Bohner | Ott | Deusch | Rosner

Arbeitsheft
Mathematisches Grundgerüst
Eingangsklasse

Berufliches Gymnasium

Baden-Württemberg

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Ronald Deusch
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

* * * * * * * * * *

3. Auflage 2021

Gesamtherstellung:
Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 1206-03
ISBN 978-3-8120-1206-5

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Arbeitsheft dient zur Aufbereitung, Wiederholung und Festigung des im Schülerbuch „Mathematisches Grundgerüst“, für die Eingangsklasse, behandelten Lernstoffs. Es soll parallel zum Schülerbuch verwendet werden.
Die begleitende Unterstützung durch die Lehrkraft ist gewünscht und sehr sinnvoll.
Das Arbeitsheft enthält ergänzende Aufgaben zur Wiederholung und ermöglicht eine Lernkontrolle in Eigenverantwortung. Das im Vergleich zum Schülerbuch veränderte Format und die Form der Darstellung wirken motivierend auf Schüler/innen.
Einige Aufgaben beinhalten fächerübergreifende Aspekte in Handlungssituationen.
Das Arbeitsheft hilft, das Erlernte zu festigen und damit eine gute Grundlage für die Jahrgangsstufe und das schriftliche Abitur zu schaffen.
Videos dienen der Veranschaulichung von Problemen und Erläuterung von Lösungswegen. Sie unterstützen die Lernenden beim Entdecken und Verstehen mathematischer Zusammenhänge. Damit ist das Arbeitsheft zum Fernlernen und Homeschooling bestens geeignet.
Die Lösungen sind eingelegt und damit herausnehmbar.

I Funktionen

1 Vertiefung der Mathematik aus der Sekundarstufe 1

mvurl.de/qj86

Einführung in die Funktionen

Intervalle sind Teilmengen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

1 Schreiben Sie als Intervall.

$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$	$]2; 5[$ (offen)	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$	$[0; 1]$ (geschlossen)
$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 0\}$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$		$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 1\}$	

2 Schreiben Sie in Mengenschreibweise.

$[2 ; 8]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 8\}$	$]-\infty ; 2\pi[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\pi\}$
$]0 ; 2\pi[$		$[-\pi ; \pi]$	
$[-2 ; \infty[$		$]-\infty; 1[$	

3 Geben Sie die Koordinaten an und beschreiben Sie die Punktmenge.

A

B

C

D

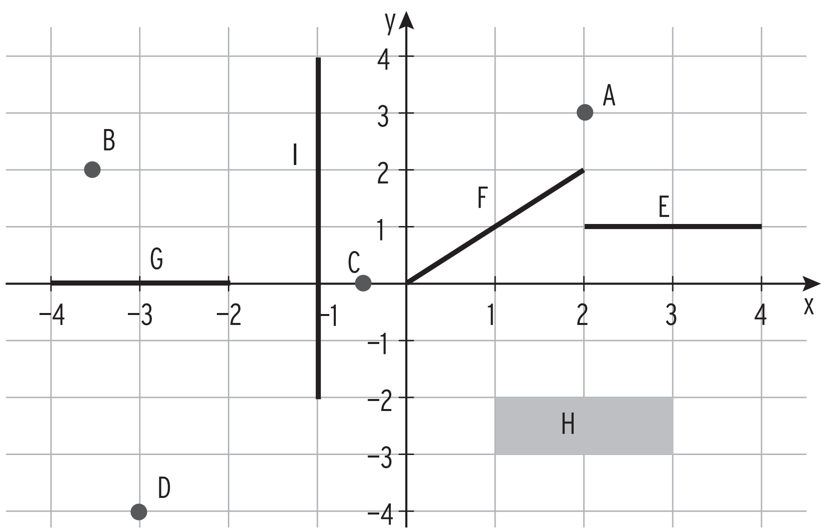
E: $x \in [2; 4]$ und $y = 1$

F

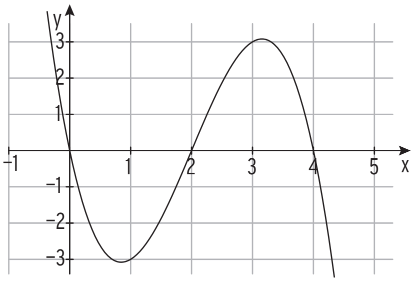
G

H

I

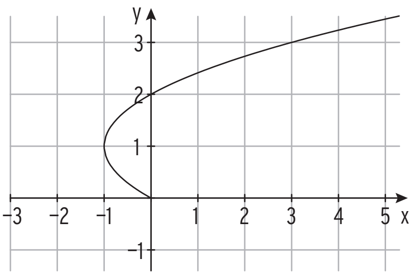


4 Entscheiden Sie begründet, ob das Schaubild zu einer Funktion gehört.



☐ ja ☐ nein

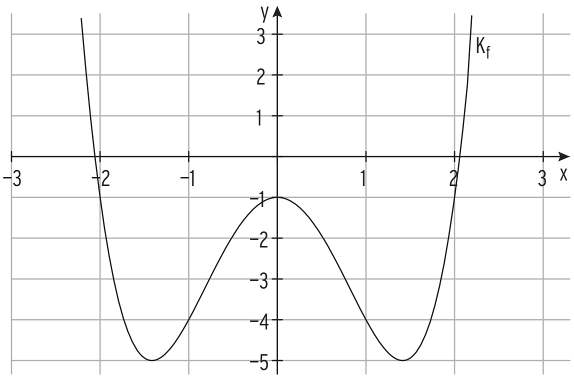
Begründung:



☐ ja ☐ nein

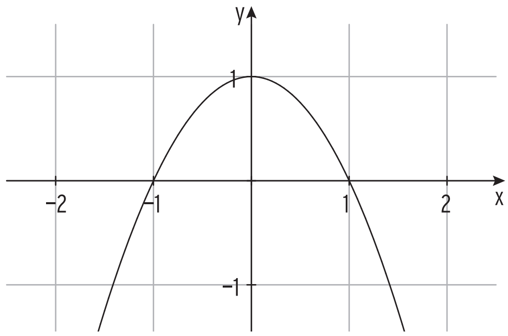
Begründung:

5 Die Abbildung zeigt das Schaubild K_f der Funktion f. Beantworten Sie folgende Fragen mithilfe der Abbildung. Begründen Sie Ihre Antwort.

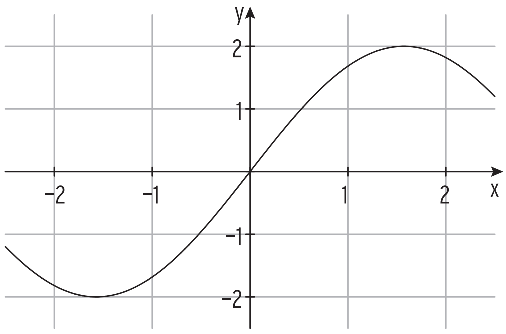


Bedingung	wahr/falsch	Begründung
$f(1) = -4$	☐ (w) ☐ (f)	
$f(x) = 0$ für $x = -2$	☐ (w) ☐ (f)	
$f(x) = f(-x)$	☐ (w) ☐ (f)	
$f(-1) < f(0)$	☐ (w) ☐ (f)	
$f(x) < -1$ für $0 < x < 2$	☐ (w) ☐ (f)	
$f(0) - f(1) = 3$	☐ (w) ☐ (f)	
$f(0) = f(2)$	☐ (w) ☐ (f)	

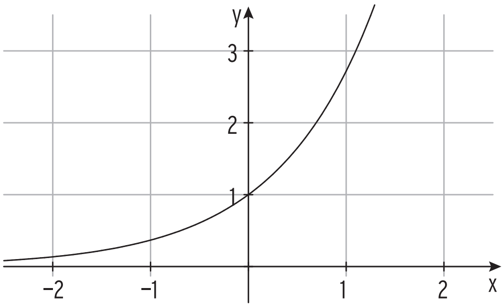
6 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen einer Funktion f mit D = ℝ.
Ordnen Sie jeder Funktion ihre Wertemenge W zu.



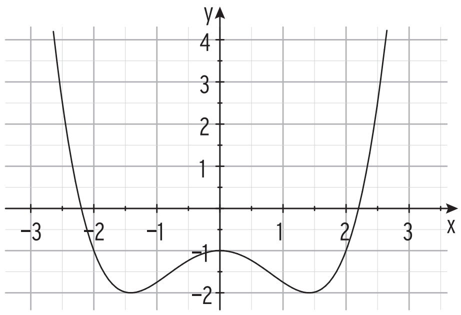
W =



W =

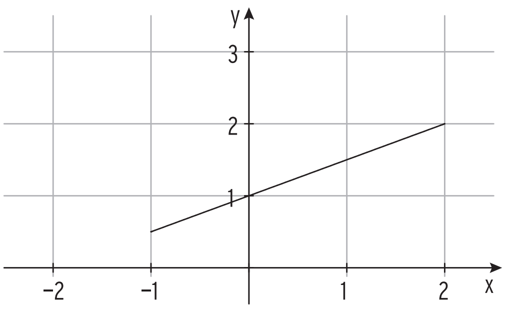


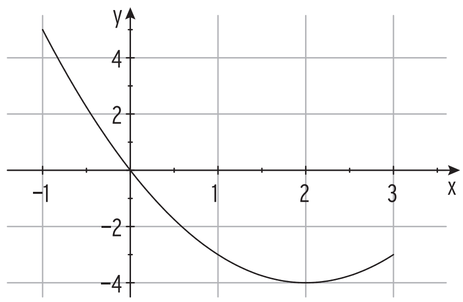
W =



W =

7 Ordnen Sie jeder Funktion Definitionsmenge D und Wertemenge W zu.





D =
W =

D =
W =

8 Füllen Sie die Tabelle aus.

Funktionsterm	D	W	Funktionsterm	D	W
$f(x) = x + 1$	]0; 3[	]1; 4[	$f(x) = 3x - 4$	[− 1; 4]	
$f(x) = 2 - x$	[− 3; 3]		$f(x) = 2x$		]− 2; 8[
$f(x) = x^2$	ℝ		$f(x) = x^2 + 1$		[1; 5]

mvurl.de/yac7

Lineare Funktionen

Die Funktion f mit $f(x) = mx + b$; $x \in \mathbb{R}$, ist eine **lineare Funktion.**
Geradengleichung $y = mx + b$ mit m: Steigung und b: y-Achsenabschnitt

1 Ergänzen Sie die Lücken im Text.

Das Schaubild der linearen Funktion f mit f(x) = __________ hat die___________ m und den ___-Achsenabschnitt b. Ist b = 0, so verläuft die Gerade ___________________ .

Eine Gerade ist ________, wenn die Steigung positiv ist, für m ___ ist sie fallend.
Für m = 0 verläuft sie _________.

2 Geben Sie einen linearen Funktionsterm an, so dass die Bedingung erfüllt ist.

Die Gerade geht durch den Ursprung.	
Die Steigung beträgt − 2.	
A(0| 7) liegt auf der Geraden.	
Die Gerade ist steigend.	
Vergrößert man den x-Wert um 2, vergrößert sich der y-Wert um 6.	
Die Gerade ist parallel zur 2. Winkelhalbierenden.	

3 Welche Zahl muss in den Platzhalter, damit der Graph von f mit

$f(x) = 2x - \square$ durch $(0| -4)$ verläuft?

$f(x) = -\frac{\square}{4}x + 6$ parallel zu g: $y = -1{,}5x$ verläuft?

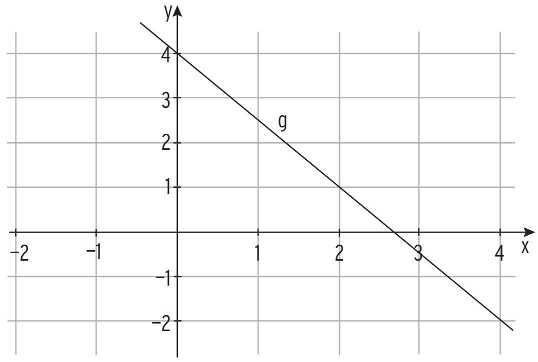
$f(x) = \square\, x + 1$ senkrecht zu g: $y = 5x + 8$ verläuft?

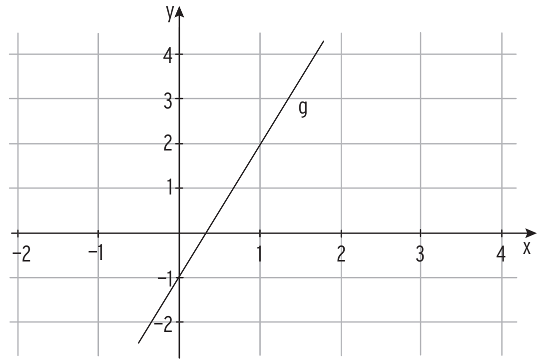
$f(x) = -\frac{3}{\square}x + 2$ durch $(1| \frac{7}{3})$ verläuft?

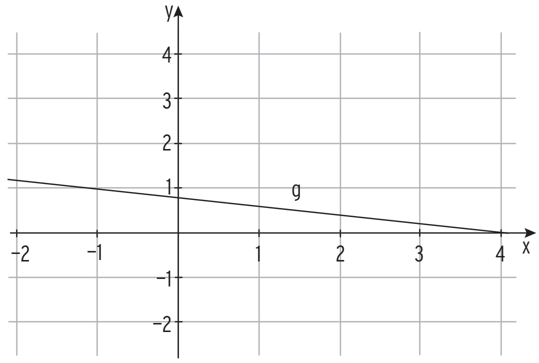
$f(x) = -\square\, x - \frac{5}{2}$ die x-Achse in $x = -6$ schneidet?

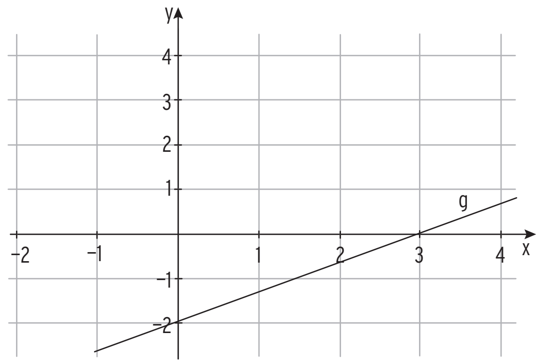
$f(x) = 4x - \square$ die 1. Winkelhalbierende in $x = -1$ schneidet?

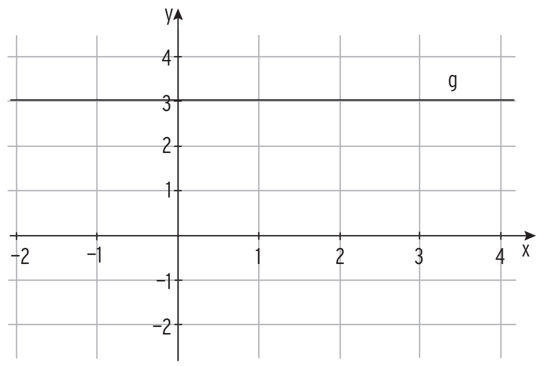
4 Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g mit Hilfe der Abbildung.

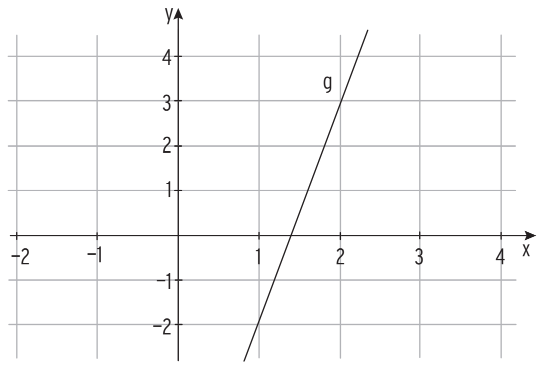


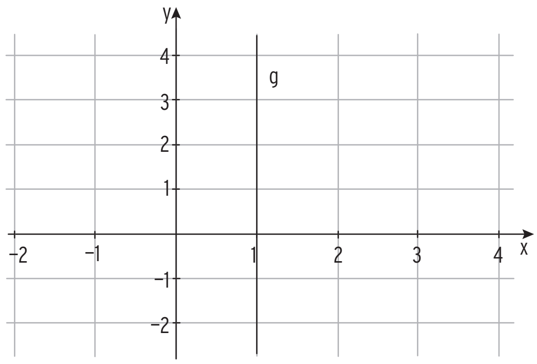


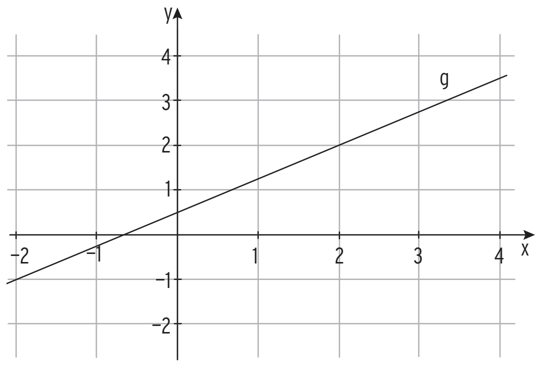












2 Potenzfunktionen

Definition und Eigenschaften

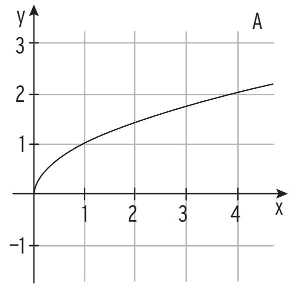
mvurl.de/bpq8

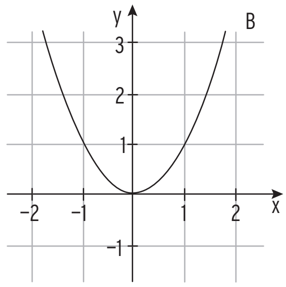
Die Funktion f mit $f(x) = x^r$; $r \in \mathbb{Q}^*$, $x \in D$, ist eine **Potenzfunktion.**

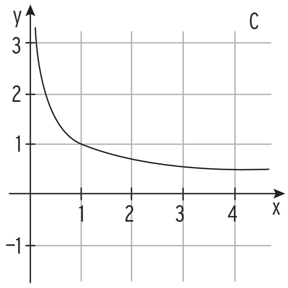
1 Welche Eigenschaften treffen auf das Schaubild von f mit $f(x) = x^2$; $x \in \mathbb{R}$, zu?

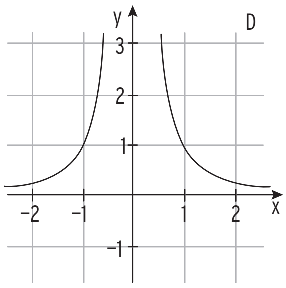
Das Schaubild ist achsensymmetrisch bezüglich der x-Achse.	
Das Schaubild ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.	
Das Schaubild verläuft oberhalb der x-Achse.	
Alle Funktionswerte sind größer oder gleich 0.	
Der Punkt S(0|0) ist der „höchste" Punkt.	

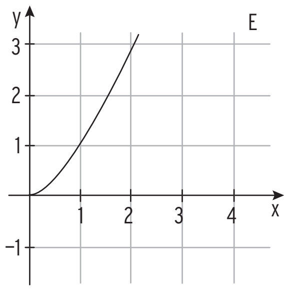
2 Die Abbildungen zeigen Schaubilder von Potenzfunktionen f mit $f(x) = x^r$ und $r = 2; -2; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}$. Ordnen Sie jedem Schaubild einen r-Wert zu.

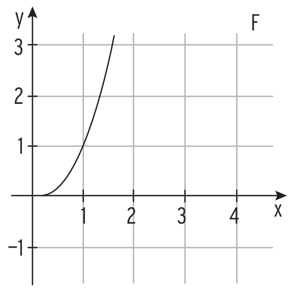












3 Berechnen Sie den Funktionswert ohne Hilfsmittel.

a) $f(x) = x^4$; $f(-2) =$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $f(-0{,}5) =$

c) $f(x) = x^{0{,}5}$; $f(25) =$

d) $f(x) = x^{-1}$; $f(-\frac{3}{2}) =$

mvurl.de/1yn2

Transformationen

1 Ergänzen Sie die folgenden Sätze.

a) Das Schaubild der quadratischen Funktion f mit $f(x) = x^2 + 5$ entsteht aus der Normalparabel durch ____________in ___ -Richtung um __ Einheiten. Ihr Scheitelpunkt S liegt auf der ___-Achse und hat die Koordinaten S(__ | __).

b) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = (x + 2)^2$ ist eine um ____ nach ________ verschobene Normalparabel. Der Scheitelpunkt S liegt auf der _______________ und hat die Koordinaten S(__ | __).

c) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}^*$ ist für $a > 0$ eine ______ ___________________ Parabel und für $a >$ ___ schmäler als die Normalparabel.

2 Der Graph von f wird abgebildet. Wie lautet der neue Funktionsterm g(x)?

Funktions-term	Streckung in y-Richtung	Verschiebung	Spiegelung a. d. x-Achse	g(x)
$f(x) = x^2$	Faktor 3	2 nach oben	ja	$g(x) = -3x^2 - 2$
$f(x) = -2x^2$	Faktor 0,5	4 nach links	nein	
$f(x) = x^2 - 1$	Faktor 2	1 nach unten und 1 nach rechts	ja	
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$	Faktor $\frac{1}{4}$	2 nach links	nein	
$f(x) = x^2$	Faktor $\frac{1}{8}$	5 nach links	ja	

3 Füllen Sie die Tabelle aus.

Funktions-term	Streckung in y-Richtung	Verschiebung	Spiegelung a. d. y-Achse	g(x)
$f(x) = x^4$	Faktor 0,3	1 nach unten	ja	$g(x) = 0{,}3x^4 - 1$
$f(x) = x^{-1}$			nein	$g(x) = 5(x + 2)^{-1}$
$f(x) = x^3$	Faktor 0,25	4 nach unten	ja	
$f(x) = \sqrt{x}$				$g(x) = 2{,}5\sqrt{x} + 2$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$			nein	$g(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$

3 Polynomfunktionen

mvurl.de/6q7r

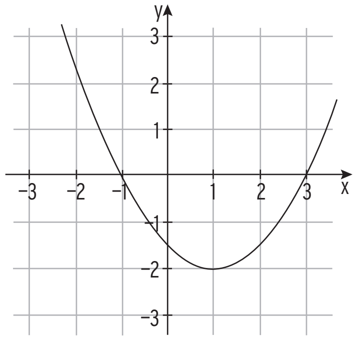
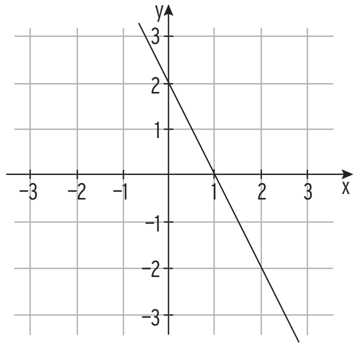
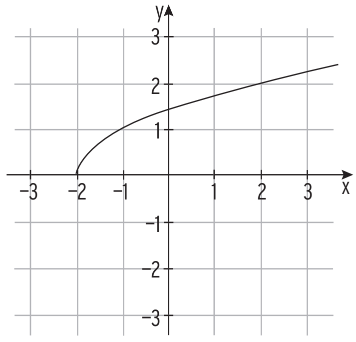
Definition

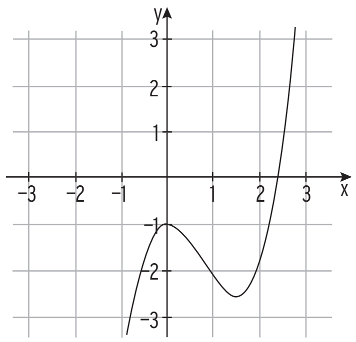
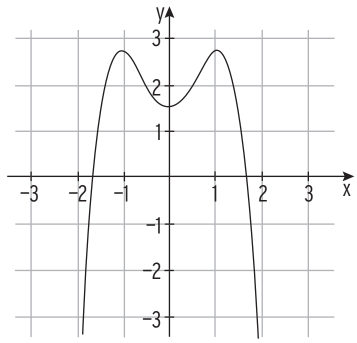
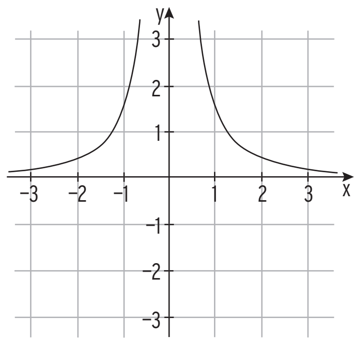
Eine **Polynomfunktion** f n-ten Grades ist gegeben durch
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0;\ x \in \mathbb{R};\ a_n \neq 0.$
$a_n, \ldots, a_0$ heißen Koeffizienten; $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$

1 Liegt eine Polynomfunktion vor? Wenn ja, geben Sie den Grad, die Koeffizienten und das Absolutglied an.

$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$	
$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2$	
$f(x) = x^5 - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}$	
$f(x) = -x^3 + \frac{2}{x}$	
$f(x) = 4x(x^2 - 3)$	
$f(x) = 8x + \sqrt{x}$	
$f(x) = \frac{1}{6}(x^4 - 2x^3 - 3x^2) + 1$	
$f(x) = (x - 2)^3$	
$f(x) = 2^x + 3$	
$f(x) = \frac{-2x - 1}{4}$	

2 Liegt eine Polynomfunktion vor? Wenn ja, geben Sie den Grad an. Wenn nein, begründen Sie.

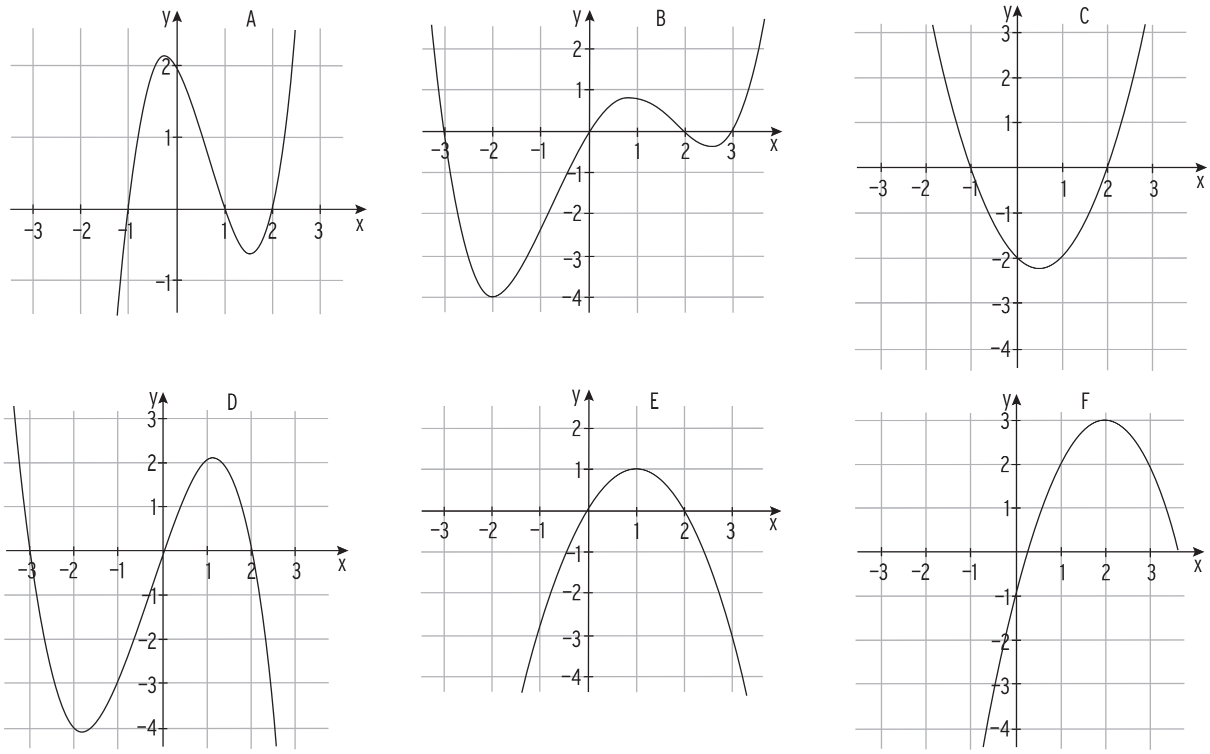




3 Welcher Term gehört zu welchem Produkt? Kennzeichnen Sie mit Pfeilen.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$	1) $g(x) = 2x^3(x + 2)$
b) $f(x) = -x^3 + 3x^2$	2) $g(x) = -x^2(x - 3)$
c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$	3) $g(x) = (x - 1)^2$
d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1$	4) $g(x) = (0{,}5x - 1)^2$
e) $f(x) = -x^4 + 3x^2$	5) $g(x) = -x^2(x^2 - 3)$
f) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$	6) $g(x) = (0{,}5x^2 - 1)^2$
g) $f(x) = 2x^4 + 4x^3$	7) $g(x) = (x + 1)^2(x - 1)$

4 Ordnen Sie jeder Abbildung einen Funktionsterm zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.
$f_1(x) = -0{,}5x(x+3)(x-2)$; $f_2(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$; $f_3(x) = \frac{x}{10}(x+3)(x-2)(x-3)$;
$f_4(x) = 3-(x-2)^2$; $f_5(x) = (x+1)(x-2)$; $f_6(x) = -x(x-2)$



Zuordnung und Begründung:

5 Ein Funktionsterm von Polynomfunktionen kann in verschiedenen Formen gegeben sein. Wandeln Sie in die angegebene Form um.

$f(x) = (x-1)^2 + 1$ in allgemeiner Form:

$f(x) = (x-3)(x+1)$ in allgemeiner Form:

$f(x) = x^2 - 4x + 4$ in Produktform:

$f(x) = 2x^2 - 6x$ in Produktform:

$f(x) = x^3(2-x)$ in allgemeiner Form:

$f(x) = 4 - x(x-4)$ in allgemeiner Form:

$f(x) = 9 - (x+3)^2$ in Produktform:

$f(x) = x^2(x-1)^2$ in allgemeiner Form:

$f(x) = (3x+2)^2 - 4$ in Produktform:

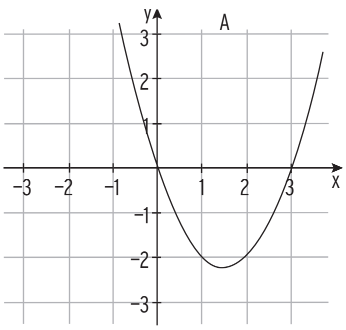
mvurl.de/ni5t

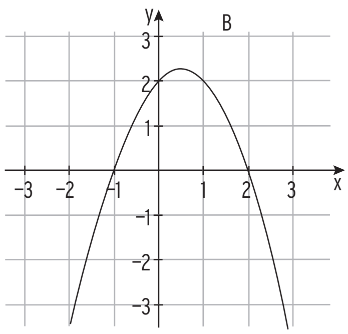
Globales Verhalten und Symmetrie

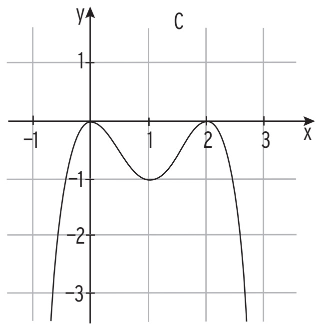
1 Welches Vorzeichen hat der Funktionswert f(1000)? Erläutern Sie Ihre Antwort.

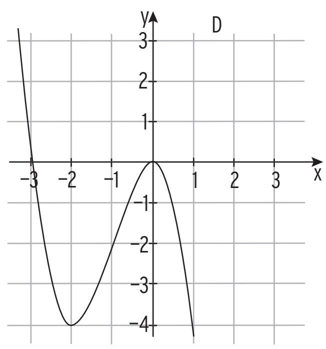
Funktionsterm	Vorzeichen von f(1000)	Erläuterung
$f(x) = x^5 - x^2$	positiv	Graph verläuft vom III. in den I. Quadranten
$f(x) = x^7 - 4x^2 + 3x$		
$f(x) = 2x^6 - x^4$		
$f(x) = -x^4 - x^3 - x^2$		
$f(x) = x^8 + x^4 + x^3 - 4x^2$		

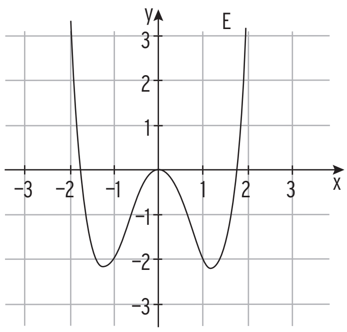
2 Ordnen Sie jeder Abbildung einen Funktionsterm zu, indem Sie das globale Verhalten und den Grad betrachten: $f(x) = x^2 - 3x$; $g(x) = x^3 - 3x$; $h(x) = x^4 - 3x^2$; $k(x) = 2 - x^2 + x$; $i(x) = -x^2\,(x-2)^2$; $l(x) = -x^3 - 3x^2$

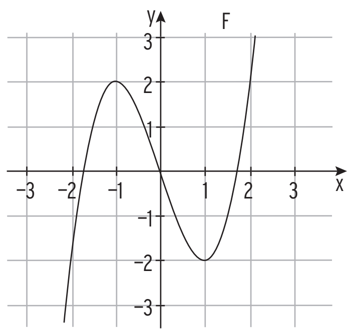










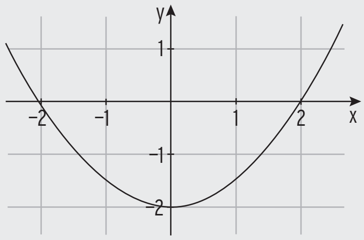


Zuordnung:

Nullstellen

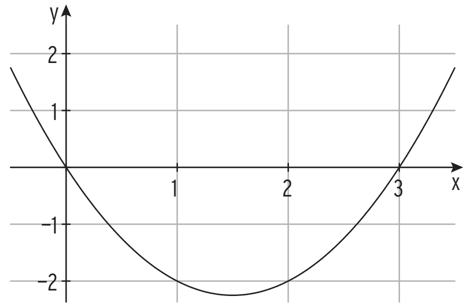
mvurl.de/jpv3

1 Bestimmen Sie die Nullstellen der quadratischen Funktion f und skizzieren Sie den Graphen von f.

Funktionsterm	Nullstellen: f(x) = 0	Skizze
$f(x) = 0{,}5(x^2 - 4)$	$0{,}5(x^2 - 4) = 0$ $x^2 - 4 = 0$ $x^2 = 4$ $x_1 = -2;\ x_2 = 2$ einfache Nullstellen	
$f(x) = 2x^2 - 3x$		
$f(x) = \frac{1}{4}(x + 5)(x - 1)$		
$f(x) = 1 - (x - 3)^2$		
$f(x) = 0{,}5x^2 + 2x + 2$		
$f(x) = -x^2 + 2x - 2$		

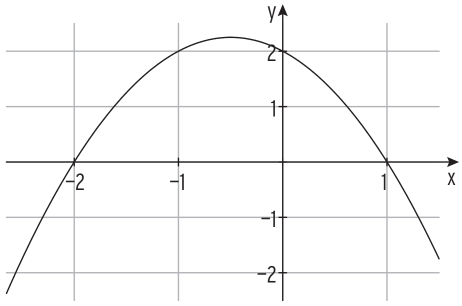
2 Bestimmen Sie die Lösung der Ungleichung.

a) $x^2 - 3x < 0$



Lösung:

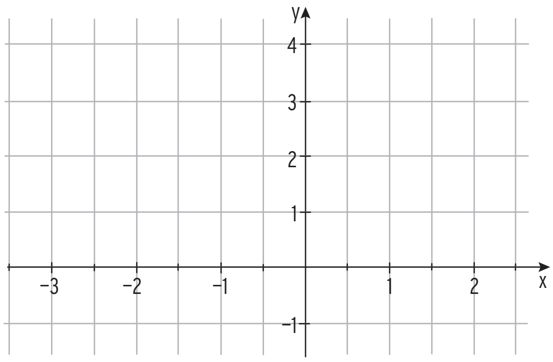
b) $-x^2 - x + 2 \leq 0$



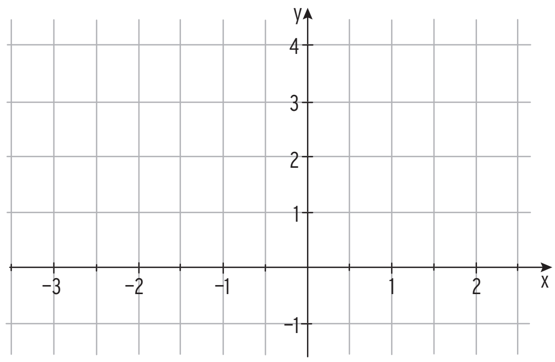
Lösung:

3 Lösen Sie die Ungleichung mit Hilfe einer Skizze.

a) $\frac{1}{2}(x + 2)(x - 1) \geq 0$

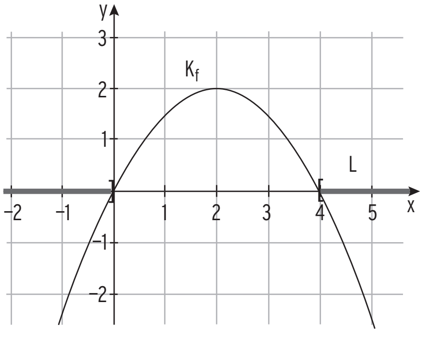


b) $-x(x + 3) \geq 0$

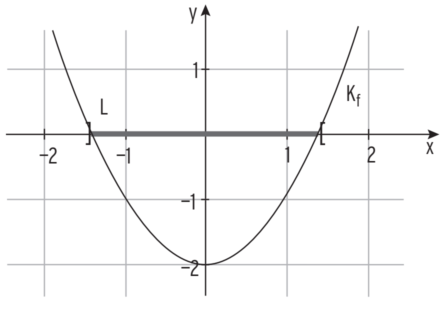


4 Welche Ungleichung wird gelöst?

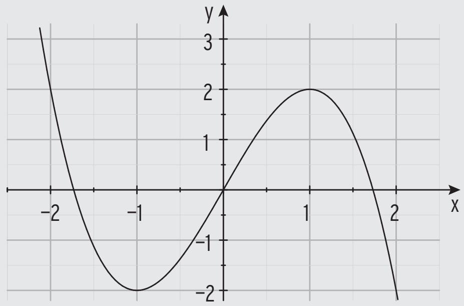
a) K_f: $f(x) = 2x - 0{,}5x^2$



b) K_f: $f(x) = x^2 - 2$



5 Berechnen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie das Schaubild von f.

Funktionsterm	Nullstellen: f(x) = 0	Skizze
$f(x) = -x^3 + 3x$	$-x^3 + 3x = 0$ $-x(x^2 - 3) = 0$ $x = 0$ oder $x^2 - 3 = 0$ $x_1 = 0$; $x_2 = -\sqrt{3}$; $x_3 = \sqrt{3}$ drei einfache Nullstellen	
$f(x) = x^4 - 2x^2$		
$f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)x^2$		
$f(x) = 3x - 2x^2 - x^3$		

6 Machen Sie Aussagen über Vielfachheit und Anzahl der Nullstellen von f. Geben Sie die Nullstellen von f an.

$f(x) = 3x(x - 2)$

$f(x) = -(x + 4)(x - 1)$

$f(x) = \frac{-2x-1}{4} \cdot (2x - 6)$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2(x+4)^2$

$f(x) = ax(x^2 - 3);\ a \neq 0$

$f(x) = (4 - x)(x^2 - a)$

$f(x) = (x - 1)(x - 3)(x - a)$

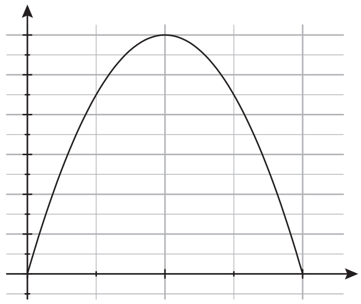
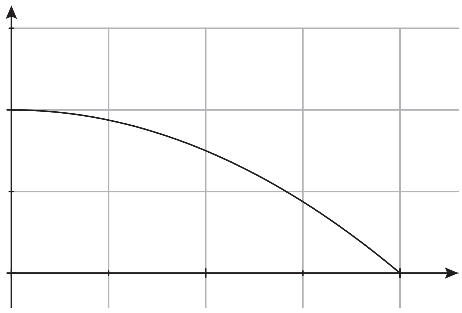
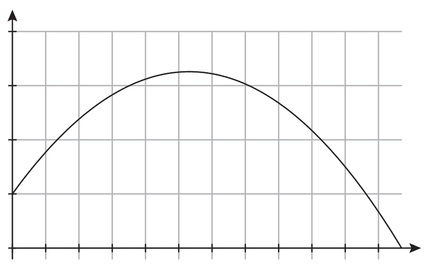
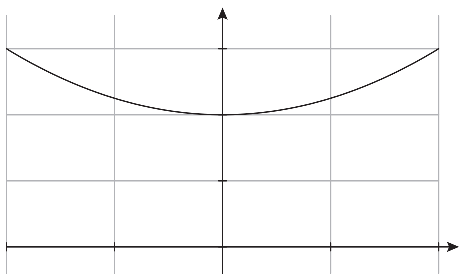
$f(x) = (x - a)^3(x + 1)$

$f(x) = (x - 1)^2(x - 5)(x - a)$

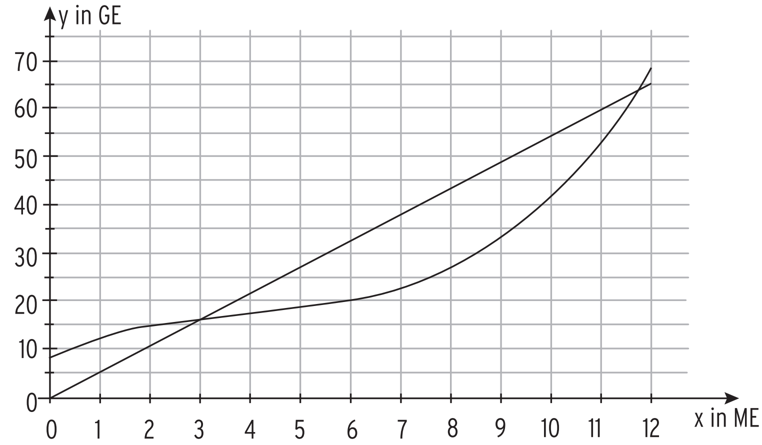
Polynomfunktionen in Anwendungen

mvurl.de/t9dk

1 Welche Modellierung passt zur gegebenen Situation?
Benennen Sie die Koordinatenachsen bzw. beschreiben Sie den Funktionsterm.

A: Der Kugelstoßweltrekord (Männer) liegt bei 23,12 m.	Abb. 1 
B: Der Wasserstrahl im Brunnen auf dem Schulhof.	Abb. 2 
C: Flüssigkeit im rotierenden Glas .	Funktionsterm $f(x) = x(120 - 2x)$
D: Mit 120 m Zaun soll eine rechteckige Weide entlang der Stallungen eingezäunt werden.	Abb. 3 
E: Ein Ball wird aus 1 m Höhe waagerecht geworfen und landet nach 2 Sekunden auf dem Boden.	Abb. 4 

2 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Gesamtkostenfunktion und einer Erlösfunktion.



ME (Mengeneinheiten); GE (Geldeinheiten)

Beschreiben Sie den Verlauf der beiden Graphen, indem Sie den Lückentext mit folgenden Begriffen sinnvoll ergänzen: steigend, wachsen, Gewinnschwelle, Gewinngrenze; Gewinnzone, Fixkosten, größten, konstant, Ursprungsgerade, Steigung, Stückpreis, maximal, 3ME, 8 GE.

Der Graph der Gesamtkostenfunktion K mit $K(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 5x + 8$ verläuft im

Definitionsbereich D = [0; 12] ________________,

d.h. mit zunehmender Produktionsmenge ________________die Gesamtkosten.

Der Graph der Gesamtkostenfunktion beginnt in (0 | 8).

Dies entspricht den ______________ in Höhe von ______ .

Der Graph der Erlösfunktion ist eine ________________ , die ________________ ist

____________ und entspricht dem ________________ .

Die erste Schnittstelle von Kostenkurve und Erlösgerade liegt bei ______ und wird als

________________ bezeichnet. Die zweite Schnittstelle von Kostenkurve und Erlös-

gerade liegt bei ________ und wird als ________________ bezeichnet. Der Bereich

zwischen ________________ und ________________ ist die ________________ .

Bei etwa 8 ME ist die Differenz von K(x) und E(x) am ______________ ,

der Gewinn wird hier________________ .

Bohner | Ott | Deusch | Rosner

Arbeitsheft
Mathematisches Grundgerüst
Eingangsklasse

Berufliches Gymnasium

Baden-Württemberg

Lösungen

Merkur
Verlag Rinteln

Basiswissen

Terme und Gleichungen

1 Vereinfachen Sie den Term.

$x - 3x - 8(x + 1)$	$= x - 3x - 8x - 8 = -10x - 8$
$x + 5(x - y + 2) - 6x - 2y$	$= x + 5x - 5y + 10 - 6x - 2y = -7y + 10$
$7(x - 2) + 3(x - 5)$	$= 7x - 14 + 3x - 15 = 10x - 29$
$12x - 6(x - 1) + 12$	$= 12x - 6x + 6 + 12 = 6x + 18$
$2 \cdot 4a \cdot 3b + 5a \cdot 2b - 18ab$	$= 24ab + 10ab - 18ab = 16ab$
$2(x^2 - x) + (x^2 - x - 3) \cdot (-5)$	$= 2x^2 - 2x - 5x^2 + 5x + 15 = -3x^2 + 3x + 15$
$8a - 3x + 6a - (x + a) - 5(a - 2x)$	$= 8a - 3x + 6a - x - a - 5a + 10x = 8a + 6x$

2 Multiplizieren Sie aus.

$2x(1 + 6y) + x(3 - 2y)$	$= 2x + 12xy + 3x - 2xy = 5x + 10xy$
$4(x + 2y - 3z) + 4$	$= 4x + 8y - 12z + 4$
$(x - 7)(x - 2)$	$= x^2 - 7x - 2x + 14 = x^2 - 9x + 14$
$\frac{1}{4}(x - 2)(x + 6)$	$= \frac{1}{4}(x^2 - 2x + 6x - 12)$ $= \frac{1}{4}(x^2 + 4x - 12) = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$
$4(x - 6y) - 8(x - 6y)$	$= 4x - 24y - 8x + 48y = -4x + 24y$

3 Klammern Sie aus.

$24x + 16y - 12$	$= 4 \cdot 6x + 4 \cdot 4y - 4 \cdot 3 = 4(6x + 4y - 3)$
$4x + 8y - 12z$	$= 4(x + 2y - 3z)$
$tx - 3tx + t$	$= t(x - 3x + 1) = t(-2x + 1) = -t(2x - 1)$
$24a + 16ab - 12ac$	$= 4a(6 + 4b - 3c)$
$4(x - 6y) - 8(x - 6y)$	$= (4 - 8)(x - 6y) = -4(x - 6y)$