 2 - 2 = -4 - 2$
 $x = -6$

1.4 Definitionsmenge

Die Definitionsmenge eines Terms kann einzelne Werte oder ganze Bereiche aus der Grundmenge ausschließen (**Tabelle 2**).

Beispiel 3: Definitionsmenge

Die Definitionsmenge der Gleichung $\sqrt{x-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$; $x \in \mathbb{R}$ ist zu bestimmen.

Lösung:

Die Definitionsmenge D_1 des Linksterms wird durch die Wurzel eingeschränkt. $D_1 = \{x | x \geq 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}$

Die Definitionsmenge D_2 des Rechtsterms wird durch den Nenner eingeschränkt. $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

Für die Gesamtdefinitionsmenge D gilt:

$$D = D_1 \cap D_2 = \{x | x > 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}$$

Tabelle 1: Rechenoperationen bei Gleichungen
 $T_l = T_r$

Operation	Allgemein	Beispiel
Addition	$T_l + T = T_r + T$	$x - a = 0$ $+ a$ $x - a + a = 0 + a$ $x = a$
Subtraktion	$T_l - T = T_r - T$	$x + a = 0$ $- a$ $x + a - a = 0 - a$ $x = -a$
Multiplikation	$T_l \cdot T = T_r \cdot T$	$\frac{1}{2} \cdot x = 1$ $\cdot 2$ $\frac{1}{2} \cdot x \cdot 2 = 1 \cdot 2$ $x = 2$
Division	$\frac{T_l}{T} = \frac{T_r}{T}$, $T \neq 0$	$2 \cdot x = 4$ $: 2$ $\frac{2 \cdot x}{2} = \frac{4}{2}$ $x = 2$

Tabelle 2: Einschränkung des Definitionsbereichs in $\mathbb{R}$

Term	Einschränkung	Beispiel
Bruchterm $T_B = \frac{Z(x)}{N(x)}$	$N(x) \neq 0$	$T(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $x - 1 \neq 0$ $x \neq 1$ $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
Wurzelterm $T_W = \sqrt{x}$	$x \geq 0$ x größer gleich 0	$T(x) = \sqrt{x-1}$ $x - 1 \geq 0$ $x \geq 1$ $D = \{x x \geq 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}$
Logarithmusterm $T_l = \log_a x$	$x > 0$ x größer 0	$T(x) = \log_{10} x$ $x > 0$ $D = \{x x > 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}$

Bei Aufgaben aus der Technik oder Wirtschaft ergeben sich häufig einschränkende Bedingungen in technischer, technologischer oder ökonomischer Hinsicht. So kann die Zeit nicht negativ sein oder die Temperatur nicht kleiner 273°C werden. Diese eingeeengte Definitionsmenge ist dann die eigentliche Definitionsmenge einer Gleichung.

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

Beispielaufgaben

Zahlen

- Geben Sie die Mengenbeziehungen der Zahlenmengen an (**Bild 1**).
- Welche Aussagen sind wahr?
 - $-2 \in \mathbb{N}$
 - $\pi \in \mathbb{R}$
 - $-2,5 \in \mathbb{Z}$
 - $2 \in \mathbb{Q}$

Terme und Gleichungen; Definitionsmenge

1. Lösungsmenge

Bestimmen Sie die Lösung für $x \in \mathbb{R}$.

- $4(2x - 6) = 2x - (x + 4)$
- $(2x - 1)(3x - 2) = 6(x + 2)(x - 4)$
- $\frac{x+2}{5} - 2 = 4$
- $\frac{2-x}{2} + a = 1$

2. Lösen von Gleichungen

Lösen Sie die Gleichungen nach allen Variablen auf.

- $h = \frac{1}{2}g \cdot t^2$
- $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

3. Definitions- und Lösungsmenge

Geben Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge an.

- $\sqrt{2x+2} = \sqrt{4x-8}$
- $\frac{3x-1}{x+2} = \frac{2-3x}{2-x}$

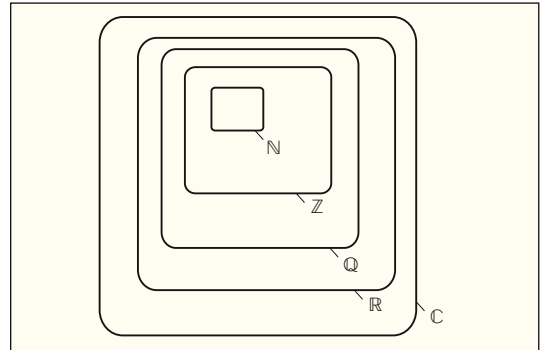


Bild 1: Zahlenmengen im Venn-Diagramm

Lösungen Beispielaufgaben

Zahlen

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- b) und d) sind wahr

Terme und Gleichungen; Definitionsmenge

- $x = \frac{20}{7}$
 - $x = -10$
 - $x = 28$
 - $x = 2a$
- $g = \frac{2h}{t^2}; t = \pm \sqrt{\frac{2h}{g}}$
 - $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}; R_1 = \frac{R \cdot R_2}{R_2 - R}; R_2 = \frac{R \cdot R_1}{R_1 - R}$
- $D = \{x | x \geq 2\}_{\mathbb{R}}; L = \{5\}$
 - $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}; L = \left\{\frac{6}{11}\right\}$

Übungsaufgaben

Berechnen und Lösen von Termen

1. Berechnen Sie den Wert des Terms:

- $312 + (-28 + 19)$
- $312 - (-28 + 19)$
- $312 + [12 - (+28 - 19) + 28] - (-18 + 24)$
- $18 - \{16 - [23 - (-12 - 7 + 28) + 32] - 62\}$

2. Fassen Sie die Terme durch Auflösen der Klammern zusammen und setzen Sie die angegebenen Werte ein.

- $14x - (28x + 19y)$ Setzen Sie $x = -2$ und $y = 3$
- $3a + [12b - (+28a - 19b)] - (-18a + 24b)$
Setzen Sie $a = 2$ und $b = -3$
- $14r + (14s - 12r) - (8r + 12s) + 12s - (8r - 9s)$
Setzen Sie $r = 6$ und $s = 4$
- $60 - \{16x - [23y - (-12x - 7y + 28) + 32x] - 62y\}$
Setzen Sie $x = -2$ und $y = 3$

Lösungen Übungsaufgaben

- 303
 - 321
 - 337
 - 110
- $42x - 19y = -29$
 - $-7a + 7b = -35$
 - $-14r + 23s = 8$
 - $28x + 92y + 32 = 252$

e) $18 + \{-16y + [23x - (12y - 7x + 28) + 32y] - 62\}$

Setzen Sie $x = -2$ und $y = 3$

f) $4r + 3(14s - 12r) - 2(8r + 12s) - 6(8r - 9s)$

Setzen Sie $r = -6$ und $s = 4$

g) $60x - 2\{16x - 3[23y - 4(-12x - 7y + 28)] - 62y\}$

Setzen Sie $x = 2$ und $y = -3$

h) $\frac{3}{4}x + \frac{5}{6}y - 2\left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{4}y\right) + \frac{2}{3}(4x - 3y) - 2x - 3y$

Setzen Sie $x = -2$ und $y = 3$

i) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}y - 3\left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{12}y\right) + \frac{2}{3}(4x - 3y) + 2x + 3y$

Setzen Sie $x = 2$ und $y = -3$

3. Multiplizieren Sie aus und fassen Sie zusammen.

a) $3x \cdot 2y \cdot z + 2x \cdot 5y \cdot (-2z) + 4x \cdot (-2y) \cdot (-5z)$

b) $-3x \cdot 2y \cdot (-z) - 2x \cdot 5y \cdot (-2z) + 4x \cdot (-3y) \cdot (-4z)$

c) $2(a - b) + 3(2a + 3b) - 3(a - 4b) + (a - 2b)5$

d) $(4 - x)(y + 2) + 2(3 + x)(2 - y) - (x + 2)(y - 2)$

e) $2(4 - x)(2y + 2) + (3 + 2x)(2 - y) - (x - 2)(y - 2)$

4. Bestimmen Sie aus den Gleichungen die Lösungsmenge $L = \{x\}$.

a) $\frac{x+3}{5} - 4 = 2$

b) $5x = 2(x - 7) - 4$

c) $27 + (3 - x) = 5x - 4$

d) $2(x + 3) = 4x - [2 - (3x - 2)]$

e) $2x - [6 - (2x + 3)] = 5 - 5x$

f) $9x + 1 - [2(5 - 3x + (x - 1))] = 6x - 13$

Definitions- und Lösungsmenge

5. Geben Sie die Definitionsmenge folgender Terme an.

a) $\sqrt{2x + 100}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2x + 100}}$

c) $\log_a(x + 2)$

6. Bestimmen Sie die Definitionsmenge und geben Sie die Lösung der Gleichung an.

a) $\frac{x-9}{x} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{15ac}{x} = \frac{9bc}{6bd}$

c) $\sqrt{x+1} - 2 = \sqrt{x-11}$

d) $7 + 4 \cdot \sqrt{x+7} = 23$

7. Bestimmen Sie die Lösung für x

a) $\frac{2x-4}{3} - \frac{x+5}{4} = \frac{4x+4}{6} + \frac{x+6}{12}$

b) $\frac{2-x}{7} + \frac{2x-4}{14} - \frac{3x+2}{21} = \frac{x-5}{14} + \frac{5-x}{7}$

c) $\frac{2x-a}{3} - \frac{x+a}{4} = \frac{4x+4}{6} + \frac{x+6}{12} - \frac{a-x}{3}$

Lösungen Übungsaufgaben

2. e) $30x + 4y - 72 = -120$

f) $-96r + 72s = 864$

g) $316x + 430y - 672 = -1330$

h) $-\frac{1}{4}x - \frac{11}{3}y = -10,5$

i) $\frac{11}{3}x + \frac{5}{2}y = -\frac{1}{6}$

3. a) $26yxz$

b) $74xyz$

c) $10a + 9b$

d) $4x - 4y - 4xy + 24$

e) $2x + 15y - 7xy + 18$

4. a) $L = \{27\}$

b) $L = \{-6\}$

c) $L = \left\{\frac{17}{3}\right\}$

d) $L = \{2\}$

e) $L = \left\{\frac{8}{9}\right\}$

f) $L = \left\{-\frac{6}{7}\right\}$

5. a) $x \geq -50$

b) $x > -50$

c) $x > -2$

6. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}; x = 45$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}; b, d \neq 0; x = 10ad$

c) $D = \{x | x \geq 11\}_{\mathbb{R}}; x = 15$

d) $D = \{x | x \geq -7\}_{\mathbb{R}}; x = 9$

7. a) $x = -\frac{45}{4}$

b) $x = -\frac{19}{3}$

c) $x = \frac{3a+14}{8}$

1.5 Potenzen

1.5.1 Potenzbegriff

Die Potenz ist die Kurzschreibweise für das Produkt gleicher Faktoren. Eine Potenz besteht aus der Basis (Grundzahl) und dem Exponenten (Hochzahl). Der Exponent gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert werden muss.

Beispiel 1: Potenzschreibweise

Schreiben Sie

- a) das Produkt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ als Potenz und
b) geben Sie den Potenzwert an.

Lösung: a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ b) $2^5 = 32$

1.5.2 Potenzgesetze

Potenz mit negativem Exponenten

Eine Potenz, die mit positivem Exponenten im Nenner steht, kann auch mit einem negativen Exponenten im Zähler geschrieben werden. Umgekehrt kann eine Potenz mit negativem Exponenten im Zähler als Potenz mit positivem Exponenten im Nenner geschrieben werden.

Beispiel 2: Exponentenschreibweise

Schreiben Sie die Potenzterme a) 2^{-3} ; b) 10^{-3} mit entgegengesetztem Exponenten und geben Sie den Potenzwert an.

Lösung:

$$\text{a) } 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$\text{b) } 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$$

Beispiel 3: Physikalische Einheiten

Schreiben Sie folgende physikalischen Benennungen mit umgekehrtem Exponenten.

$$\text{a) } m \cdot s^{-2} \quad \text{b) } U \cdot \min^{-1} \quad \text{c) } \frac{m}{s}$$

Lösung:

$$\text{a) } m \cdot s^{-2} = \frac{m}{s^2} \quad \text{b) } U \cdot \min^{-1} = \frac{U}{\min} \quad \text{c) } \frac{m}{s} = m \cdot s^{-1}$$

Addition und Subtraktion

Gleiche Potenzen oder Vielfaches von gleichen Potenzen, die in der Basis und im Exponenten übereinstimmen, lassen sich durch Addition und Subtraktion zusammenfassen (**Tabelle 1**).

Beispiel 4: Addition und Subtraktion von Potenztermen

Die Potenzterme $3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3$ sind zusammenzufassen.

$$\begin{aligned} \text{Lösung: } & 3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3 \\ & = (3 + 1 + 2)x^3 + (4 - 2)y^2 = 6x^3 + 2y^2 \end{aligned}$$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-Faktoren}} = a^n$$

$a^n = b$

$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

a Basis; $a > 0$
n Exponent

b Potenzwert

Tabelle 1: Potenzgesetze

Regel, Definition	algebraischer Ausdruck
Addition und Subtraktion Potenzen dürfen addiert oder subtrahiert werden, wenn sie denselben Exponenten und dieselbe Basis haben.	$r \cdot a^n \pm s \cdot a^n = (r \pm s) \cdot a^n$
Multiplikation Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert und die Basis beibehält. Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert und den Exponenten beibehält.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Division Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält. Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und den Exponenten beibehält.	$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Potenzieren Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Definition Jede Potenz mit dem Exponenten null hat den Wert 1.	$a^0 = 1$; für $a \neq 0$

Multiplikation von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Potenzen als Produkt schreibt und dann ausmultipliziert oder indem man die Exponenten addiert.

Beispiel 1: Multiplikation

Berechnen Sie das Produkt $2^2 \cdot 2^3$ und geben Sie den Potenzwert an.

Lösung:

$$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 32$$

$$\text{oder } 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$$

Beispiel 2: Flächen- und Volumenberechnung

- a) Die Fläche des Quadrates mit $a = 2 \text{ m}$ (**Bild 1**) und
b) das Volumen des Würfels für $a = 2 \text{ m}$ ist zu berechnen.

Lösung:

$$\text{a) } A = a \cdot a = a^1 \cdot a^1 = a^{1+1} = a^2$$

$$A = 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 2 \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{m} = 2^2 \text{ m}^2 = 4 \text{ m}^2$$

$$\text{b) } V = a \cdot a \cdot a = a^1 \cdot a^1 \cdot a^1 = a^{1+1+1} = a^3$$

$$= 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{m} \cdot \text{m}$$

$$= 2^3 \text{ m}^3 = 8 \text{ m}^3$$

$(-a)^2 = a^2$

$-a^2 = -(a^2)$

a Basis; $a > 0$

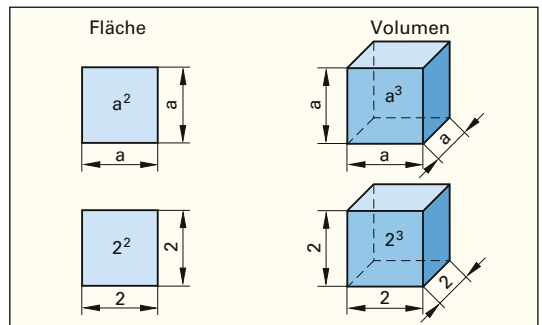


Bild 1: Fläche und Volumen

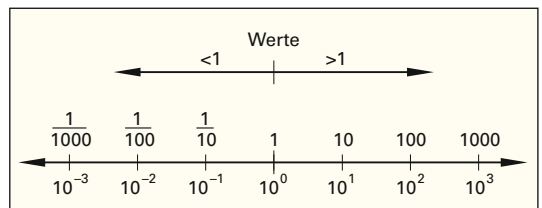


Bild 2: Zehnerpotenzen

Division von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man den Quotienten in ein Produkt umformt und dann die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder indem man den Nennerexponenten vom Zählerexponenten subtrahiert.

Beispiel 3: Division

Der Potenzterm $\frac{2^5}{2^3}$ ist zu berechnen.

Lösung:

$$\frac{2^5}{2^3} = 2^5 \cdot \frac{1}{2^3} = 2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

$$\text{oder } \frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

Tabelle 1: Zehnerpotenzen, Schreibweise

ausgeschriebene Zahl	Potenz	Vorsatz bei Einheiten
1 000 000 000	10^9	G (Giga)
1 000 000	10^6	M (Mega)
1 000	10^3	k (Kilo)
100	10^2	h (Hekto)
10	10^1	da (Deka)
1	10^0	–
0,1	10^{-1}	d (Dezi)
0,01	10^{-2}	c (Centi)
0,001	10^{-3}	m (Milli)
0,000 001	10^{-6}	μ (Mikro)
0,000 000 001	10^{-9}	n (Nano)

Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man das Produkt der Potenzen bildet und die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder indem man die Exponenten multipliziert.

Beispiel 4: Potenzieren

Berechnen Sie die Potenzterme

a) $(2^2)^3$ b) $(-3)^2$ c) -3^2

Lösung:

$$\text{a) } (2^2)^3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6 = 64$$

$$\text{oder } (2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$$

$$\text{b) } (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9 \quad \text{c) } -3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$$

Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Potenzen mit der Basis 10 werden sehr häufig als verkürzte Schreibweise für sehr kleine oder sehr große Zahlen verwendet. Werte größer 1 können als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten, Werte kleiner 1 als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten dargestellt werden (**Bild 2** und **Tabelle 1**).

Beispiel 5: Zehnerpotenzen

Schreiben Sie die Zehnerpotenzen

a) $20 \mu\text{m}$ b) 10 ml c) 3 kHz

Lösung:

a) $20 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ b) $10 \cdot 10^{-3} \text{ l}$ c) $3 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

1.6 Wurzelgesetze

1.6.1 Wurzelbegriff

Das Wurzelziehen oder Radizieren (von lat. radix = Wurzel) ist die Umkehrung des Potenzierens. Beim Wurzelziehen wird derjenige Wurzelwert gesucht, der mit sich selbst multipliziert den Wert unter der Wurzel ergibt. Eine Wurzel besteht aus dem Wurzelzeichen, dem Radikanden unter dem Wurzelzeichen und dem Wurzelexponenten. Bei Quadratwurzeln darf der Wurzelexponent 2 weggelassen werden $\Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt{a}$.

Eine Wurzel kann auch in Potenzschreibweise dargestellt werden. Deshalb gelten bei Wurzeln auch alle Potenzgesetze.

Beispiel 1: Potenzschreibweise und Wurzelziehen

Der Wurzelterm $\sqrt[n]{4} = \sqrt{4}$ ist

- in Potenzschreibweise darzustellen und
- der Wert der Wurzel zu bestimmen.

Lösung:

$$a) \sqrt[n]{4} = \sqrt[2]{4^1} = 4^{\frac{1}{2}} \quad b) \sqrt[n]{4} = \sqrt{4} = 2; \text{ denn } 2 \cdot 2 = 4$$

1.6.2 Rechengesetze beim Wurzelrechnen

Addition und Subtraktion

Gleiche Wurzeln, die im Wurzelexponenten und im Radikand übereinstimmen, dürfen addiert und subtrahiert werden (**Tabelle 1**).

Beispiel 2: Addition und Subtraktion von Wurzeln

Die Wurzelterme $3\sqrt{a}$, $-2\sqrt[3]{b}$, $+2\sqrt{a}$, $+4\sqrt[3]{b}$ sind zusammenzufassen.

Lösung:

$$3\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{b} + 2\sqrt{a} + 4\sqrt[3]{b} = (3 + 2)\sqrt{a} + (4 - 2)\sqrt[3]{b} = 5\sqrt{a} + 2\sqrt[3]{b}$$

Multiplikation und Division von Wurzeln

Ist beim Wurzelziehen der Radikand ein Produkt, so kann entweder aus dem Produkt oder aus jedem einzelnen Faktor die Wurzel gezogen werden. Bei einem Quotienten kann die Wurzel auch aus Zählerterm und Nennerterm gezogen werden (**Tabelle 1**).

Beispiel 3: Multiplikation und Division

Berechnen Sie aus den Wurzeltermen $\sqrt{9 \cdot 16}$ und $\sqrt{\frac{9}{16}}$ den Wert der Wurzel.

Lösung:

$$\begin{aligned} \sqrt{9 \cdot 16} &= \sqrt{144} = 12 \\ \text{oder } \sqrt{9 \cdot 16} &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12 \\ \sqrt{\frac{9}{16}} &= 0,75 \\ \text{oder } \sqrt{\frac{9}{16}} &= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} = 0,75 \end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{a} = x; a \geq 0$$

n Wurzelexponent

x Wurzelwert

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; a \geq 0$$

a Basis

m, $\frac{m}{n}$ Exponent

Tabelle 1: Wurzelgesetze

Regel	algebraischer Ausdruck
Addition und Subtraktion Wurzeln dürfen addiert und subtrahiert werden, wenn sie gleiche Exponenten und Radikanden haben.	$r \cdot \sqrt[n]{a} \pm s \cdot \sqrt[n]{a} = (r \pm s) \cdot \sqrt[n]{a}$
Multiplikation Ist der Radikand ein Produkt, kann die Wurzel aus dem Produkt oder aus jedem Faktor gezogen werden.	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Division Ist der Radikand ein Quotient, kann die Wurzel aus dem Quotienten oder aus Zähler und Nenner gezogen werden.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Potenzieren Beim Potenzieren einer Wurzel kann auch der Radikand potenziert werden.	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Allgemeine Lösung des Wurzelterms $\sqrt[n]{a^n}$

Bei der Lösung des Wurzelterms $\sqrt[n]{a^n}$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

gerader Exponent: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

ungerader Exponent: $\sqrt[n]{a^n} = a$

Die Lösung einer Quadratwurzel ist immer positiv.

Beispiel 4: Zwei Lösungen

Warum müssen beim Wurzelterm $\sqrt{a^2}$ zwei Fälle unterschieden werden?

Lösung:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Fall 1: **a für a > 0**

Fall 2: **-a für a < 0**

Beispiel 1:

Für $|a| = 2$ gilt $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{(2)^2} = \sqrt{4} = 2$

1.6.3 Wurzelziehen mit dem Heron-Verfahren

Wurzelzahlen sind im Allgemeinen irrationale Zahlen, d.h. sie lassen sich nicht durch einen Bruch darstellen. Da sie beliebig viele Nachkommastellen haben, war ihre händische Berechnung schwierig. Die Berechnung mithilfe eines Näherungs-Verfahrens war aber schon den Griechen und noch früher den Babyloniern bekannt (Bild 1).

Beispiel 1: Wurzel händisch ermitteln

Ermitteln Sie die Wurzel der Zahl 10 auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

Lösung:

1. Abschätzung:

$$3 < \sqrt{10} < 4, \text{ denn } 3^2 = 9 < 10 < 16 = 4^2$$

2. Durch Probieren:

$$3,1 < \sqrt{10} < 3,2,$$

$$\text{denn } 3,1^2 = 9,61 < 10 < 10,24 = 3,2^2$$

3. Mit größerer Mühe findet man:

$$3,16 < \sqrt{10} < 3,17, \text{ denn}$$

$$3,16^2 = 9,9856 < 10 < 10,0489 = 3,17^2$$

Einen schnelleren und effektiveren Weg zur Ermittlung einer Quadratzahl liefert ein Näherungsverfahren, das nach dem griechischen Mathematiker Heron¹ benannt wurde. Bei diesem Verfahren beginnt man mit einer natürlichen Zahl x_1 , die in der näheren Umgebung der Quadratwurzel $\sqrt{a}$ liegt. Man berechnet der Reihe nach immer mit dem gleichen Schema Brüche, die sich der gesuchten Wurzelzahl immer genauer annähern.

Beispiel 2: Ermittlung der Quadratwurzel mit dem Heron-Verfahren

Ermitteln Sie die Wurzel der Zahl 10 auf vier Stellen nach dem Komma genau mit dem Verfahren von Heron.

Lösung:

1. Näherung:

mit dem gewählten Startwert: $x_1 = 3$

2. Näherung:

Mit der Formel $x_2 = \left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) : 2 = \left(\frac{x_1}{2} + \frac{a}{2 \cdot x_1}\right)$ folgt:

$$x_2 = \left(3 + \frac{10}{3}\right) : 2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{10}{6}\right) = \frac{19}{6} = 3,166666...$$

3. Näherung:

$$x_3 = \left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right) : 2 = \left(\frac{x_2}{2} + \frac{a}{2 \cdot x_2}\right) = \left(\frac{19}{12} + \frac{10}{19}\right) = \frac{19}{12} + \frac{30}{19} = \frac{19 \cdot 19 + 30 \cdot 12}{12 \cdot 19} = \frac{721}{228} \approx 3,162280...$$

4. Taschenrechnerwert: $\sqrt{10} \approx 3,16227766...$

Bestimmung der Quadratwurzel aus a:

$$x_2 = \left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) : 2$$

$$x_3 = \left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right) : 2; \quad x_4 = \left(x_3 + \frac{a}{x_3}\right) : 2;$$

$$x_5 = \dots$$

Allgemein:

$$x_{n+1} = \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) : 2; \quad a \in \mathbb{N}^*, \quad n \in \mathbb{N}$$

x_1 Startwert

x_n Näherungswert

a Numerus der Quadratwurzel



Bild 1: Babylonische Keilschrifttafel zur Berechnung der Quadratwurzel

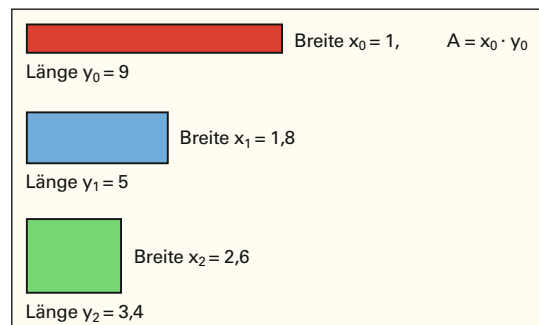


Bild 2: Geometrische Erläuterung des Heron-Verfahrens

Beim Heronverfahren wird von einem Quadrat mit dem Flächeninhalt A und der Kantenlänge $\sqrt{A}$ ausgegangen. Nimmt man ein Rechteck (Bild 2) mit der Fläche 9 (FE), so kann dieses durch Verkürzung der Länge y_0 und Verlängerung der Breite x_0 in Schritten an den Wert 3 angenähert werden. Die neue Länge $y_1 = 5$ erhält man mit dem Mittelwert $y_1 = \frac{x_0 + y_0}{2} = \frac{1 + 9}{2} = 5$ sowie $x_1 = \frac{A}{y_1}$. Durch Wiederholung dieser Schritte kann die gewünschte Genauigkeit erreicht werden.

Das Heron-Verfahren liefert schnell gute Näherungswerte für die Quadratwurzel.

¹ Heron von Alexandria (griechischer Mathematiker und Mechaniker, 1. Jh. n. Chr.)

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

Beispielaufgaben

Wurzelziehen mit dem Heron-Verfahren

- Bestimmen Sie die Quadratwurzel durch Anwendung mit dem Heron-Verfahren auf vier Stellen nach dem Komma.
a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$
- Ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 2$ und $b = 4$ soll in ein flächengleiches Quadrat umgewandelt werden.
a) Versuchen Sie über einen grafischen Ansatz das Heron-Verfahren auf das Problem anzuwenden.
b) Welche Kantenlänge hat das Quadrat?

Lösungen Beispielaufgaben

Wurzelziehen mit dem Heron-Verfahren

- a) 1,41...
b) 1,73...
c) 2,236 068...
- a) siehe Lösungsbuch
b) $2 \cdot \sqrt{2} = 2,828 4271...$

Übungsaufgaben

1. Stellen Sie die Gleichung oder Formel nach der geforderten Größe um.

- | | |
|--|----------------------------------|
| a) $d_a = d + 2m;$ | Umstellen nach m |
| b) $R_\theta = R_{20}(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta);$ | Umstellen nach $\Delta\vartheta$ |
| c) $\Delta R = R_{20} \cdot \alpha \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1);$ | Umstellen nach ϑ_1 |
| d) $Z_L = \frac{R_c \cdot R_L}{R_c + R_L};$ | Umstellen nach R_L |
| e) $A = \frac{d^2\pi}{4};$ | Umstellen nach d |
| f) $\tan \alpha = \frac{m \cdot v^2}{g \cdot m \cdot r};$ | Umstellen nach v |
| g) $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g};$ | Umstellen nach g |
| h) $i = \frac{U}{R + \frac{R}{n}};$ | Umstellen nach R |
| i) $v = \frac{s}{t+a} + \frac{s}{t-a};$ | Umstellen nach s |
| j) $\frac{s-s_1}{t-t_1} = \frac{s_2-s_1}{t_2-t_1};$ | Umstellen nach t_1 |

- k) Der Abstand des Schwerpunktes vom Boden einer mit Flüssigkeit gefüllten Dose lässt sich mit der Formel

$$h = \frac{m \cdot H}{M - m} \sqrt{\frac{M}{m}} - \frac{m \cdot H}{M - m}$$

beschreiben (Bild 1). Stellen Sie nach H um.

Gleichungen

2. Bestimmen Sie aus den Gleichungen die Lösung

- $(x + 2)^2 + 6 = x^2 + 20$
- $\frac{4(17 + 20x)}{11} = 8$

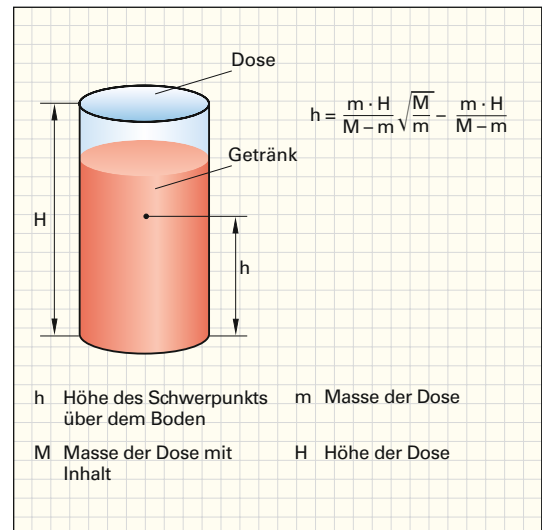


Bild 1: Schwerpunkt in Abhängigkeit des Inhalts

Lösungen Übungsaufgaben

- $m = \frac{d_a - d}{2}$
 - $\Delta\vartheta = \frac{R_\theta - 1}{R_{20} \cdot \alpha}$
 - $\vartheta_1 = \vartheta_2 - \frac{\Delta R}{R_{20} \cdot \alpha}$
 - $R_L = \frac{-Z_L R_c}{Z_L - R_c}$
 - $d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$
 - $v = \sqrt{r \cdot g \cdot \tan \alpha}$
 - $g = \frac{b \cdot f}{b - f}$
 - $R = \frac{n \cdot U}{i(n + 1)}$
 - $s = \frac{v(t^2 - a^2)}{2t}$
 - $t_1 = \frac{t(s_2 - s_1) + t_2(s_1 - s)}{s_2 - s}$
 - $H = \frac{(M - m) \cdot h}{\left(\sqrt{\frac{M}{m}} - 1\right) \cdot m}$
- $x = 2,5$
 - $x = \frac{1}{4}$