



Mathematik für die Fachschule für Technik

Bearbeitet von Lehrern und Ingenieuren an beruflichen Schulen
(Siehe nächste Seite)

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 70388

Autoren des Buches „Mathematik für die Fachschule für Technik“

| | |
|---------------------------|------------------------|
| Josef Dillinger | München |
| Bernhard Grimm | Sindelfingen, Leonberg |
| Dr. Frank-Michael Gumpert | Stuttgart-Birkach |
| Gerhard Mack | Esslingen |
| Thomas Müller | Ulm |
| Bernd Schiemann | Durbach/Ortenau |

Lektorat: Bernd Schiemann

Bildentwürfe: Die Autoren

Bilderstellung und -bearbeitung: Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

1. Auflage 2015

Druck 5 4 3 2

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

ISBN: 978-3-8085-7038-8

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2015 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Umschlaggestaltung: Idee Bernd Schiemann, Durbach; Ausführung: Andreas Sonnhüter, 40625 Düsseldorf

Satz: fidus Publikations-Service, 86720 Nördlingen/Löpsingen

Druck: Plump Druck und Medien GmbH, 53619 Rheinbreitbach

Vorwort zur 1. Auflage

Das vorliegende Buch dient der vertieften beruflichen Fortbildung für Fachkräfte, mit beruflicher Erstausbildung oder für Umschüler mit langer beruflicher Erfahrung. Es deckt den Lehrplan für Fachschulen, Fachakademien und auch Berufskollegs ab. Es dient auch zur Vorbereitung auf die Ergänzungsprüfung in Mathematik, Technik und Nichttechnik.

Ein kompaktes Lehr- und Übungsbuch, das auch schwierige mathematische Zusammenhänge anhand praktischer Beispiele visualisiert und erklärt. Dieser Praxisbezug zeigt dem Lernenden die jeweilige Anwendung der mathematischen Themen auf. Im Mittelpunkt des Lernprozesses steht das selbst organisierte und selbst gesteuerte Lernen erwachsener Schülerinnen und Schüler.

Zur Förderung handlungsorientierter Themenbearbeitung enthält das Buch eine große Anzahl von Beispielen, anhand derer eine Vielzahl von Aufgaben zu lösen sind. Zu jeder Aufgabe ist die Lösung auf derselben Seite angegeben. Das Buch ist deshalb auch sehr gut zum selbstständigen Lernen geeignet. Zum Üben dienen eine Vielzahl von Aufgaben am Buchende. Ein didaktisch aufbereiteter Lösungsband mit ausführlichen Schritten zur Lösung, sowie eine Formelsammlung ergänzen das Buch.

Um unterschiedliche Vorkenntnisse auszugleichen, beginnt das Buch mit den Kapiteln Algebraische und Geometrische Grundlagen.

Die Hauptabschnitte des Buches sind

- **Algebraische Grundlagen**
- **Geometrische Grundlagen**
- **Vektorrechnung**
- **Analysis**
- **Differenzialrechnung**
- **Integralrechnung**
- **Komplexe Rechnung**
- **Prüfungsvorbereitung**
- **Aufgaben aus der Praxis**
- **Projektaufgaben**
- **Selbst organisiertes Lernen mit
Übungsaufgaben – Musteraufgaben – Musterprüfungen**

Ihre Meinung interessiert uns!

Teilen Sie uns Ihre Verbesserungsvorschläge, Ihre Kritik aber auch Ihre Zustimmung zum Buch mit.

Schreiben Sie uns an die E-Mail-Adresse: info@europa-lehrmittel.de

Inhaltsverzeichnis

| | |
|----------------------------------|---|
| Mathematische Fachbegriffe | 7 |
|----------------------------------|---|

1 Algebraische Grundlagen

| | | |
|---------|---|----|
| 1.1 | Term | 9 |
| 1.2 | Gleichung | 9 |
| 1.3 | Definitionsmenge | 9 |
| 1.4 | Potenzen | 10 |
| 1.4.1 | Potenzbegriff | 10 |
| 1.4.2 | Potenzgesetze | 10 |
| 1.5 | Wurzelgesetze | 12 |
| 1.5.1 | Wurzelbegriff | 12 |
| 1.5.2 | Rechengesetze beim Wurzelrechnen | 12 |
| 1.6 | Binomische Formeln | 13 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 15 |
| 1.7 | Logarithmengesetze | 16 |
| 1.7.1 | Logarithmusbegriff | 16 |
| 1.7.2 | Rechengesetze beim Logarithmus | 16 |
| 1.7.3 | Basisumrechnung beim Logarithmus | 17 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 18 |
| 1.8 | Mengen | 19 |
| 1.8.1 | Mengen und ihre Elemente | 19 |
| 1.8.2 | Beziehungen zwischen Mengen | 19 |
| 1.8.3 | Verknüpfung mit Mengen | 20 |
| 1.8.4 | Pfeildiagramme | 21 |
| 1.9 | Funktionen und Gleichungssysteme | 22 |
| 1.9.1 | Rechtwinkliges Koordinatensystem | 22 |
| 1.9.2 | Funktionen | 23 |
| 1.9.3 | Lineare Funktionen | 24 |
| 1.9.3.1 | Ursprungsgeraden | 24 |
| 1.9.3.2 | Allgemeine Geraden | 25 |
| Ü | Überprüfen Sie ihr Wissen! | 26 |
| 1.9.4 | Betragsfunktion | 27 |
| 1.9.5 | Ungleichungen | 28 |
| 1.9.6 | Quadratische Funktionen | 29 |
| 1.9.6.1 | Parabeln mit dem Scheitel im Ursprung | 29 |
| 1.9.6.2 | Verschieben von Parabeln | 30 |
| 1.9.6.3 | Normalform und Nullstellen von Parabeln | 31 |
| 1.9.6.4 | Zusammenfassung der Lösungsarten | 32 |
| Ü | Überprüfen Sie ihr Wissen! | 33 |
| 1.9.7 | Lineare Gleichungssysteme LGS | 34 |
| 1.9.7.1 | LGS mit dem Additionsverfahren lösen | 34 |
| 1.9.7.2 | Lösung eines LGS mit dem Gleichsetzungs- verfahren | 35 |
| 1.9.7.3 | Graphische Lösung eines LGS | 36 |

2 Geometrische Grundlagen

| | | |
|-------|--|----|
| 2.1 | Flächeninhalt geradlinig begrenzter Flächen | 37 |
| 2.2 | Flächeninhalt kreisförmig begrenzter Flächen | 38 |
| Ü | Überprüfen Sie ihr Wissen! | 39 |
| 2.3 | Volumenberechnungen | 40 |
| 2.3.1 | Körper gleicher Querschnittsfläche | 40 |
| 2.3.2 | Spitze Körper | 41 |

| | | |
|-------|------------------------------------|----|
| 2.3.3 | Stumpfe Körper | 42 |
| 2.3.4 | Kugelförmige Körper | 43 |
| 2.4 | Trigonometrische Beziehungen | 44 |
| 2.4.1 | Ähnliche Dreiecke | 44 |
| 2.4.2 | Rechtwinklige Dreiecke | 44 |
| 2.4.3 | Einheitskreis | 45 |
| 2.4.4 | Sinussatz und Kosinussatz | 46 |
| 2.4.5 | Winkelberechnung | 47 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 48 |
| 2.4.7 | Additionstheoreme | 49 |

3 Vektorrechnung

| | | |
|---------|---|----|
| 3.1 | Der Vektorbegriff | 51 |
| 3.2 | Darstellung von Vektoren im Raum | 52 |
| 3.3 | Verknüpfungen von Vektoren | 54 |
| 3.3.1 | Vektoraddition | 54 |
| 3.3.2 | Verbindungsvektor, Vektorsubtraktion | 56 |
| 3.3.3 | Skalare Multiplikation, S-Multiplikation | 57 |
| 3.3.4 | Einheitsvektor | 58 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 59 |
| 3.3.5 | Strecke, Mittelpunkt | 60 |
| 3.3.6 | Skalarprodukt | 61 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 63 |
| 3.4 | Lineare Abhängigkeit von Vektoren | 64 |
| 3.4.1 | Zwei Vektoren im Raum | 64 |
| 3.4.2 | Drei Vektoren im Raum | 65 |
| 3.4.3 | Vier Vektoren im Raum | 66 |
| 3.4.4 | Basisvektoren | 67 |
| 3.4.4.1 | Eigenschaften von linear unabhängigen Vektoren | 67 |
| 3.4.4.2 | Koordinatendarstellung von Vektoren | 68 |
| 3.5 | Orthogonale Projektion | 69 |
| 3.6 | Lotvektoren | 70 |
| 3.6.1 | Lotvektoren zu einem einzelnen Vektor | 70 |
| 3.6.2 | Lotvektoren einer Ebene | 71 |
| 3.7 | Vektorprodukt | 72 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 75 |
| 3.8 | Vektorgleichung einer Geraden im Raum | 76 |
| 3.9 | Orthogonale Projektion von Punkten und Geraden auf eine Koordinatenebene | 80 |
| 3.10 | Gegenseitige Lage von Geraden | 82 |
| 3.11 | Abstandsrechnungen | 87 |
| 3.11.1 | Abstand Punkt–Gerade und Lotfußpunkt | 88 |
| 3.11.2 | Kürzester Abstand zweier windschiefer Geraden | 89 |
| 3.11.3 | Abstand zwischen parallelen Geraden | 90 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 91 |
| 3.12 | Ebenengleichung | 92 |
| 3.12.1 | Vektorielle Parameterform der Ebene | 92 |
| 3.12.2 | Vektorielle Dreipunkteform einer Ebene | 93 |
| 3.12.3 | Parameterfreie Normalenform | 94 |
| 3.13 | Ebene–Punkt | 95 |

| | | |
|--------|---|-----|
| 3.13.1 | Punkt P liegt in der Ebene E | 95 |
| 3.13.2 | Kürzester Abstand eines Punktes P von der Ebene E | 95 |
| 3.14 | Ebene–Gerade | 96 |
| 3.14.1 | Gerade parallel zur Ebene | 96 |
| 3.14.2 | Gerade in der Ebene E | 97 |
| 3.14.3 | Gerade schneidet Ebene | 97 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 98 |
| 3.14.4 | Spiegelebene und Spiegelpunkt | 99 |
| 3.15 | Lagebezeichnung von Ebenen | 100 |
| 3.15.1 | Parallele Ebenen | 100 |
| 3.15.2 | Sich schneidende Ebenen | 100 |
| 3.15.3 | Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen | 101 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 102 |

4 Analysis

| | | |
|---------|--|-----|
| 4.1 | Potenzfunktionen | 103 |
| 4.2 | Wurzelfunktionen | 104 |
| 4.2.1 | Allgemeine Wurzelfunktionen | 104 |
| 4.2.2 | Quadratische Wurzelfunktionen | 105 |
| 4.3 | Ganzrationale Funktionen höheren Grades | 106 |
| 4.3.1 | Funktion dritten Grades | 106 |
| 4.3.2 | Funktion vierten Grades | 107 |
| 4.3.3 | Nullstellenberechnung | 107 |
| 4.3.3.1 | Nullstellenberechnung bei biquadratischen Funktionen | 107 |
| 4.3.3.2 | Nullstellenberechnung mit dem Satz vom Nullprodukt | 108 |
| 4.3.3.3 | Nullstellenberechnung durch Abspalten von Linearfaktoren | 109 |
| 4.3.3.4 | Numerische Methoden | 111 |
| 4.3.4 | Arten von Nullstellen | 113 |
| Ü | Überprüfen Sie ihr Wissen! | 114 |
| 4.4 | Gebrochenrationale Funktionen | 115 |
| 4.4.1 | Definitionsmenge | 115 |
| 4.4.2 | Definitionslücke | 115 |
| 4.4.3 | Polstellen | 115 |
| 4.4.4 | Grenzwerte | 116 |
| 4.4.5 | Grenzwertsätze | 117 |
| 4.4.6 | Asymptoten | 118 |
| Ü | Überprüfen Sie ihr Wissen | 119 |
| 4.5 | Exponentialfunktion | 120 |
| 4.6 | e-Funktion | 121 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 123 |
| 4.7 | Trigonometrische Funktionen | 124 |
| 4.7.1 | Sinusfunktion und Kosinusfunktion | 124 |
| 4.7.2 | Tangensfunktion und Kotangensfunktion | 125 |
| 4.7.3 | Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen | 125 |
| 4.7.4 | Allgemeine Sinusfunktion und Kosinusfunktion | 126 |
| 4.8 | Eigenschaften von Funktionen | 128 |
| 4.8.1 | Symmetrie bei Funktionen | 128 |
| 4.8.2 | Umkehrfunktionen | 129 |
| 4.8.3 | Monotonie und Umkehrbarkeit | 132 |
| 4.8.4 | Stetigkeit von Funktionen | 133 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 134 |

5 Differenzialrechnung

| | | |
|---------|---|-----|
| 5.1 | Erste Ableitung $f'(x)$ | 135 |
| 5.2 | Differenzialquotient | 136 |
| 5.3 | Ableitungsregeln | 138 |
| 5.3.1 | Anwendung der Ableitungsregel | 141 |
| 5.4 | Höhere Ableitungen | 143 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 145 |
| 5.5 | Newton'sches Näherungsverfahren (Tangentenverfahren) | 146 |
| 5.6 | Extremwertberechnungen | 147 |
| 5.6.1 | Extremwertberechnung mit einer Hilfsvariablen | 149 |
| 5.6.2 | Randextremwerte | 150 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 152 |
| 5.7 | Kurvendiskussion | 153 |
| 5.7.1 | Differenzierbarkeit von Funktionen | 153 |
| 5.7.2 | Monotonie | 154 |
| 5.7.3 | Hochpunkte und Tiefpunkte | 156 |
| 5.7.4 | Wendepunkte | 157 |
| 5.7.5 | Einparametrische Funktionenschar | 159 |
| 5.7.6 | Tangenten und Normalen | 162 |
| 5.7.6.1 | Tangenten und Normalen in einem Kurvenpunkt | 162 |
| 5.7.6.2 | Tangenten parallel zu einer Geraden | 163 |
| 5.7.6.3 | Anlegen von Tangenten an G_f von einem beliebigen Punkt aus | 164 |
| 5.7.6.4 | Zusammenfassung Tangentenberechnung | 165 |
| 5.7.7 | Ermittlung von Funktionsgleichungen | 166 |
| 5.7.7.1 | Ganzrationale Funktion | 166 |
| 5.7.7.2 | Ganzrationale Funktion mit Symmetrieeigenschaft | 169 |
| 5.7.7.3 | Exponentialfunktion | 170 |
| 5.7.7.4 | Sinusförmige Funktion | 171 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 172 |

6 Integralrechnung

| | | |
|-------|---|-----|
| 6.1 | Einführung in die Integralrechnung | 173 |
| 6.1.1 | Aufsuchen von Flächeninhaltsfunktionen | 174 |
| 6.1.2 | Stammfunktionen | 175 |
| 6.2 | Integrationsregeln | 176 |
| 6.2.1 | Potenzfunktionen | 176 |
| 6.2.2 | Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen | 176 |
| 6.3 | Das bestimmte Integral | 177 |
| 6.3.1 | Geradlinig begrenzte Fläche | 177 |
| 6.3.2 | „Krummlinig“ begrenzte Fläche | 178 |
| 6.4 | Berechnung von Flächeninhalten | 179 |
| 6.4.1 | Integralwert und Flächeninhalt | 179 |
| 6.4.2 | Integration verketteter Funktionen (Substitutionsregel) | 180 |
| 6.4.3 | Flächen für Graphen mit Nullstellen | 181 |
| 6.4.4 | Musteraufgabe zur Flächenberechnung | 182 |
| 6.4.5 | Regeln zur Vereinfachung bei Flächen | 183 |
| 6.4.6 | Integrieren mit variabler Grenze | 185 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 186 |
| 6.5 | Flächenberechnungen zwischen Graphen | 187 |
| 6.5.1 | Flächenberechnung im Intervall | 187 |
| 6.5.2 | Flächen zwischen zwei Graphen | 188 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 6.5.3 | Flächenberechnung mit der Differenzfunktion | 189 |
| 6.5.4 | Musteraufgabe zu gelifteten Graphen | 190 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 191 |
| 6.6 | Numerische Integration | 193 |
| 6.6.1 | Streifenmethode mit Rechtecken..... | 193 |
| 6.6.2 | Flächenberechnung mit Trapezen..... | 194 |
| 6.6.3 | Flächenberechnung mit Näherungsverfahren..... | 196 |
| 6.7 | Volumenberechnung..... | 197 |
| 6.7.1 | Rotation um die x-Achse | 197 |
| 6.7.2 | Rotation um die y-Achse | 200 |
| 6.8 | Anwendungen der Integralrechnung | 201 |
| 6.8.1 | Zeitintegral der Geschwindigkeit | 201 |
| 6.8.2 | Mechanische Arbeit W..... | 201 |
| 6.8.3 | Elektrische Ladung Q | 202 |
| 6.8.4 | Mittelwertsberechnungen | 202 |

7 Komplexe Rechnung

| | | |
|-----|---|-----|
| 7.1 | Darstellung komplexer Zahlen | 203 |
| 7.2 | Grundrechenarten mit komplexen Zahlen | 205 |
| 7.3 | Rechnen mit konjugiert komplexen Zahlen | 205 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 206 |

8 Prüfungsvorbereitung

| | | |
|-----|-------------------------------------|-----|
| 8.1 | Ganzrationale Funktionen..... | 207 |
| 8.2 | Exponentialfunktion | 209 |
| 8.3 | Goniometrische Gleichungen | 211 |
| 8.4 | Gebrochenrationale Funktionen | 212 |
| 8.5 | Vektoraufgabe Prisma..... | 213 |
| 8.6 | Vektoraufgabe Quader..... | 214 |
| 8.7 | Vektoraufgabe Pyramide | 215 |

9 Aufgaben aus der Praxis und Projektaufgaben

| | | |
|------|---|-----|
| 9.1 | Kostenrechnung | 216 |
| 9.2 | Optimierung einer Oberfläche | 217 |
| 9.3 | Optimierung einer Fläche..... | 217 |
| 9.4 | Flächenmoment..... | 218 |
| 9.5 | Sammellinse einer Kamera | 219 |
| 9.6 | Abkühlvorgang | 220 |
| 9.7 | Entladevorgang | 220 |
| 9.8 | Wintergarten..... | 221 |
| 9.9 | Bauvorhaben Kirche..... | 221 |
| 9.10 | Aushub Freibad | 221 |
| 9.11 | Berechnung von elektrischer Arbeit und Leistung | 222 |
| 9.12 | Sinusförmige Wechselgrößen..... | 222 |
| 9.13 | Effektivwertberechnung..... | 223 |

10 Projektaufgaben

| | | |
|------|---|-----|
| 10.1 | Pyramide..... | 224 |
| 10.2 | Kugelfangrichter für Luftgewehre | 225 |
| 10.3 | Anwendungen in der Differenzialrechnung | 226 |

11 Selbst Organisiertes Lernen Übungsaufgaben – Prüfungsaufgaben

| | | |
|---------|--|-----|
| 11.1 | Übungsaufgaben..... | 228 |
| 11.2 | Musterprüfungen | 227 |
| 11.1.1 | Algebraische Grundlagen..... | 228 |
| 11.1.2 | Mengen | 230 |
| 11.1.3 | Pfeildiagramme | 231 |
| 11.1.4 | Binomische Formeln | 232 |
| 11.1.5 | Quadratische Funktionen..... | 233 |
| 11.1.6 | Geometrische Grundlagen | 234 |
| 11.1.7 | Vektoren | 236 |
| 11.1.8 | Nullstellen | 240 |
| 11.1.9 | Potenzfunktionen..... | 241 |
| Ü | Überprüfen Sie Ihr Wissen! | 241 |
| 11.1.10 | Exponentialfunktionen..... | 242 |
| 11.1.11 | Sinusfunktion und Kosinusfunktion | 243 |
| 11.1.12 | Wurzelfunktionen | 244 |
| 11.1.13 | Zeitabhängige Sinusfunktion | 244 |
| 11.1.14 | Kurvendiskussion | 245 |
| 11.1.15 | Flächenberechnungen | 246 |
| 11.2 | Musterprüfungen | 247 |
| 11.2.1 | Kurvendiskussion mit ganzrationalen Funktionen | 247 |
| 11.2.2 | Extremwertberechnung mit ganzrationalen Funktionen | 248 |
| 11.2.3 | e-Funktionen | 249 |
| 11.2.4 | Sinusfunktionen | 251 |
| 11.2.5 | Gebrochenrationale Funktionen | 253 |
| 11.2.6 | e- und ln-Funktion verknüpft mit rationaler Funktion | 254 |
| 11.2.7 | Vektorrechnung | 255 |
| 11.2.8 | Extremwertaufgaben | 256 |

Anhang

| | |
|---|-----|
| Mathematische Zeichen, Abkürzungen und Formelzeichen..... | 257 |
| Literaturverzeichnis | 259 |
| Sachwortverzeichnis | 260 |

Mathematische Fachbegriffe

Ableitungsfunktion

Ist die Funktion $f'(x)$, deren Werte die Steigungen des Grafen der Funktion $f(x)$ angeben.

Abgestumpfte Körper

Kegelstumpf und Pyramidenstumpf werden so bezeichnet.

Achsenschnittpunkte

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, z.B. x-, y- oder z-Achse.

Äquivalenzumformung

Umformen von Gleichungen, bei denen sich die Lösungsmenge nicht ändert.

Arkus-Funktionen

Als Arkus-Funktionen z.B. $\arcsin x$, $\arctan x$, werden die Umkehrfunktionen der trigonometrischen $\sin x$, $\tan x$ Funktionen bezeichnet.

Asymptote

Eine Gerade, der sich eine ins Unendliche verlaufende Kurve beliebig nähert.

Biquadratische Gleichung

Es handelt sich um eine Gleichung 4. Grades mit nur geradzahligem Exponenten ($ax^4 + bx^2 + c = 0$).

Differenzenquotient

Ist die Steigung der Sekante durch zwei Punkte der Funktion.

Differenzialquotient

Grenzwert des Differenzenquotienten, entspricht der Steigung der Tangente.

Differenzierbarkeit von Funktionen

Eine Funktion ist differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle eine eindeutig bestimmte Tangente mit einer endlichen Steigung hat.

Ebenengleichung

Fläche, die z.B. durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, festgelegt ist.

e-Funktion

Exponentialfunktionen mit der Basis e, natürliche Exponentialfunktionen genannt.

Exponentialfunktion

Bei der Exponentialfunktion ist die Hochzahl die unabhängige Variable.

Funktion

Eindeutige Zuordnungen von Elementen nennt man Funktionen.

Ganze Zahlen

Sie können positiv, negativ oder null sein.

Ganzrationale Funktion

Ganzrationale Funktionen bestehen aus der Addition verschiedener Potenzfunktionen.

Gebrochenrationale Funktion

Bei einer gebrochenrationalen Funktion steht im Zähler das Zählerpolynom und im Nenner das Nennerpolynom.

Gerade

Der Funktionsgraph für die Darstellung linearer Zusammenhänge (lineare Funktion) heißt Gerade.

Gleichung

Eine Gleichung entsteht durch Verbindung zweier Terme durch ein Gleichheitszeichen.

Hesse'sche Normalenform HNF

In der Hesse'schen Normalenform der Ebenengleichung wird der Normaleneinheitsvektor statt des Normalenvektors verwendet.

Imaginäre Zahlen

Scheinbare (unvorstellbare) Zahlen, z.B. j ; $3j$; $-2j$.

Integrieren

Integrieren heißt, eine abgeleitete Funktion wieder in die ursprüngliche Form zurückzuführen.

Irrationale Zahlen

Sind Dezimalzahlen mit unendlich vielen, nichtperiodischen Nachkommaziffern, z.B. Wurzelzahlen, die Konstanten π und e.

Kartesische Koordinaten

Achsen stehen senkrecht aufeinander und haben die Einheit 1 LE.

Komplexe Zahlen

Zahlen, die reell und/oder imaginär sind.

Konstante Funktion

Funktionswert bleibt für alle x konstant.

Koordinatensystem

Mit Koordinaten (= Zahlen, die die Lage von Punkten angeben) lassen sich diese in einer Ebene oder im Raum eindeutig festlegen.

Lineare Funktion

Ganzrationale Funktion 1. Grades.

Lineares Gleichungssystem LGS

System von Lineargleichungen, deren Variablen die Hochzahl 1 enthalten.

Logarithmische Funktionen

Sie sind die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen.

Logarithmus

Logarithmieren heißt, die Hochzahl (= Exponent) einer bestimmten Potenz berechnen.

Natürliche Zahlen

Positive, ganze Zahlen einschließlich der Null.

Numerische Integration

Numerische Integration heißt, den Flächeninhalt näherungsweise berechnen, z.B. durch Auszählen von elementaren Teilflächen, wie Rechtecken oder Trapezen. (Anwendung, wenn keine Stammfunktion bekannt ist.)

Nullstellen

Die x-Werte der Schnittpunkte eines Funktionsgraphen mit der x-Achse nennt man Nullstellen.

Orthogonal

Rechtwinklig. Orthogonale (rechtwinklige) Geraden haben einen Winkel von 90° zueinander.

Parabel

Graph einer quadratischen Funktion.

Pol

Stelle, an der eine senkrechte Asymptote vorliegt.

Polynom

Eine andere Bezeichnung für "ganzrationale Funktion".

Potenz

Die Potenz ist die Kurzschreibweise für das Produkt gleicher Faktoren.

Potenzfunktionen

Sind Funktionen, von der Form $y = x^n$.

Quadranten

Zeichenebenen in Koordinatensystemen.

Quadratische Gleichung

Ist eine Gleichung 2. Grades ($ax^2 + bx + c = 0$).

Quadratwurzel

Beim Wurzelziehen (Radizieren) wird der Wert gesucht, der mit sich selbst multipliziert den Wert unter der Wurzel ergibt.

Rationale Zahlen

Zahlen, die durch Brüche darstellbar sind.

Reelle Zahlen

Zahlen, die rational oder irrational sind.

Relation

Eindeutige oder mehrdeutige Zuordnung.

Skalar

Größe, die durch einen bestimmten reellen Zahlenwert festgelegt ist.

Spitze Körper

Pyramide und Kegel werden als spitze Körper bezeichnet (Prismatische Körper).

Spurgerade

Die gemeinsamen Punkte (Schnittpunkte) einer Ebene mit einer Koordinatenebene bilden die Spurgerade.

Spurpunkte

Spurpunkte nennt man die Durchstoßpunkte (Schnittpunkte) einer Geraden mit den Koordinatenebenen.

Steigung

Als Steigung wird das Verhältnis des Δy -Wertes zum Δx -Wert eines Steigungsdreiecks, z.B. einer Tangente, bezeichnet.

Stetigkeit von Funktionen

Stetige Funktionen können durch einen lückenlosen, zusammenhängenden Kurvenzug dargestellt werden.

Term

Mathematischer Ausdruck, der aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen bestehen kann.

Trigonometrische Funktionen

Winkelfunktionen, z.B. $\sin x$, $\tan x$.

Umkehrfunktion

Funktion, bei der die Zuordnung der Variablen vertauscht wird.

Variable

Das sind Buchstaben, z.B. x , y , an deren Stelle Zahlen der Grundmenge gesetzt werden.

Vektor

Physikalische oder mathematische Größe, die durch einen Pfeil dargestellt wird und durch Richtung und Betrag festgelegt ist.

Wurzelfunktionen

Das sind Potenzfunktionen, die gebrochene Hochzahlen enthalten.

1 Algebraische Grundlagen

1.1 Term

Terme können Zahlen, z.B. -1 ; $\frac{1}{2}$; 2 oder Variablen, z.B. a ; x ; y , sein. Werden Terme durch Rechenoperationen verbunden, so entsteht wieder ein Term.

1.2 Gleichung

Eine Gleichung besteht aus einem Linksterm T_l und aus einem Rechtsterm T_r .

Werden zwei Terme durch das Gleichheitszeichen miteinander verbunden, so entsteht die Gleichung $T_l = T_r$.

Beispiel 1: Gleichung

Stellen Sie die beiden Terme T_l : $x + 2$ und T_r : -4 als Gleichung dar.

Lösung: $x + 2 = -4$

Werden an Gleichungen Rechenoperationen durchgeführt, so muss auf jeder Seite der Gleichung diese Rechenoperation durchgeführt werden (**Tabelle 1**). Eine Gleichung mit mindestens einer Variablen stellt eine Aussageform dar. Diese Aussageform kann eine wahre oder falsche Aussage ergeben, wenn den Variablen Werte zugeordnet werden.

Ein Wert x einer Gleichung heißt Lösung, wenn beim Einsetzen von x in die Gleichung eine wahre Aussage entsteht.

Beispiel 2: Lösung einer Gleichung

Ermitteln Sie die Lösung der Gleichung $x + 2 = -4$

Lösung: $x + 2 = -4 \quad | -2$
 $x + 2 - 2 = -4 - 2$
 $x = -6$

1.3 Definitionsmenge

Die Definitionsmenge eines Terms kann einzelne Werte oder ganze Bereiche aus der Grundmenge ausschließen (**Tabelle 2**).

Beispiel 3: Definitionsmenge

Die Definitionsmenge der Gleichung $\sqrt{x-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$; $x \in \mathbb{R}$ ist zu bestimmen.

Lösung: Die Definitionsmenge D_1 des Linksterms wird durch die Wurzel eingeschränkt.

$$D_1 = \{x | x \geq 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}$$

Die Definitionsmenge D_2 des Rechtsterms wird durch den Nenner eingeschränkt. $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
 Für die Gesamtdefinitionsmenge D gilt:

$$D = D_1 \cap D_2 = \{x | x > 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}$$

Tabelle 1: Rechenoperationen bei Gleichungen $T_l = T_r$

| Operation | Allgemein | Beispiel |
|----------------|---|---|
| Addition | $T_l + T = T_r + T$ | $x - a = 0 \quad +a$ $x - a + a = 0 + a$ $x = a$ |
| Subtraktion | $T_l - T = T_r - T$ | $x + a = 0 \quad -a$ $x + a - a = 0 - a$ $x = -a$ |
| Multiplikation | $T_l \cdot T = T_r \cdot T$ | $\frac{1}{2} \cdot x = 1 \quad \cdot 2$ $\frac{1}{2} \cdot x \cdot 2 = 1 \cdot 2$ $x = 2$ |
| Division | $\frac{T_l}{T} = \frac{T_r}{T}, T \neq 0$ | $2 \cdot x = 4 \quad : 2$ $\frac{2 \cdot x}{2} = \frac{4}{2}$ $x = 2$ |

Tabelle 2: Einschränkung des Definitionsbereichs in R

| Term | Einschränkung | Beispiel |
|--|--------------------------------------|--|
| Bruchterm $T_B = \frac{Z(x)}{N(x)}$ | $N(x) \neq 0$ | $T(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $x - 1 \neq 0$ $x \neq 1$ $D = \{x x \neq 1\}$ |
| Wurzelterm $T_W = \sqrt{x}$ | $x \geq 0$ x größer gleich 0 | $T(x) = \sqrt{x-1}$ $x - 1 \geq 0$ $x \geq 1$ $D = \{x x \geq 1\}$ |
| Logarithmusterm $T_L = \log_a x$ | $x > 0$ x größer 0 | $T(x) = \log_{10} x = \lg x$ $x > 0$ $D = \{x x > 0\}$ |

Bei Aufgaben aus der Technik oder Wirtschaft ergeben sich häufig einschränkende Bedingungen in technischer, technologischer oder ökonomischer Hinsicht. So kann die Zeit nicht negativ sein oder die Temperatur nicht kleiner -273°C werden. Diese eingegengte Definitionsmenge ist dann die eigentliche Definitionsmenge einer Gleichung.

Aufgaben:

1. Lösungsmenge. Bestimmen Sie die Lösung für $x \in \mathbb{R}$.

a) $4(2x - 6) = 2x - (x + 4)$

b) $(2x - 1)(3x - 2) = 6(x + 2)(x - 4)$

c) $\frac{x+2}{5} - 2 = 4$ d) $\frac{2-x}{2} + a = 1$

e) $\frac{2x-a}{4} - b = 2$ f) $\frac{3x-5}{5} = \frac{2x-3}{4}$

2. Lösen von Gleichungen. Lösen Sie die Gleichungen nach allen Variablen auf.

a) $h = \frac{1}{2}g \cdot t^2$

b) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

3. Definitions- und Lösungsmenge. Geben Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge an.

a) $\sqrt{2x+2} = \sqrt{4x-8}$ b) $\frac{3x-1}{x+2} = \frac{2-3x}{2-x}$

Lösungen:

1. a) $x = \frac{20}{7}$ b) $x = -10$ c) $x = 28$ d) $x = 2a$

e) $x = \frac{1}{2}a + 2b + 4$ f) $x = \frac{5}{2}$

2. a) $g = \frac{2h}{t^2}$; $t = \pm \sqrt{\frac{2h}{g}}$ b) $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$; $R_1 = \frac{R \cdot R_2}{R_2 - R}$; $R_2 = \frac{R \cdot R_1}{R_1 - R}$

3. a) $D = \{x | x \geq 2\}_{\mathbb{R}}$; $L = \{5\}$ b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$; $L = \left\{\frac{6}{11}\right\}$

1.4 Potenzen

1.4.1 Potenzbegriff

Die Potenz ist die Kurzschreibweise für das Produkt gleicher Faktoren. Eine Potenz besteht aus der Basis (Grundzahl) und dem Exponenten (Hochzahl). Der Exponent gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert werden muss.

Beispiel 1: Potenzschreibweise

Schreiben Sie

- a) das Produkt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ als Potenz und
- b) geben Sie den Potenzwert an.

Lösung: a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ b) $2^5 = 32$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-Faktoren}} = a^n$$

$$a^n = b$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

a Basis; $a > 0$ n Exponent
b Potenzwert

1.4.2 Potenzgesetze

Potenz mit negativem Exponenten

Eine Potenz, die mit positivem Exponenten im Nenner steht, kann auch mit einem negativen Exponenten im Zähler geschrieben werden. Umgekehrt kann eine Potenz mit negativem Exponenten im Zähler als Potenz mit positivem Exponenten im Nenner geschrieben werden.

Beispiel 2: Exponentenschreibweise

Schreiben Sie die Potenzterme a) 2^{-3} ; b) 10^{-3} mit entgegengesetztem Exponenten und geben Sie den Potenzwert an.

Lösung:

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$

b) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$

Beispiel 3: Physikalische Benennungen

Schreiben Sie folgende physikalischen Benennungen mit umgekehrtem Exponenten.

- a) $m \cdot s^{-2}$ b) $U \cdot \min^{-1}$ c) $\frac{m}{s}$

Lösung:

a) $m \cdot s^{-2} = \frac{m}{s^2}$ b) $U \cdot \min^{-1} = \frac{U}{\min}$ c) $\frac{m}{s} = m \cdot s^{-1}$

Addition und Subtraktion

Gleiche Potenzen oder Vielfaches von gleichen Potenzen, die in der Basis und im Exponenten übereinstimmen, lassen sich durch Addition und Subtraktion zusammenfassen (Tabelle 1).

Beispiel 4: Addition und Subtraktion von Potenztermen

Die Potenzterme $3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3$ sind zusammenzufassen.

Lösung: $3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3$
 $= (3 + 1 + 2)x^3 + (4 - 2)y^2 = 6x^3 + 2y^2$

| Tabelle 1: Potenzgesetze | |
|--|--|
| Regel, Definition | algebraischer Ausdruck |
| Addition und Subtraktion Potenzen dürfen addiert oder subtrahiert werden, wenn sie denselben Exponenten und dieselbe Basis haben. | $r \cdot a^n \pm s \cdot a^n = (r \pm s) \cdot a^n$ |
| Multiplikation Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert und die Basis beibehält. Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert und den Exponenten beibehält. | $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ |
| Division Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält. Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und den Exponenten beibehält. | $\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ |
| Potenzieren Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert. | $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ |
| Definition Jede Potenz mit dem Exponenten null hat den Wert 1. | $a^0 = 1$; für $a \neq 0$ |

Multiplikation von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Potenzen als Produkt schreibt und dann ausmultipliziert oder indem man die Exponenten addiert.

Beispiel 1: Multiplikation

Berechnen Sie das Produkt $2^2 \cdot 2^3$ und geben Sie den Potenzwert an.

Lösung:

$$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 32$$

$$\text{oder } 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$$

Beispiel 2: Flächen- und Volumenberechnung

- a) Die Fläche des Quadrates mit $a = 2 \text{ m}$ (Bild 1) und
 b) das Volumen des Würfels für $a = 2 \text{ m}$ ist zu berechnen.

Lösung:

a) $A = a \cdot a = a^1 \cdot a^1 = a^{1+1} = a^2$

$$A = 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 2 \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{m} = 2^2 \text{ m}^2 = 4 \text{ m}^2$$

b) $V = a \cdot a \cdot a = a^1 \cdot a^1 \cdot a^1 = a^{1+1+1} = a^3$

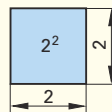
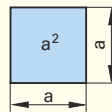
$$= 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{m} \cdot \text{m} = 2^3 \text{ m}^3 = 8 \text{ m}^3$$

$$(-a)^2 = a^2$$

$$-a^2 = -(a^2)$$

a Basis; $a > 0$

Fläche



Volumen

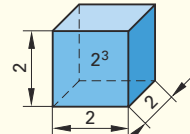
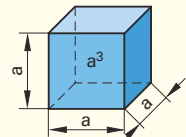


Bild 1: Fläche und Volumen

Werte

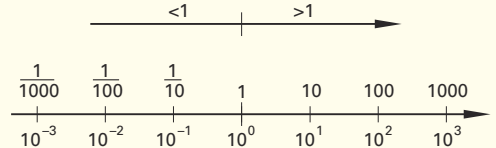


Bild 2: Zehnerpotenzen

Division von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man den Quotienten in ein Produkt umformt und dann die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder indem man den Nennerexponenten vom Zählerexponenten subtrahiert.

Beispiel 3: Division

Der Potenzterm $\frac{2^5}{2^3}$ ist zu berechnen.

Lösung:

$$\frac{2^5}{2^3} = 2^5 \cdot \frac{1}{2^3} = 2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

$$\text{oder } \frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

Tabelle 1: Zehnerpotenzen, Schreibweise

| ausgeschriebene Zahl | Potenz | Vorsatz bei Einheiten |
|----------------------|-----------|-----------------------|
| 1 000 000 000 | 10^9 | G (Giga) |
| 1 000 000 | 10^6 | M (Mega) |
| 1 000 | 10^3 | k (Kilo) |
| 100 | 10^2 | h (Hekto) |
| 10 | 10^1 | da (Deka) |
| 1 | 10^0 | – |
| 0,1 | 10^{-1} | d (Dezi) |
| 0,01 | 10^{-2} | c (Centi) |
| 0,001 | 10^{-3} | m (Milli) |
| 0,000 001 | 10^{-6} | μ (Mikro) |
| 0,000 000 001 | 10^{-9} | n (Nano) |

Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man das Produkt der Potenzen bildet und die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder indem man die Exponenten multipliziert.

Beispiel 4: Potenzieren

Berechnen Sie die Potenzterme

a) $(2^2)^3$ b) $(-3)^2$ c) -3^2

Lösung:

a) $(2^2)^3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6 = 64$

$$\text{oder } (2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$$

b) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$ c) $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$

Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Potenzen mit der Basis 10 werden sehr häufig als verkürzte Schreibweise für sehr kleine oder sehr große Zahlen verwendet. Werte größer 1 können als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten, Werte kleiner 1 als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten dargestellt werden (Bild 2 und Tabelle 1).

Beispiel 5: Zehnerpotenzen

Schreiben Sie die Zehnerpotenzen

a) 20 μH b) 10 ml c) 3 kHz

Lösung:

a) $20 \cdot 10^{-6} \text{ H}$ b) $10 \cdot 10^{-3} \text{ l}$ c) $3 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

1.5 Wurzelgesetze

1.5.1 Wurzelbegriff

Das Wurzelziehen oder Radizieren (von lat. radix = Wurzel) ist die Umkehrung des Potenzierens. Beim Wurzelziehen wird derjenige Wurzelwert gesucht, der mit sich selbst multipliziert den Wert unter der Wurzel ergibt. Eine Wurzel besteht aus dem Wurzelzeichen, dem Radikanden unter dem Wurzelzeichen und dem Wurzelexponenten. Bei Quadratwurzeln darf der Wurzelexponent 2 weggelassen werden

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}.$$

Eine Wurzel kann auch in Potenzschreibweise dargestellt werden. Deshalb gelten bei Wurzeln auch alle Potenzgesetze.

Beispiel 1: Potenzschreibweise und Wurzelziehen

Der Wurzelterm $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$ ist

- in Potenzschreibweise darzustellen und
- der Wert der Wurzel zu bestimmen.

Lösung:

$$a) \sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{4^1} = 4^{\frac{1}{2}} \quad b) \sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2; \text{ denn } 2 \cdot 2 = 4$$

1.5.2 Rechengesetze beim Wurzelrechnen

Addition und Subtraktion

Gleiche Wurzeln, die im Wurzelexponenten und im Radikand übereinstimmen, dürfen addiert und subtrahiert werden (**Tabelle 1**).

Beispiel 2: Addition und Subtraktion von Wurzeln

Die Wurzelterme $3\sqrt{a}$, $-2\sqrt[3]{b}$, $+2\sqrt{a}$, $+4\sqrt[3]{b}$ sind zusammenzufassen.

Lösung:

$$3\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{b} + 2\sqrt{a} + 4\sqrt[3]{b} = (3+2)\sqrt{a} + (4-2)\sqrt[3]{b} = 5\sqrt{a} + 2\sqrt[3]{b}$$

Multiplikation und Division von Wurzeln

Ist beim Wurzelziehen der Radikand ein Produkt, so kann entweder aus dem Produkt oder aus jedem einzelnen Faktor die Wurzel gezogen werden. Bei einem Quotienten kann die Wurzel auch aus Zählerterm und Nennerterm gezogen werden (**Tabelle 1**).

Beispiel 3: Multiplikation und Division

Berechnen Sie aus den Wurzeltermen $\sqrt{9 \cdot 16}$ und $\sqrt{\frac{9}{16}}$ den Wert der Wurzel.

Lösung:

$$\begin{aligned} \sqrt{9 \cdot 16} &= \sqrt{144} = 12 \\ \text{oder } \sqrt{9 \cdot 16} &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12 \\ \sqrt{\frac{9}{16}} &= 0,75 \\ \text{oder } \sqrt{\frac{9}{16}} &= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} = 0,75 \end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{a} = x; a \geq 0$$

n Wurzelexponent

x Wurzelwert

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; a \geq 0$$

a Radikand, Basis

m, $\frac{m}{n}$ Exponent

Tabelle 1: Wurzelgesetze

| Regel | algebraischer Ausdruck |
|---|---|
| Addition und Subtraktion Wurzeln dürfen addiert und subtrahiert werden, wenn sie gleiche Exponenten und Radikanden haben. | $r \cdot \sqrt[n]{a} \pm s \cdot \sqrt[n]{a} = (r \pm s) \cdot \sqrt[n]{a}$ |
| Multiplikation Ist der Radikand ein Produkt, kann die Wurzel aus dem Produkt oder aus jedem Faktor gezogen werden. | $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ |
| Division Ist der Radikand ein Quotient, kann die Wurzel aus dem Quotienten oder aus Zähler und Nenner gezogen werden. | $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ |
| Potenzieren Beim Potenzieren einer Wurzel kann auch der Radikand potenziert werden. | $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ |

Allgemeine Lösung des Wurzelterms $\sqrt[n]{a^n}$

Bei der Lösung des Wurzelterms $\sqrt[n]{a^n}$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

gerader Exponent: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

ungerader Exponent: $\sqrt[n]{a^n} = a$

Das Ergebnis einer Quadratwurzel ist immer positiv.

Beispiel 4: Zwei Lösungen

Warum müssen beim Wurzelterm $\sqrt[n]{a^2}$ zwei Fälle unterschieden werden?

Lösung:

$$\sqrt[n]{a^2} = |a|$$

Fall 1: **a für a > 0**

Fall 2: **-a für a < 0**

Beispiel 1: Für $|a| = 2$ gilt $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{(2)^2} = \sqrt{4} = 2$

1.6 Binomische Formeln

Binomische Formeln finden Anwendung in der Algebra z.B. beim Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken und bei der Vereinfachung von Bruchtermen. Die Formeln lassen sich aus den Distributivgesetzen der Multiplikation herleiten. Der Begriff „Binom“ geht zurück auf die in den Klammertermen $(a + b)$, $(a - b)$ und $(a + b) \cdot (a - b)$ vorkommenden 2 (lat. *bi*) Variablen a und b .

1. Binomische Formel

Beispiel 1: Anwendung der 1. Binomischen Formel

Lösen Sie folgende Klammerterme auf:

a) $(3 + 6)^2$ b) $(x + 2)^2$ c) $(3x + 5y)^2$

Lösung:

a) $(3 + 6)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 6 + 6^2 = 81$

b) $(x + 2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$

c) $(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot (5y) + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$

Bild 1 veranschaulicht die 1. Binomische Formel: Die gesamte Quadratfläche $(a + b)^2$ setzt sich zusammen aus der roten und der gelben Quadratfläche $a^2 + b^2$ und den beiden grünen Rechteckflächen $2ab$, d.h. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2. Binomische Formel

Beispiel 2: Anwendung der 2. Binomischen Formel

Lösen Sie folgende Klammertexte auf:

a) $(3a - 4)^2$ b) $(5u - 3v)^2$ c) $(\frac{2}{3}p - \frac{5}{4}q)^2$

Lösung:

a) $(3a - 4)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot (3a) \cdot 4 + 4^2 = 9a^2 - 24a + 16$

b) $(5u - 3v)^2 = (5u)^2 - 2 \cdot (5u) \cdot (3v) + (3v)^2 = 25u^2 - 30uv + 9v^2$

c) $(\frac{2}{3}p - \frac{5}{4}q)^2 = (\frac{2}{3}p)^2 - 2 \cdot (\frac{2}{3}p) \cdot (\frac{5}{4}q) + (\frac{5}{4}q)^2 = \frac{4}{9}p^2 - \frac{5}{3}pq + \frac{25}{16}q^2$

Bild 2 veranschaulicht die 2. Binomische Formel: Zieht man von der gesamten Quadratfläche a^2 die beiden Rechteckflächen $2(a - b)b$ und die gelbe Quadratfläche b^2 ab, verbleibt die rote Quadratfläche $(a - b)^2$, d.h.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2(a - b)b - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. Binomische Formel

Bild 3 veranschaulicht die 3. Binomische Formel: Die blaue Differenzfläche $a^2 - b^2$ im linken Teil der Grafik setzt sich aus 2 gleichgroßen Trapezflächen zusammen,

1. Binomische Formel (Plus-Formel):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Binomische Formel (Minus-Formel):

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. Binomische Formel (Plus-Minus-Formel):

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

a, b Variable ($a, b \in \mathbb{R}$)

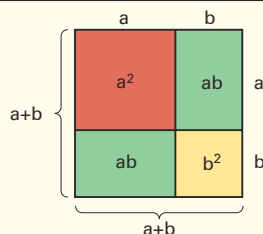


Bild 1: 1. Binomische Formel

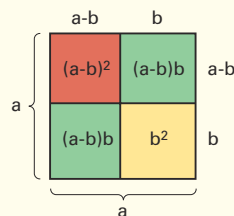


Bild 2: 2. Binomische Formel

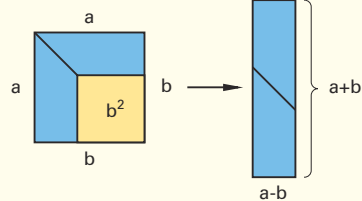


Bild 3: 3. Binomische Formel

Beispiel 3: Anwendung der 3. Binomischen Formel

Lösen Sie folgende Klammerterme auf:

a) $(3a + 4) \cdot (3a - 4)$ b) $(7q + 5a) \cdot (7q - 5a)$

c) $(5e - 6f) \cdot (5e + 6f)$

Lösung:

a) $(3a + 4) \cdot (3a - 4) = (3a)^2 - 4^2 = 9a^2 - 16$

b) $(7q + 5a) \cdot (7q - 5a) = (7q)^2 - (5a)^2 = 49q^2 - 25a^2$

c) $(5e - 6f) \cdot (5e + 6f) = (5e)^2 - (6f)^2 = 25e^2 - 36f^2$

men, die auch zu einer Rechteckfläche $(a + b) \cdot (a - b)$ angeordnet werden können, d.h. $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

1.6 Binomische Formeln

So wie für $(a + b)^2$ lassen sich auch für $(a + b)^3$ und höhere Potenzen binomische Formeln herleiten.

Binomischer Lehrsatz

Beispiel 1: Binomische Formel für $(a + b)^3$

Lösen Sie mithilfe der 1. binomischen Formel $(a + b)^3$ auf.

Lösung:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Nachfolgend sind einige binomische Formeln aufgelistet:

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

\vdots

Der Exponent (Hochzahl) der a-Potenzen fällt von einem Glied zum nächsten, während der Exponent der b-Potenzen wächst, wobei die Summe beider Exponenten konstant bleibt. Am Beispiel von $(a+b)^4$ hieße das: die Summe beider Exponenten ist 4 in jedem Glied (beachte, a^4 kann man sich auch geschrieben denken als a^4b^0 und b^4 als a^0b^4). Die blau markierten Zahlen heißen **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ (gelesen n über k); n steht für den Grad der Potenz und k ($0 \leq k \leq n$) für das betreffende Glied der Reihe. Damit lässt sich die binomische Formel z.B. für $n = 4$ auch in der Form schreiben (**Binomischer Lehrsatz**):

$$(a + b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4.$$

Beispiel 2: Binominalkoeffizienten berechnen

Berechnen Sie die ersten 3 Koeffizienten von $(a + b)^4$.

Lösung:

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0! \cdot (4-0)!} = \frac{24}{1 \cdot 24} = 1, \quad \binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot (4-1)!} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{24}{1 \cdot 6} = 4, \quad \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

Beispiel 3: Binominalkoeffizienten berechnen und Formel aufstellen

Stellen Sie analog zu $n = 4$ den Binomischen Lehrsatz für $n = 5$ auf.

Lösung:

$$(a + b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Fakultät

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

$$0! = 1; 1! = 1$$

Binominalkoeffizienten ($n, k \in \mathbb{N}; k \leq n$)

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

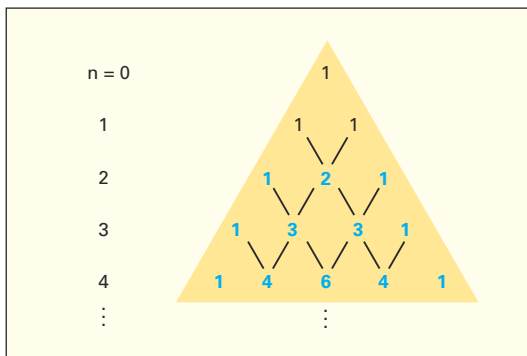


Bild 1: Pascal'sches Dreieck

Pascal'sches Dreieck

Ordnet man, beginnend mit

$$(a + b)^0 = 1 \text{ und } (a + b)^1 = 1a + 1b,$$

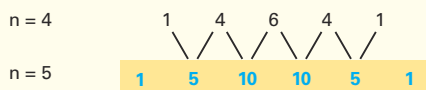
die Koeffizienten dreieckförmig untereinander an, entsteht das **Pascal'sche Dreieck** (Bild 1). Die Zahlen einer jeden Zeile erhält man, indem die zwei benachbarten Zahlen der darüber stehenden Zeile addiert werden. Auf diese Weise lässt sich das Dreieck Zeile um Zeile erweitern, ohne auf Berechnungsformeln zurückgreifen zu müssen. Dieses Hilfsmittel stellt somit eine „formelfreie“ Alternative zur algebraischen Bestimmung der Binomialkoeffizienten dar.

Beispiel 4: Pascal'sches Dreieck fortsetzen

Stellen Sie die Koeffizientenzeile für $n = 5$ (Bild 1) dar und vergleichen Sie das Ergebnis mit Beispiel 3.

Lösung:

Ausgehend von der Zeile für $n = 4$, gelangt man gemäß des oben beschriebenen Bildungsprinzips zur Folgezeile für $n = 5$:



Diese Werte stimmen mit den in Beispiel 3 berechneten Binomialkoeffizienten überein.

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

1. Leiten Sie die ersten beiden binomischen Formeln aus dem Distributivgesetz der Multiplikation her.

2. Lösen Sie mithilfe der binomischen Formeln die Klammern auf und fassen Sie dann zusammen.

a) $-3(a+b)^2 + 6ab$; b) $(a+b)^2 - (a-b)^2 - 3ab$

c) $(5u+3v)(5u-3v) - 24u^2 + 8v^2$

d) $4(a+3)(a+1)(a-3) + 36(a+1)$

3. Faktorisieren Sie, d. h. wandeln Sie Summen oder Differenzen in Produkte um (Binomische Formeln rückwärts).

a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ b) $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{5}ab + \frac{1}{25}b^2$

c) $3x^2 + 12x + 12$ d) $9p^2 - 42pq + 49q^2$

e) $\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{3}pq + \frac{1}{9}q^2$ f) $20v^2 - 60vw + 45w^2$

g) $64x^2 - 144y^2$ h) $\frac{9}{16}u^2 - \frac{1}{25}v^2$

i) $7a^2 - 63b^2$

4. Vereinfachen Sie soweit wie möglich durch Ausklammern, Produktbildung und Kürzen.

a) $\frac{x^2 + 10x + 25}{3x + 15}$

b) $\frac{2x^2 - 24xy + 72y^2}{8x - 48y}$

c) $\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$

d) $\frac{u^2 - 9v^2}{u^2 + 6uv + 9v^2}$

e) $\frac{4a^2 - 28ab + 49b^2}{4ab - 14b^2}$

f) $\frac{ax + bx + ay + by}{x^2 - y^2}$

5. Leiten Sie Binomische Formeln her für

a) $(a-b)^3$

b) $(a-b)^4$

Hinweis: Verwenden Sie die bereits bekannten Binomischen Formeln für $(a+b)^3$ und $(a+b)^4$ (**vorhergehende Seite**) und ersetzen Sie hierin b durch $(-b)$.

6. Lösen Sie mithilfe des Binomischen Lehrsatzes die Klammerterme auf:

a) $(3x+2)^4$ b) $(x-2y)^4$ c) $(x-y)^5$

Lösungen:

1. Erste Binomische Formel:

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = \overset{\text{a}}{\underset{\text{b}}{\text{a}}} \cdot \overset{\text{a}}{\underset{\text{b}}{\text{a}}} + \overset{\text{a}}{\underset{\text{b}}{\text{a}}} \cdot \overset{\text{a}}{\underset{\text{b}}{\text{b}}} + \overset{\text{a}}{\underset{\text{b}}{\text{b}}} \cdot \overset{\text{a}}{\underset{\text{b}}{\text{a}}} + \overset{\text{a}}{\underset{\text{b}}{\text{b}}} \cdot \overset{\text{a}}{\underset{\text{b}}{\text{b}}} = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Zweite Binomische Formel:

$$(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = \overset{\text{a}}{\underset{\text{b}}{\text{a}}} \cdot \overset{\text{a}}{\underset{\text{b}}{\text{a}}} + \overset{\text{a}}{\underset{\text{b}}{\text{a}}} \cdot \overset{\text{a}}{\underset{\text{b}}{\text{b}}} + \overset{\text{a}}{\underset{\text{b}}{\text{b}}} \cdot \overset{\text{a}}{\underset{\text{b}}{\text{a}}} + \overset{\text{a}}{\underset{\text{b}}{\text{b}}} \cdot \overset{\text{a}}{\underset{\text{b}}{\text{b}}} = a^2 - 2ab + b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

Fortsetzung Lösungen:

2. a) $-3a^2 - 3b^2$; b) ab ; c) $u^2 - v^2$; d) $4a^3 + 4a^2$

3. a) $(2x+3y)^2$; b) $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{5}b)^2$; c) $3(x+2)^2$

d) $(3p-7q)^2$; e) $(\frac{1}{2}p - \frac{1}{3}q)^2$; f) $5(2v-3w)^2$

g) $(8x+12y)(8x-12y)$; h) $(\frac{3}{4}u + \frac{1}{5}v)(\frac{3}{4}u - \frac{1}{5}v)$

i) $7(a+3b)(a-3b)$

4. a) $\frac{x^2 + 10x + 25}{3x + 15} = \frac{(x+5)^2}{3(x+5)} = \frac{1}{3}(x+5)$

b) $\frac{2x^2 - 24xy + 72y^2}{8x - 48y} = \frac{2(x^2 - 12xy + 36y^2)}{8(x-6y)} = \frac{1}{4}(x-6y)$

c) $\frac{(x-1)^2}{x^2-1} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-1}{x+1}$

d) $\frac{u^2 - 9v^2}{u^2 + 6uv + 9v^2} = \frac{(u+3v) \cdot (u-3v)}{(u+3v)^2} = \frac{u-3v}{u+3v}$

e) $\frac{4a^2 - 28ab + 49b^2}{4ab - 14b^2} = \frac{(2a-7b)^2}{2b(2a-7b)} = \frac{2a-7b}{2b}$

f) $\frac{ax + bx + ay + by}{x^2 - y^2} = \frac{(a+b)x + (a+b)y}{(x+y)(x-y)} = \frac{a+b}{x-y}$

5. a) $(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

b) $(a-b)^4 = a^4 + 4a^3(-b) + 6a^2(-b)^2 + 4a(-b)^3 + (-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

6. a) $(3x+2)^4 = \binom{4}{0}(3x)^4 + \binom{4}{1}(3x)^3 \cdot 2 + \binom{4}{2}(3x)^2 \cdot 2^2 + \binom{4}{3}(3x) \cdot 2^3 + \binom{4}{4}2^4$
 $= 81x^4 + 4 \cdot 27x^3 \cdot 2 + 6 \cdot 9x^2 \cdot 4 + 4 \cdot 3x \cdot 8 + 16$
 $= 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16$

b) $(x-2y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3(-2y) + \binom{4}{2}x^2(-2y)^2 + \binom{4}{3}x(-2y)^3 + \binom{4}{4}(-2y)^4$
 $= x^4 - 4x^3 \cdot 2y + 6x^2 \cdot 4y^2 - 4x \cdot 8y^3 + 16y^4$
 $= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$

c) $(x-y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4(-y) + \binom{5}{2}x^3(-y)^2 + \binom{5}{3}x^2(-y)^3 + \binom{5}{4}x(-y)^4 + \binom{5}{5}(-y)^5$
 $= x^5 + 5x^4(-y) + 10x^3(-y)^2 + 10x^2(-y)^3 + 5x(-y)^4 + (-y)^5$
 $= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

1.7 Logarithmengesetze

1.7.1 Logarithmusbegriff

Der Logarithmus (von griech. logos = Verhältnis und arithmos = Zahl) ist der Exponent (Hochzahl), mit der man die Basis (Grundzahl) a potenzieren muss, um den Numerus (Potenzwert, Zahl) zu erhalten.

Einen Logarithmus berechnen heißt den Exponenten (Hochzahl) einer bestimmten Potenz zu berechnen.

Für das Wort Exponent wurde der Begriff Logarithmus eingeführt.

Beispiel 1: Logarithmus

Suchen Sie in der Gleichung $2^x = 8$ die Hochzahl x , sodass die Gleichung eine wahre Aussage ergibt.

Lösung:

$$2^x = 8; 2^3 = 8; \Rightarrow x = 3$$

Die Sprechweise lautet: x ist der Exponent zur Basis 2, der zum Potenzwert 8 führt.

Die Schreibweise lautet: $x = \log_2 8 = 3$

1.7.2 Rechengesetze beim Logarithmus

Die Logarithmengesetze ergeben sich aus den Potenzgesetzen und sind für alle definierten Basen gültig (**Tabelle 1**).

Mit dem Taschenrechner können Sie den Logarithmus zur Basis 10 und zur Basis e bestimmen. Dabei wird \log_{10} mit \log und \log_e mit \ln abgekürzt (**Tabelle 2**).

Multiplikation

Wird von einem Produkt der Logarithmus gesucht, so ist dies gleich der Summe der einzelnen Faktoren.

Beispiel 2: $\log_{10} 1000$

Bestimmen Sie den Logarithmus von 1000 zur Basis 10

- mit dem Taschenrechner und
- interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

a) Eingabe: 1000 log oder log 1000 (taschenrechnerabhängig)

Anzeige: 3 $\Rightarrow \log_{10} 1000 = 3$

Wird der Wert 1000 faktorisiert, z. B. in $10 \cdot 100$, gilt Folgendes: $\log_{10} 1000 = \log_{10} (10 \cdot 100)$

$$= \log_{10} 10 + \log_{10} 100 = 1 + 2 = 3$$

b) $\log_{10} 1000 = 3$, denn $10^3 = 1000$

Quotient

Wird von einem Quotienten der Logarithmus gesucht, so ist dies gleich der Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner.

Bei der Berechnung eines Logarithmus kann die Eingabe der Gleichung, abhängig vom Taschenrechner, unterschiedlich sein.

$$x = \log_a b$$

x Logarithmus (Hochzahl)

b Numerus (Zahl)

$$a^x = b$$

a Basis; $a > 0$

Tabelle 1: Logarithmengesetze

| Regel | algebraischer Ausdruck |
|--|--|
| Produkt Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren. | $\log_a (u \cdot v)$ $= \log_a u + \log_a v$ |
| Quotient Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner. | $\log_a \left(\frac{u}{v}\right)$ $= \log_a u - \log_a v$ |
| Potenz Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Potenzbasis. | $\log_a u^v = v \cdot \log_a u$ |

Tabelle 2: Spezielle Logarithmen

| Basis | Art | Schreibweise | Taschenrechner |
|-------|-------------------------|------------------|----------------|
| 10 | Zehnerlogarithmus | \log_{10} ; lg | log-Taste |
| e | Natürlicher Logarithmus | \log_e ; ln | ln-Taste |
| 2 | Binärer Logarithmus | \log_2 ; lb | — |

Beispiel 3: Division

Berechnen Sie $\log_{10} \left(\frac{10}{100}\right)$ mit dem Taschenrechner.

$$\text{Lösung: } \log_{10} \left(\frac{10}{100}\right) = \log_{10} 10 - \log_{10} 100$$

Eingabe: 10 log - 100 log =

Anzeige: 1 2 -1

$$\Rightarrow \log_{10} 10 - \log_{10} 100 = 1 - 2 = -1$$

oder durch Ausrechnen des Numerus $\left(\frac{10}{100}\right) = 0,1$

Eingabe: 0,1 log

Anzeige: -1

$$\Rightarrow \log_{10} 0,1 = -1$$

Potenz

Soll der Logarithmus von einer Potenz genommen werden, so gibt es die Möglichkeit, die Potenz zu berechnen und dann den Logarithmus zu nehmen oder das Rechengesetz für Logarithmen anzuwenden und dann die Berechnung durchzuführen.

Beispiel 1: Berechnung einer Potenz

Berechnen Sie den Logarithmus der Potenz 10^2 zur Basis 10

- durch Ausrechnen der Potenz und
- durch Anwendung der Rechengesetze für Logarithmen.

Lösung:

- $\log_{10} 10^2 = \log_{10} 100 = 2$
- $\log_{10} 10^2 = 2 \cdot \log_{10} 10 = 2 \cdot 1 = 2$

Beispiel 2: Berechnung einer Wurzel

Der Logarithmustrm $\log_{10} \sqrt[3]{1000}$ ist zu berechnen

- in Wurzelschreibweise,
- in Potenzschreibweise.

Lösung:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1000} &= 10 \Rightarrow \log_{10} \sqrt[3]{1000} = \log_{10} 10 = 1 \text{ oder} \\ \log_{10} \sqrt[3]{1000} &\text{ kann umgeformt werden in } \log_{10} (1000)^{\frac{1}{3}} \\ \Rightarrow \log_{10} \sqrt[3]{1000} &= \log_{10} (1000)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_{10} 1000 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \end{aligned}$$

1.7.3 Basisumrechnung beim Logarithmus

Der Taschenrechner bietet zur Berechnung der Logarithmen nur die Basis 10 ($\log_{10} = \log$) und die Basis e ($\log_e = \ln$) an.

In der Physik oder Technik sind jedoch andere Basen erforderlich. Um Berechnungen mit dem Taschenrechner durchführen zu können, muss die Basis so umgeformt werden, dass Lösungen mit log oder ln möglich sind.

Beispiel 3: Logarithmus mit der Basis 2

Berechnen Sie $\log_2 8$ mit dem Taschenrechner.

Lösung:

Die Berechnung kann a) mit log oder b) mit ln durchgeführt werden.

$$a) \log_2 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 2} = \frac{\log 8}{\log 2}$$

Eingabe: z.B. 8 log : 2 log =

Anzeige: 0,903089987 0,301029995 3

$$\Rightarrow \log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{0,90309}{0,30103} = 3$$

$$b) \log_2 8 = \frac{\log_e 8}{\log_e 2} = \frac{\ln 8}{\ln 2}$$

Eingabe: z.B. 8 ln : 2 ln =

Anzeige: 2,07944154 0,69314718 3

$$\Rightarrow \log_2 8 = \frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{2,07944154}{0,69314718} = 3$$

$$\log_a b = \frac{\log_u b}{\log_u a}$$

a, u Basen

a, b Numerus (Zahl)

Bei der Basisumrechnung können die Basen der Logarithmen auf dem Taschenrechner verwendet werden. Es gilt:

$$\log_a b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} = \frac{\log b}{\log a}$$

$$\log_a b = \frac{\log_e b}{\log_e a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Aufgaben:

- Die Gleichungen $x = \log_a b$ und $b = a^x$ sind gleichwertig. Geben Sie in der **Tabelle 1** für die Aufgaben a) bis d) jeweils die gleichwertige Beziehung und die Lösung an.

Tabelle 1: Gleichwertigkeit und Lösung

| | $x = \log_2 8$ | $8 = 2^x$ | $8 = 2^3$ | $x = 3$ |
|----|-----------------------|------------------|-----------|---------|
| a) | $x = \log_2 32$ | | | |
| b) | $x = \log_2 \sqrt{2}$ | | | |
| c) | | $81 = 3^x$ | | |
| d) | | $10^{-3} = 10^x$ | | |

- Geben Sie den Logarithmus an und überprüfen Sie die Ergebnisse durch Potenzieren.

a) $\log_{10} 1$ b) $\log_{10} 10$ c) $\log_e 1$ d) $\log_3 \frac{1}{27}$

- Zerlegen Sie die Logarithmenterme nach den gültigen Logarithmengesetzen.

a) $\log_a (3 \cdot u)$ b) $\log_a \frac{1}{u}$ c) $\log_a \frac{u^3}{\sqrt{2}}$

- Berechnen Sie mit dem Taschenrechner:

a) $\log 16$ b) $\log 111$ c) $\log 8^2$ d) $\log \sqrt{100}$
e) $\ln 16$ f) $\ln 111$ g) $2 \cdot \ln 8$ h) $\ln 8^2$

- Mit dem Taschenrechner sind zu berechnen:

a) $\log_2 12$ b) $\log_3 12$ c) $\log_4 12$ d) $\log_5 12$

Lösungen:

- a) $32 = 2^x$; $x = 5$ b) $\sqrt{2} = 2^x$; $x = \frac{1}{2}$
c) $x = \log_3 81$; $x = 4$ d) $x = \log_{10} 10^{-3}$; $x = -3$
- a) 0, denn $10^0 = 1$ b) 1, denn $10^1 = 10$
c) 0, denn $e^0 = 1$ d) -3, denn $3^{-3} = \frac{1}{27}$
- a) $\log_a 3 + \log_a u$
b) $-\log_a u$
c) $3 \cdot \log_a u - 2 \cdot \log_a v$
- a) 1,204 12 b) 2,045 32 c) 1,806 18 d) 1
e) 2,772 59 f) 4,709 53 g) 4,158 88 h) 4,158 88
- a) 3,584 96 b) 2,261 86 c) 1,792 48 d) 1,543 9

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

Gleichungen

1. Bestimmen Sie aus den Gleichungen die Lösung
- a) $(x + 2)^2 + 6 = x^2 + 20$ b) $\frac{4(17 + 20x)}{11} = 8$
- c) $\frac{6(x + 7)}{17(x - 4)} = 1$ d) $\frac{4x}{5} - \frac{3}{4} = \frac{2x + 3}{4} + 6$
2. Lösen Sie die Gleichungen nach den geforderten Größen auf.
- a) $F_1 = \frac{F_2 \cdot h}{2 \cdot \pi \cdot R}$ Auflösen nach h und nach R
- b) $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ Auflösen nach h
- c) $H = \frac{l \cdot N^2}{\sqrt{4r^2 + l^2}}$ Auflösen nach l und l
- d) $A = \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot b$ Auflösen nach l_2 und b

Definitions- und Lösungsmenge

3. Geben Sie die Definitionsmenge folgender Terme an.
- a) $\sqrt{2x + 100}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2x + 100}}$ c) $\log_a (x + 2)$
4. Bestimmen Sie die Definitionsmenge und geben Sie die Lösung der Gleichung an.
- a) $\frac{x-9}{x} = \frac{4}{5}$ b) $\frac{15ac}{x} = \frac{9bc}{6bd}$
- c) $\sqrt{x+1} - 2 = \sqrt{x-11}$ d) $7 + 4 \cdot \sqrt{x+7} = 23$

Potenzen

- 5.** Schreiben Sie die Potenzterme und physikalischen Benennungen nur mit positiven Exponenten.
a) $2 \cdot 10^{-2}$ **b)** min^{-1} **c)** $\frac{a^2 b c^2}{(a+b)^{-1}}$
- 6.** Schreiben Sie die Potenzterme und physikalischen Benennungen mit umgekehrtem Exponenten.
a) 10^{-2} **b)** $\frac{1}{10^3}$ **c)** $\frac{1}{\text{m}}$ **d)** $\frac{\text{V}}{\text{m}}$
- 7.** Geben Sie die Zahlen in Zehnerpotenzen an.
a) Rauminhalt der Erde:
 $1083\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,\text{m}^3$
b) Oberfläche der Erde: $510\,000\,000\,000\,000\,\text{m}^2$
c) Entfernung Erde–Sonne: $149\,500\,000\,000\,\text{m}$
- 8.** Vereinfachen Sie die Terme.
a) $\frac{(a+b)^0}{2^{-1}}$ **b)** $\frac{x \cdot x^2}{(n^2 \cdot x)^{-1}}$ **c)** $\frac{x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot y^3}{y^{n+2} \cdot x^{m+2}}$
d) $\frac{n^{-2} + x}{n^{x-1}}$ **e)** $((n^2)^{-1}) \cdot n^a - 2$ **f)** $\frac{(n^4 \cdot m^2)^{-3}}{(n^2 m^3)^5}$
- 9.** Vereinfachen Sie die Wurzeln unter Verwendung der Potenzschreibweise.
a) $\sqrt[3]{\frac{x^{-3}}{x^{-9}}}$ **b)** $n+m \sqrt{(x^2)^{3n+3m}}$ **c)** $\frac{a^n}{\sqrt[3]{3^{n(a+b)}}}$

Logarithmengesetze

10. Geben Sie den Logarithmus an und überprüfen Sie die Ergebnisse durch Potenzieren.
a) $\log_{10} 100$ b) $\log_{10} 300$ c) $\log_e 2,718$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 32$
11. Zerlegen Sie die Logarithmusterme in Summen, Differenzen und Produkte.
a) $\log_a(u^2)$ b) $\log_a \frac{m^2 \cdot \sqrt{n}}{p^3}$ c) $\log_a \sqrt[3]{n^2}$
12. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner
a) $3 \cdot \log 10$ b) $\log 8^4$ c) $\ln \sqrt[5]{500}$ d) $\ln 5^{30}$
13. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner
a) $\log_2 256$ b) $\log_7 4$ c) $\log_{16} 256$ d) $\log_8 \sqrt{6400}$

Lösungen:

1. **a)** $x = 2,5$ **b)** $x = \frac{1}{4}$ **c)** $x = 10$ **d)** $x = 25$
2. **a)** $h = \frac{F_1 2\pi R}{F_2}$; $R = \frac{F_2 h}{F_1 2\pi}$ **b)** $h = \frac{v^2}{2g}$
3. **a)** $l = \frac{H \cdot \sqrt{4r^2 + l^2}}{N^2}$; $l = \pm \sqrt{\frac{l^2 N^4}{H^2} - 4r^2}$
4. **a)** $b = \frac{2A}{l_1 + l_2}$; $l_2 = \frac{2A}{b} - l_1$
5. **a)** $x \geq -50$ **b)** $x > -50$ **c)** $x > -2$
6. **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $x = 45$
7. **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b, d \neq 0$; $x = 10ad$
8. **a)** $D = \{x | x \geq 11\}_{\mathbb{R}}$; $x = 15$
9. **a)** $D = \{x | x \geq -7\}_{\mathbb{R}}$; $x = 9$
10. **a)** $\frac{2}{10^2}$ **b)** $\frac{1}{\min}$ **c)** $\frac{(a+b)bc^2}{a^2}$
11. **a)** $\frac{1}{10^2}$ **b)** 10^{-3} **c)** m^{-1} **d)** $\forall m^{-1}$
12. **a)** $1,083 \cdot 10^{21} m^3$ **b)** $5,1 \cdot 10^{14} m^2$
13. **a)** $1,495 \cdot 10^{11} m$
14. **a)** 2 **b)** n^2 **c)** $\frac{1}{x^3}$ **d)** $\frac{1}{n}$ **e)** n^a **f)** $n^{22} \cdot m^{21}$
15. **a)** x^2 **b)** x^6 **c)** $3 \cdot \sqrt[3]{3^b}$
16. **a)** 2 , denn $10^2 = 100$
17. **a)** $2,477$, denn $10^{2,477} = 300$
18. **a)** 1 , denn $e^1 = 2,718$
19. **a)** -5 , denn $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$
20. **a)** $2 \cdot \log_a u$
21. **a)** $2 \cdot \log_a m + \frac{1}{2} \cdot \log_a n - 3 \cdot \log_a p$ **c)** $\frac{2}{3} \cdot \log_a n$
22. **a)** 3 **b)** $3,61235$ **c)** $1,243$ **d)** $48,283$
23. **a)** 8 **b)** $0,7124$ **c)** 2 **d)** $2,1073$

1.8 Mengen

1.8.1 Mengen und ihre Elemente

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Elementen zu einem Ganzen. Mengen werden in beschreibender, aufzählender Form oder graphisch mithilfe von Mengenbildern (Venn-Diagramm) angegeben.

Mengen werden mit großen Buchstaben, z.B. A, B, ..., Z, bezeichnet, die Elemente von Mengen mit kleinen Buchstaben z.B. a, b, ..., z.

Beispiel 1:

Stellen Sie die Menge A mit den Elementen a, b, c in expliziter aufzählender Form und als Mengenbild dar.

Lösung: Bild 1

Bei der expliziten Darstellung der Elemente ist die Reihenfolge beliebig. Für die Darstellung der Verknüpfung werden Mengenoperatoren verwendet (**Tabelle 1**).

Für die aufzählende Form wird auch die implizite Darstellung verwendet.

Beispiel 2:

Stellen Sie die Menge K mit den Elementen 2, 4, 6, 8 in impliziter aufzählender Form dar.

Lösung:

$K = \{x \mid x \text{ ist gerade, eine natürliche Zahl und } x < 10\}$

Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt Mächtigkeit oder Kardinalität und wird mit $|M|$ bezeichnet (**Tabelle 2**). Die leere Menge hat die Kardinalität 0. Mehrfach dargestellte Elemente werden nur je einmal gezählt.

Eine leere Menge enthält keine Elemente.

1.8.2 Beziehungen zwischen Mengen

Teilmengen

A ist eine Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist (Bild 2). A ist eine echte Teilmenge von B, wenn A Teilmenge von B, aber von B verschieden. B enthält mindestens ein Element, dass nicht in A enthalten ist.

Beispiel 3:

Enthält die Menge B in Bild 2 die Teilmenge A?

Lösung:

$A = \{b, d\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ somit gilt $A \subset B$

Gleichheit von Mengen

Es gilt $A = B$, wenn die Mengen $A = \{5, 6, 7\}$ und $B = \{5, 6, 7\}$ die gleichen Elemente haben.

„Unter einer Menge verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen“.

Georg Cantor, Begründer der Mengenlehre
(1845 bis 1918)

G Grundmenge

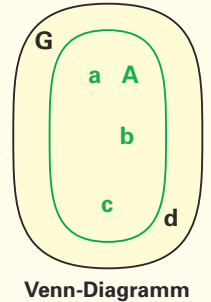
$A = \{a, b, c\}$

a ist Element von $A \Rightarrow a \in A$

b ist Element von $A \Rightarrow b \in A$

c ist Element von $A \Rightarrow c \in A$

d ist nicht Element von $A \Rightarrow d \notin A$



Venn-Diagramm

Bild 1: Mengendarstellung in aufzählender Form und als Venn-Diagramm

Tabelle 1: Relationale Mengen-Operatoren

| Operator | Beispiel | Erklärung |
|---------------|-------------------|-------------------------------|
| \subset | $A \subset B$ | A ist Teilmenge von B |
| $\not\subset$ | $A \not\subset B$ | A ist nicht Teilmenge von B |
| \subseteq | $A \subseteq B$ | A ist unechte Teilmenge von B |
| $=$ | $A = B$ | Mengen A und B sind gleich |
| \in | $a \in A$ | a ist Element von A |
| \notin | $d \notin A$ | d ist nicht Element von A |

Tabelle 2: Begriffe aus der Mengenlehre

| Begriff | Bedeutung | Beispiel |
|--------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| Mächtigkeit, Kardinalität | Anzahl der Elemente | $M = \{1, 2, 3\} \Rightarrow M = 3$ |
| Leere Menge | Kardinalität 0 | $ M = 0$ |
| Mehrfach dargestellte Elemente | Elemente werden nur einfach gezählt | $ M = \{1, 2, 1, 4, 2, 7\} = 4$ |

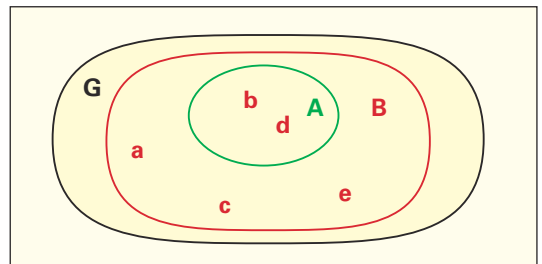


Bild 2: Echte Teilmenge A der Menge B

1.8.3. Verknüpfung mit Mengen

Das Verknüpfen von Mengen mit Operatoren (**Tabelle 1**) wird zum Veranschaulichen von Strukturen, z.B. Zusammenfassungen oder Einteilungen verwendet.

Schnittmenge

Die Schnittmenge C der beiden Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A und zu B gehören (**Bild 1**).

$$C = A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}_G$$

Beispiel 1:

Welche Schnittmenge C bilden die Menge $A = \{2, 5, 6, 7, 9\}$ und die Menge $B = \{3, 5, 6, 7, 9\}$?

Lösung: $C = A \cap B = \{5, 6, 7, 9\}$.

Vereinigungsmenge

Die Vereinigungsmenge C der beiden Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A oder zu B gehören (**Bild 2**).

$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}_G$$

Beispiel 2:

Welche Vereinigungsmenge C bilden die Menge $A = \{1, 2, 5, 6\}$ und die Menge $B = \{3, 5, 6, 7, 9\}$?

Lösung: $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$.

Differenzmenge, Restmenge

Die Differenzmenge C ist die Menge aller Elemente von A , die nicht zu B gehören (**Bild 3**).

$$C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}_G$$

Beispiel 3:

Welche Differenzmenge C bilden die Menge $A = \{1, 2, 4\}$ und die Menge $B = \{2, 3\}$?

Lösung: $C = A \setminus B = \{1, 4\}$.

Produktmenge

Auch als kartesisches Produkt oder Paarmenge bezeichnet.

Die Produktmenge $C = A \times B$ ist die Menge aller geordneten Paare (x, y) die aus den Mengen A und B bildbar sind (**Bild 4**).

$$C = A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}_G.$$

Beispiel 4:

Welche Paarmenge C bilden die Mengen $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$?

Lösung: $C = A \times B = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 2); (2, 3)\}$.

Tabelle 1: Verknüpfungs-Operatoren für Mengen

| Operator | Beispiel | Erklärung, Bedeutung |
|--|---------------------|---|
| \cap | $C = A \cap B$ | C ist die Schnittmenge von A und B . |
| \cup | $C = A \cup B$ | C ist die Vereinigungsmenge von A und B . |
| \setminus | $C = A \setminus B$ | C ist die Differenzmenge von A und B . |
| \times | $C = A \times B$ | C ist die Produktmenge von A und B . |
| logische Operatoren: \wedge Und, \vee Oder | | |

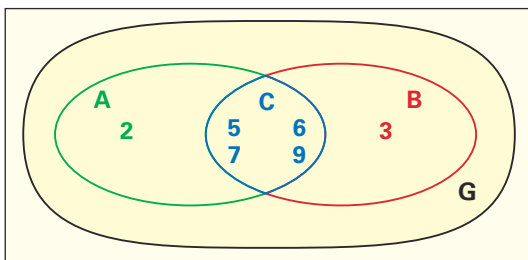


Bild 1: Schnittmenge $C = A \cap B$

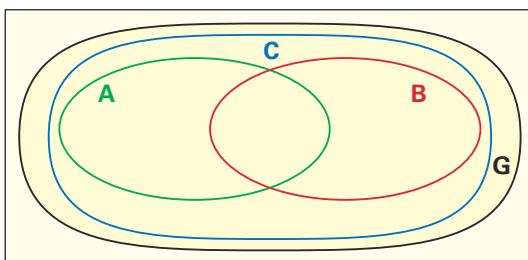


Bild 2: Vereinigungsmenge $C = A \cup B$

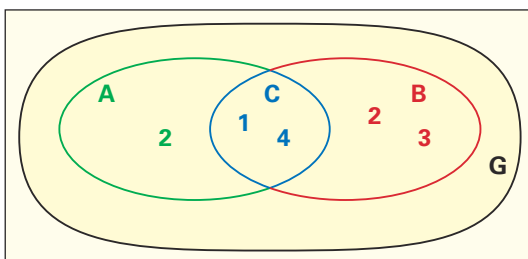


Bild 3: Differenzmenge $C = A \setminus B$

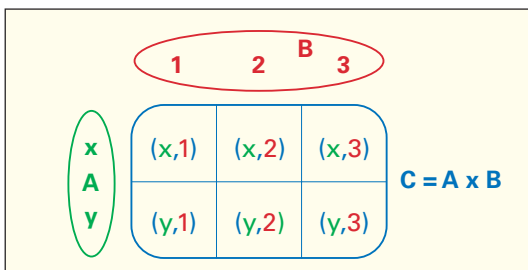


Bild 4: Produktmenge $C = A \times B$

Paarmengen werden oft in Koordinatensystemen dargestellt.