



Methodische Lösungswege zu Mathematik für die Fachhochschulreife mit Vektorrechnung FOS

Bearbeitet von Lehrern und Ingenieuren an beruflichen Schulen
(Siehe nächste Seite)

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 70425

Autoren des Buches „Methodische Lösungswege zu Mathematik für die Fachhochschulreife
mit Vektorrechnung FOS“

Josef Dillinger	München
Bernhard Grimm	Sindelfingen, Leonberg
Gerhard Mack	Stuttgart
Thomas Müller	Ulm
Bernd Schiemann	Stuttgart, Ulm

Lektorat: Bernd Schiemann

Bildentwürfe: Die Autoren

Bilderstellung und -bearbeitung: YellowHand GbR, 73257 Köngen, www.yellowhand.de

Das vorliegende Buch wurde auf der Grundlage der neuen amtlichen Rechtschreibregeln erstellt.

1. Auflage 2008

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN: 978-3-8085-7042-5

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2008 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Umschlaggestaltung: Idee Bernd Schiemann, Ulm; Ausführung: Michael Maria Kappenstein, 60594 Frankfurt/Main

Satz, Grafik und Bildbearbeitung: YellowHand GbR, 73257 Köngen, www.yellowhand.de

Druck: ?????

Vorwort zur 1. Auflage

Die „Methodischen Lösungswege zu Mathematik für die Fachhochschulreife mit Vektorrechnung FOS“ sind ein didaktisch aufbereiteter Lösungsband. Damit finden Fachbuch und Formelsammlung eine wertvolle Ergänzung, vor allem auch für Phasen des selbstorganisierten Lernens.

Für die schnelle, gezielte Orientierung im Buch sind jeweils Kapitel, Teilkapitel sowie spaltenweise die Aufgabennummern angegeben.

Um ein Maximum an Übersicht bei der Benutzung zu gewährleisten, wird eine klare Gliederung bei der Darstellung der Lösungswege verwendet und z. B. auch das Ende jeder Aufgabe durch einen Trennstrich markiert.

Für zeichnerische Lösungen von Aufgaben, die durch Selbsttätigkeit der Schüler gelöst werden sollen, sind jeweils entsprechend sorgfältig aufbereitete Darstellungen z. B. von

- ⇒ räumlichen Projektionen,
- ⇒ Vektordarstellungen oder
- ⇒ Schaubilder von Funktionen vorhanden.

Entsprechend den Hauptabschnitten des Lehrbuchs enthält das Lösungsbuch Lösungswege zu den Kapiteln

- **Algebraische Grundlagen**
- **Geometrische Grundlagen**
- **Vektorrechnung**
- **Analysis**
- **Differenzialrechnung**
- **Integralrechnung**
- **Aufgaben aus der Praxis**
- **Selbstorganisiertes Lernen**
- Übungsaufgaben – Prüfungsaufgaben**

Ihre Meinung interessiert uns!

Teilen Sie uns Ihre Verbesserungsvorschläge, Ihre Kritik aber auch Ihre Zustimmung zum Buch mit.

Schreiben Sie uns an die E-Mail-Adresse: info@europa-lehrmittel.de

Herbst 2008

Die Verfasser

Arbeiten mit dem Buch „Methodische Lösungswege zu Mathematik für die Fachhochschulreife mit Vektorrechnung“

Wie arbeite ich mit dem Buch?

Aufbau der methodischen Lösungswege:

In der obersten Zeile finden Sie das **Kapitel**, zu dem die Aufgaben der Seite gehören.

1 Algebraische Grundlagen

Hier finden Sie die Angabe der **Teilkapitel** für die folgenden Lösungen.

1.7 Funktionen und Gleichungssysteme

Werden Bilder aus dem Lehrbuch für die Lösung einer Aufgabe benötigt, findet man in der **Aufgabenspalte** ein entsprechendes Icon:



Seite **Aufgabennummer**

18.1



Ausführliche Lösung zu der Aufgabe 1 auf der Seite 18 im Lehrbuch.

Ein Hinweis auf eine Tabelle



im Lehrbuch zeigt Wege zur Aufgabenlösung auf.

21.1



Tabelle 1

Ausführliche Lösung zu der Aufgabe 1 auf der Seite 21 mit der **Tabelle 1** im Lehrbuch.

Benötigt man eine Formel zur Lösung einer Aufgabe, findet man den entsprechenden Formelhinweis mit der Seitenangabe.

$$A = \pi r^2$$

25.1

$$A = \pi r^2$$

Seite 22

Ausführliche Lösung zu der Aufgabe 1 auf der Seite 25 im Lehrbuch.

Mit der Formel von **Seite 22** im Lehrbuch, $y = a \cdot x^2 + y_s$ zur Lösung der Aufgabe.

Inhaltsverzeichnis

Mathematische Fachbegriffe	7	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	44
1 Algebraische Grundlagen		3 Vektorrechnung		
1.1 Term	9	3.1 Der Vektorbegriff	45	
1.2 Gleichung	9	3.2 Darstellung von Vektoren im Raum	46	
1.3 Definitionsmenge	9	3.3 Verknüpfungen von Vektoren	48	
1.4 Potenzen	10	3.3.1 Vektoraddition	48	
1.4.1 Potenzbegriff	10	3.3.2 Verbindungsvektor, Vektorsubtraktion	50	
1.4.2 Potenzgesetze	10, 11	3.3.3 Skalare Multiplikation, S-Multiplikation	51	
1.5 Wurzelgesetze	12	3.3.4 Einheitsvektor	52	
1.5.1 Wurzelbegriff	12	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	53
1.5.2 Rechengesetze beim Wurzelrechnen	12	3.3.5 Strecke, Mittelpunkt	54	
1.6 Logarithmengesetze	13	3.3.6 Skalarprodukt	55	
1.6.1 Logarithmusbegriff	13	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	57
1.6.2 Rechengesetze beim Logarithmus	13	3.4 Lineare Abhängigkeit von Vektoren	58	
1.6.3 Basisumrechnung beim Logarithmus	14	3.4.1 Zwei Vektoren im Raum	58	
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	3.4.2 Drei Vektoren im Raum	59	
1.7 Funktionen und Gleichungssysteme	16	3.4.3 Vier Vektoren im Raum	60	
1.7.1 Rechtwinkliges Koordinatensystem	16	3.4.4 Basisvektoren	61	
1.7.2 Funktionen	17	3.4.4.1 Eigenschaften von linear unabhängigen Vektoren	61	
1.7.3 Lineare Funktionen	18	3.4.4.2 Koordinatendarstellung von Vektoren	62	
1.7.3.1 Ursprungsgeraden	18	3.5 Orthogonale Projektion	63	
1.7.3.2 Allgemeine Gerade	19	3.6 Lotvektoren	64	
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	3.6.1 Lotvektoren zu einem einzelnen Vektor	64	
1.7.3.3 Betragsfunktion	21	3.6.2 Lotvektoren einer Ebene	65	
1.7.3.4 Ungleichungen	22	3.7 Vektorprodukt	66	
1.7.4 Quadratische Funktionen	23	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	69
1.7.4.1 Parabeln mit Scheitel im Ursprung	23	3.8 Vektorgleichung einer Geraden im Raum	70	
1.7.4.2 Verschieben von Parabeln	24	3.9 Orthogonale Projektion von Punkten und Geraden auf eine Koordinatenebene	74	
1.7.4.3 Normalform und Nullstellen von Parabeln	25	3.10 Gegenseitige Lage von Geraden	76	
1.7.4.4 Zusammenfassung der Lösungsarten	26	3.11 Abstandsberechnungen	81	
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	3.11.1 Abstand Punkt–Gerade und Lotfußpunkt	81	
1.7.5 Lineare Gleichungssysteme LGS	28	3.11.2 Kürzester Abstand zweier windschiefer Geraden	83	
1.7.5.1 Lösungsverfahren für LGS	28	3.11.3 Abstand zwischen parallelen Geraden	84	
1.7.5.2 Lösung eines LGS mit einer Matrix	29	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	85
1.7.5.3 Sarrus-Regel	30	3.12 Ebenengleichung	86	
1.7.5.4 Grafische Lösung eines LGS	31	3.12.1 Vektorielle Parameterform der Ebene	86	
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	3.12.2 Vektorielle Dreipunkteform einer Ebene	87	
2 Geometrische Grundlagen		3.12.3 Parameterfreie Normalenform	88	
2.1 Flächeninhalt geradlinig begrenzter Flächen	33	3.13 Ebene–Punkt	89	
2.2 Flächeninhalt kreisförmig begrenzter Flächen	34	3.13.1 Punkt P liegt in der Ebene E	89	
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	3.13.2 Abstand eines Punktes P von der Ebene E	89	
2.3 Volumenberechnung	36	3.14 Ebene–Gerade	90	
2.3.1 Körper gleicher Querschnittsfläche	36	3.14.1 Gerade parallel zur Ebene	90	
2.3.2 Spitze Körper	37	3.14.2 Gerade liegt in der Ebene	90	
2.3.3 Abgestumpfte Körper	38	3.14.3 Gerade schneidet Ebene	90	
2.3.4 Kugelförmige Körper	39	3.15 Lagebezeichnung von Ebenen	92	
2.4 Trigonometrische Beziehungen	40	3.15.1 Parallele Ebenen	92	
2.4.1 Ähnliche Dreiecke	40	3.15.2 Sich schneidende Ebenen	92	
2.4.2 Rechtwinklige Dreiecke	40	3.15.3 Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen	93	
2.4.3 Einheitskreis	41			
2.4.4 Sinussatz und Kosinussatz	42			
2.4.5 Winkelberechnung	43			

Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	94	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	143
4	Analysis		5.7	Kurvendiskussion	144
4.1	Potenzfunktionen	95	5.7.1	Differenzierbarkeit von Funktionen	144
4.2	Wurzelfunktionen	96	5.7.2	Monotonie	145
4.2.1	Allgemeine Wurzelfunktionen	96	5.7.3	Hochpunkte und Tiefpunkte	146
4.2.2	Arten von quadratischen Wurzelfunktionen	97	5.7.4	Wendepunkte	147
4.3	Ganzrationale Funktionen höheren Grades	98	5.7.5	Einparametrische Funktionenschar	149
4.3.1	Funktionen des dritten Grades	98	5.7.6	Tangenten und Normalen	152
4.3.2	Funktionen des vierten Grades	99	5.7.6.1	Tangenten und Normalen in einem Kurvenpunkt	152
4.3.3	Nullstellenberechnung	99	5.7.6.2	Tangenten parallel zu einer Geraden	153
4.3.3.1	Nullstellenberechnung bei biquadratischen Funktionen	99	5.7.6.3	Anlegen von Tangenten an K_f von einem beliebigen Punkt aus	154
4.3.3.2	Nullstellenberechnung mit dem Nullprodukt	100	5.7.6.4	Zusammenfassung Tangentenberechnung	155
4.3.3.3	Nullstellenberechnung durch Abspalten eines Linearfaktors	101	5.7.7	Ermittlung von Funktionsgleichungen	156
4.3.3.4	Numerische Methoden	103	5.7.7.1	Ganzrationale Funktion	156
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	105	5.7.7.2	Ganzrationale Funktion mit Symmetrieeigenschaft	159
4.3.4	Arten von Nullstellen	106	5.7.7.3	Exponentialfunktion	160
4.4	Gebrochenrationale Funktionen	107	5.7.7.4	Sinusförmige Funktion	161
4.4.1	Definitions- und Wertemenge	107	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	162
4.4.2	Polstellen	107	6	Integralrechnung	
4.4.3	Definitionslücke	107	6.1	Einführung in die Integralrechnung	163
4.4.4	Grenzwerte	108	6.1.1	Aufsuchen von Flächeninhaltsfunktionen	164
4.4.5	Grenzwertsätze	109	6.1.2	Stammfunktionen	165
4.4.6	Asymptoten	110	6.2	Integrationsregeln	166
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	111	6.2.1	Potenzfunktionen	166
4.5	Exponentialfunktion	112	6.2.2	Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen	166
4.6	e-Funktion	113	6.3	Das bestimmte Integral	167
4.7	Logarithmische Funktion	114	6.3.1	Geradlinig begrenzte Fläche	167
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	115	6.3.2	„Krummlinig“ begrenzte Fläche	168
4.7	Trigonometrische Funktionen	116	6.4	Berechnung von Flächeninhalten	169
4.7.1	Sinusfunktion und Kosinusfunktion	116	6.4.1	Integralwert und Flächeninhalt	169
4.7.2	Tangensfunktion und Kotangensfunktion	117	6.4.2	Flächen für Schaubilder mit Nullstellen	170
4.7.3	Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen	117	6.4.3	Musteraufgabe zur Flächenberechnung	171
4.7.4	Allgemeine Sinusfunktion und Kosinusfunktion	118	6.4.4	Regeln zur Vereinfachung bei Flächen	172
4.8	Eigenschaften von Funktionen	120	6.4.5	Integrieren mit variabler Grenze	174
4.8.1	Symmetrie bei Funktionen	120	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	175
4.8.2	Umkehrfunktionen	121	6.5	Flächenberechnung zwischen Schaubildern	176
4.8.3	Monotonie und Umkehrbarkeit	124	6.5.1	Flächenberechnung im Intervall	176
4.8.4	Stetigkeit von Funktionen	125	6.5.2	Flächen zwischen zwei Schaubildern	177
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	126	6.5.3	Flächenberechnung mit der Differenzfunktion	178
5	Differenzialrechnung		6.5.4	Musteraufgabe zu gelisteten Schaubildern	179
5.1	Erste Ableitung $f'(x)$	127	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	180
5.2	Differenzialquotient	128	6.5.5	Integration gebrochenrationaler Funktionen	181
5.3	Ableitungsregeln	130	6.6	Numerische Integration	182
5.4	Höhere Ableitungen	133	6.6.1	Streifenmethode mit Rechtecken	182
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	135	6.6.2	Flächenberechnung mit Trapezen	183
5.5	Newtonsches Näherungsverfahren (Tangentenverfahren)	136	6.6.3	Flächenberechnung mit Näherungsverfahren	185
5.6	Extremwertberechnungen	138	6.7	Volumenberechnung	186
5.6.1	Extremwertberechnung mit einer Hilfsvariablen	140	6.7.1	Rotation um die x-Achse	186
5.6.2	Randextremwerte	141	6.7.2	Rotation um die y-Achse	190