Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler

2., aktualisierte und erweiterte Auflage

Markus Bühner
Matthias Ziegler

Pearson

EXTRAS ONLINE

Befruchtung unterzogen worden zu sein, wenn Zwillinge geboren wurden. Wenn wir dies nun auf die Entscheidung bei Hypothesen übertragen, bedeutet dies: $p(H_0|D) \neq p(D|H_0)$ und $p(H_1|D) \neq p(D|H_1)$. Über den Satz von Bayes (siehe *Abschnitt 3.7.1*) ist es möglich, $p(H_0|D)$ aus $p(D|H_0)$ unter bestimmten Vorannahmen zu berechnen:

$$p(H_1|D) = \frac{p(H_1) \cdot p(D|H_1)}{p(D)} \text{ und } p(H_0|D) = \frac{p(H_0) \cdot p(D|H_0)}{p(D)}$$

Wahrscheinlichkeiten für eine Hypothese, die auf der Basis von bereits vorliegenden Daten ermittelt werden, bezeichnet man als **A-posteriori Wahrscheinlichkeiten**. Diese werden ins Verhältnis gesetzt und ergeben einen **Wettquotienten** bzw. genauer eine **Posterior Odds** Ω (sprich Omega, großer griechischer Buchstabe).

$$\Omega = \frac{p(H_1|D)}{p(H_0|D)} = \frac{f(D|H_1)}{f(D|H_0)} \cdot \frac{p(H_1)}{p(H_0)}$$

Wenn $\Omega = 10$, ist $H_1|D$ zehnmal wahrscheinlicher als $H_0|D$.

Vorannahmen. Um die Odds

$$\frac{p(H_1|D)}{p(H_0|D)}$$

zu ermitteln, ist es nötig, bestimmte Vorannahmen zu treffen: Diese „stecken“ im zweiten Teil der Formel:

$$\frac{p(H_1)}{p(H_0)}.$$

Mit diesem Teil wird vor der Durchführung der Datenerhebung eine Annahme darüber getroffen, wie das Verhältnis von H_0 und H_1 a priori definiert ist. Man spricht von einer **Prior Odds**. Werden im Rahmen eines Experiments mit zwei unabhängigen Gruppen H_0 und H_1 als gleichwahrscheinlich angenommen, ergibt sich der Faktor 1. Wird erwartet, dass die H_1 wahrscheinlicher als die H_0 auftritt, wird ein Faktor größer eins verwendet.

Marginale Likelihoods. Der erste Faktor setzt sogenannte marginale Likelihoods ins Verhältnis:

$$\frac{f(D|H_1)}{f(D|H_0)}.$$

Ein solcher Koeffizient wird als Bayes-Faktor BF_{10} bezeichnet, da im Zähler H_1 und im Nenner H_0 steht. Es gibt auch den Bayes-Faktor BF_{01}, bei dem im Zähler die H_0 und im Nenner die H_1 steht. Man erhält so einen Wert, der angibt, um welchen Faktor die Likelihood im Zähler die des Nenners übersteigt. Im Zähler steht in der Regel die Likelihood der Daten (D) unter H_1: $f(D|H_1)$. Im Nenner steht in der Regel die Likelihood der Daten (*D*) unter H_0: $f(D|H_0)$. Im Folgenden ist der BF_{10} dargestellt:

$$BF_{10} = \frac{f\left(D|H_1\right)}{f\left(D|H_0\right)} = \frac{M_1}{M_0}$$

Die Berechnung der Likelihoods ist kompliziert und wird im Exkurs nicht dargestellt. Sie findet sich bei Rouder et al. (2009). Die Berechnung mit R ist hingegen einfach und mit dem R-Paket **Bayes Factor (Morey & Rouder, 2015)** möglich:

```
ttest.tstat(t, n1, n2, rscale = "wide")
```

Dabei sind folgende Eingaben vorzunehmen:

`t` = *t*-Wert des *t*-Tests für unabhängige Stichproben

`n1` = Stichprobengröße Gruppe 1

`n2` = Stichprobengröße Gruppe 2

`medium` = kleine a priori erwartete Effektstärke

`wide` = mittlere bis große a priori erwartete Effektstärke

`ultrawide` = große a priori erwartete Effektstärke

Der aus der Formel resultierende Bayes-Faktor gibt an, um welchen Faktor die beobachteten Daten unter der H_1 wahrscheinlicher sind als unter der H_0. Damit sind **Bayes-Faktoren unabhängig von den Prior Odds**. Unterschiedliche Wissenschaftler können bei gleichem Bayes-Faktor zu unterschiedlichen Posterior Odds kommen, abhängig davon, ob sie a priori die H_0 oder die H_1 für wahrscheinlicher halten und wie stark die jeweilige Präferenz ausfällt.

Allerdings hängt der Bayes-Faktor davon ab, ob wir unter der H_1 eher große oder eher kleine Effekte erwarten. Der Einfluss dieser Vorannahme fällt jedoch in der Regel klein aus. Die Vornahme ist subjektiv und spiegelt die „Vermutung“ des Wissenschaftlers unter der gegebenen Fragestellung wider. In R wird die a priori erwartete Effektstärke indirekt mit dem **`rscale`**-Argument spezifiziert. Es stehen drei mögliche Voreinstellungen zur Verfügung. Geht man a priori von kleinen Effektstärken aus, empfiehlt sich die Einstellung „`medium`“. Werden größere Effekte erwartet, ist die Einstellung „`wide`“ angemessen. Je „weiter“ **`rscale`** gewählt wird, desto stärker fällt der Bayes-Faktor zugunsten der H_0 aus. Möchte man also die Vorannahme möglichst so wählen, dass ein gewünschtes Ergebnis am „schwersten“ realisiert wird, kann auch die Einstellung „`ultrawide`“ sinnvoll sein.

Obwohl der oben beschriebene Bayes-Faktor sehr anschaulich ist, wird er in der Regel logarithmiert und anschließend bewertet. Dies wird im Folgenden kurz dargestellt.

Teilt man zwei Wahrscheinlichkeiten, setzt sie also ins Verhältnis, ergibt sich ein Wert von null bis plus unendlich. Man bezeichnet solche Koeffizienten auch als Wettquotienten oder Odds. Ist ein Wettquotient eins, bedeutet dies in unserem Fall, dass die Wahrscheinlichkeiten der Daten unter der Null- und Alternativhypothese gleich sind, z. B. jeweils $p = 0.50$. Je weiter der Wettquotient unter eins liegt, desto mehr Evidenz liegt für die Nullhypothese vor, je mehr der Wert über eins liegt, desto mehr Evidenz liegt für die Alternativhypothese vor. Werden die Wettquotienten logarithmiert, ergibt sich für