



Mathematik

Fach- und Berufsoberschule Bayern

Vorklasse

J. Dillinger, M. Schittenhelm

Autoren:

Dillinger, Josef	Hausen
Schittenhelm, Michael	Hof

Lektorat:

Dillinger, Josef

Bildbearbeitung:

Zeichenbüro des Verlages Europa-Lehrmittel, Ostfildern

1. Auflage 2020

Druck 5 4 3 2

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern identisch sind.

ISBN: 978-3-8085-8762-1

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fülle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2020 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, Radevormwald unter Einsatz des Bildes © senoldo-Fotolia.com
Satz: Schriftsatz Frauke Moritz, Ahrensburg
Druck: Lensing Druck GmbH & Co. KG, 44149 Dortmund

Vorwort

Das Buch ist für den Unterricht im Fach Mathematik für FOS bzw. BOS Vorklasse erstellt. Es ist so konzipiert, dass sich die Schülerinnen und Schüler den Lernstoff anhand von verschiedenartigen Aufgaben während des Unterrichts eigenverantwortlich und selbstständig aneignen können. Methodisch wurde darauf geachtet, dass die Schülerinnen und Schüler beim Bearbeiten der Aufgaben neben reinem mathematischem Faktenwissen weiterführende Fertigkeiten wie beispielsweise mathematisches Kommunizieren oder mathematisches Argumentieren erwerben, damit sie anschließend gemäß des kompetenzorientierten Konzepts des LehrplanPLUS in der Lage sind, berufliche Aufgabenstellungen zu lösen.

Leitgedanken – wissensbasierter Konstruktivismus

Das vorliegende Lernmittel deckt alle acht geforderten Lernbereiche des LehrplanPLUS ab. Bei der Darstellung der einzelnen Lerninhalte der Lernbereiche wurde folgende grundlegende Punkte besonders Wert gelegt: Neues Fakten- und Regelwissen wird gemäß des konstruktivistischen Lernansatzes stets an bereits vorhandenen mathematischen Wissen bzw. an Alltagswissen des Schülers angeknüpft, damit ein vernetztes Wissen entsteht. Damit jedoch Wissen vernetzt werden kann, müssen zunächst grundlegende mathematische Kenntnisse und Rechenfertigkeiten vorhanden und sicher abrufbar sein. Daher werden in diesem Buch unter anderen auch Rechenfertigkeiten und -verfahren eingeübt, damit diese beherrscht werden. Gemäß dieser Leitgedanken werden die Lerninhalte wie folgt darstellt:

Grundlegende Begriffe und Rechenverfahren

Es werden zunächst grundlegende Begriffe, die in dem jeweiligen Sachzusammenhang von Bedeutung sind, anschaulich dargestellt und anschließend mathematisch definiert. Im Anschluss werden Rechenverfahren, -Rechenregel oder Lösungsstrategien hergeleitet bzw. für Schüler/innen plausibel dargestellt, falls die Herleitung unter Beachtung des Adressatenbezugs nicht möglich ist. Diese Verfahren und Regeln werden anhand von Beispielaufgaben, die die Schüler/innen eigenständig bearbeiten können, eingeübt und vertieft.

Aufbau mathematischer Denkstrukturen

Bei der Einführung von neuen Rechenverfahren werden den Schülern/innen neben der Herleitung auch Hintergrundinformationen und fachliche Vertiefungen geboten, damit die Schüler/innen die Rechenverfahren nicht nur sicher anwenden können, sondern auch die zulegenden Zusammenhänge hinter den Formeln und Lösungsstrategien verstehen. Dadurch werden implizit mathematische Denkstrukturen aufgebaut.

Eigenständigkeit · Übungsaufgaben

Das vorliegende Buch bietet eine Vielzahl von kompetenzorientierten Übungsaufgaben mit ansteigenden Anforderungsstufen (schwierigste Stufe **rot**), sowie realitätsbezogene Aufgaben mit offener Fragestellung, die von den Schüler/innen während des Unterrichts bzw. als Hausaufgabe bearbeitet werden können. Aufgaben, die sich besonders gut für Partner- oder Gruppenarbeiten eignen, sind mit einem Icon  gekennzeichnet. Am Ende eines jeden Lernbereichs kann der Schüler bzw. die Schülerin sein/ihr vorhandenes Wissen testen.

Winter 2019/20

Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre, Aussagenlogik, Rechenregeln	7	1.4.6 Addition und Subtraktion von ungleichnamigen Brüchen	73
1.1 Mengenlehre	7	1.4.7 Multiplikation von Brüchen	76
1.1.1 Der Begriff »Menge«	7	1.4.8 Division von Brüchen	79
1.1.2 Darstellungsformen von Mengen	7	1.4.9 Umwandlung von Dezimalzahlen in Brüchen	80
1.1.3 Zahlenmengen	9	1.4.10 Rechnen mit Potenzen	82
1.1.4 Vergleich zweier Mengen	18	1.4.11 Binomische Formeln	89
1.1.5 Grundmenge und Ergänzungsmenge	19	1.4.12 Aufgaben zum Rechnen mit rationalen Zahlen	96
1.1.6 Schnittmenge zweier Mengen	19	1.5 Rechnen mit reellen Zahlen	101
1.1.7 Vereinigungsmenge zweier Mengen	20	1.5.1 Der Begriff Quadratwurzel	102
1.1.8 Restmenge (Differenzmenge) zweier Mengen	21	1.5.2 Wurzeln in Potenzschreibweise	102
1.1.9 Produktmenge	22	1.5.3 Rechengesetze mit Wurzeln	104
1.1.10 Kombination von Mengenoperationen	23	1.5.4 Aufgaben zu reellen Zahlen	111
1.1.11 Aufgaben zur Mengenlehre	27	1.6 Termumformungen	114
1.2 Aussagenlogik	30	1.6.1 Ausklammern – Zerlegen in Faktoren	114
1.2.1 Aussage, Aussageform und Term	30	1.6.2 Division von Termen	116
1.2.2 Verknüpfung von Aussagen und Aussageformen	31	1.6.3 Vereinfachen von Bruchtermen	116
1.2.3 Gesetze der Aussagenlogik	35	1.6.4 Vereinfachen von Termen mit Potenzen	125
1.2.4 Verbindung Aussagenlogik und Mengenlehre	38	1.6.5 Vereinfachen von Wurzeltermen	128
1.2.5 Aufgaben zu Aussagen bzw. Aussageformen	39	1.6.6 Aufgaben zu Termumformungen	130
1.3 Rechnen mit ganzen Zahlen	42	2 Gleichungen & lineare Ungleichungen	134
1.3.1 Die Grundrechenart Addition	42	2.1 Lineare Gleichungen	134
1.3.2 Die Grundrechenart Subtraktion	44	2.1.1 Fachbegriffe	135
1.3.3 Addition und Subtraktion von Summen und Differenzen	45	2.1.2 Äquivalenzumformungen	136
1.3.4 Addition und Subtraktion mit mehreren Klammerausdrücken	47	2.1.3 Lösen von linearen Gleichungen	141
1.3.5 Die Grundrechenart Multiplikation	48	2.1.4 Lösbarkeit von linearen Gleichungen	143
1.3.6 Multiplikation von Summen und Differenzen	50	2.1.5 Aufstellen von linearen Gleichungen aus einem Sachzusammenhang	146
1.3.7 Der Begriff Potenz	53	2.1.6 Aufgaben zu lineare Gleichungen	150
1.3.8 Die Grundrechenart Division	54	2.2 Lineare Gleichungen mit einer Formvariablen	153
1.3.9 Bestimmung der Rechenart	55	2.2.1 Bedeutung einer Formvariablen	153
1.3.10 Primfaktorzerlegung	57	2.2.2 Lösen einer linearen Gleichung mit einer Formvariablen	155
1.3.11 Größter gemeinsamer Teiler	59	2.2.3 Notwendigkeit einer Fallunterscheidung	156
1.3.12 Kleinstes gemeinsames Vielfaches	61	2.2.4 Aufgaben zu linearen Gleichungen mit einer Formvariablen	159
1.3.13 Aufgaben zum Rechnen mit ganzen Zahlen	63	2.3 Lineare Ungleichungen	162
1.4 Rechnen mit rationalen Zahlen	64	2.3.1 Fachbegriffe	163
1.4.1 Grundbegriffe und -regeln beim Rechnen mit Brüchen	64	2.3.2 Lösen von linearen Ungleichungen	165
1.4.2 Bruchterme und ihre Definitionsmenge	65	2.3.3 Lösen einer Ungleichung mit einer Formvariablen	169
1.4.3 Erweitern und Kürzen von Brüchen	66	2.3.4 Absolutbeträge von Termen	173
1.4.4 Vergleich zweier Brüche	69	2.3.5 Aufgaben zu linearen Ungleichungen	175
1.4.5 Addition und Subtraktion von gleichnamigen Brüchen	71	2.4 Quadratische Gleichungen	181
		2.4.1 Fachbegriffe	183

2.4.2	Lösen von quadratischen Gleichungen	184	3.2.7	Besondere Geraden	263
2.4.3	Lösbarkeit einer quadratischen Gleichung	191	3.2.8	Implizite Form einer linearen Funktion	269
2.4.4	Offene Anwendungsaufgabe	193	3.2.9	Ermittlung der Wertemenge einer linearen Funktion	271
2.4.5	Quadratische Terme und Gleichungen in der Geschichte der Mathematik	196	3.2.10	Anwendungsaufgaben	272
2.4.6	Aufgaben zu quadratischen Gleichungen	201	3.2.11	Aufgaben zu linearen Funktionen	279
2.5	Quadratische Gleichungen mit einer Formvariablen	204	3.3	Lineare Funktionenscharen	284
2.6	Faktorisieren	206	3.3.1	Der Begriff lineare Funktionenschar	285
2.6.1	Die faktorisierte Form eines quadratischen Terms	206	3.3.2	Besondere Geraden einer linearen Funktionenschar	288
2.6.2	Standardverfahren zum Faktorisieren von Termen	206	3.3.3	Nullstellen einer linearen Funktionenschar	291
2.6.3	Faktorisieren durch Ausklammern	208	3.3.4	Nullstellen mit Fallunterscheidung	293
2.6.4	Faktorisieren durch Anwenden der Binomischen Formeln	209	3.3.5	Schnittpunkte von Geradenscharen	297
2.6.5	Faktorisieren mithilfe des Satzes von Vieta	210	3.3.6	Anwendungsaufgabe	301
2.6.6	Anwenden des Faktorisierens	212	3.3.7	Aufgaben zu linearen Funktionenscharen	303
2.6.7	Aufgaben zum Faktorisieren	214	3.4	Quadratische Funktionen	307
2.7	Bruchgleichungen	216	3.4.1	Überblick über quadratische Funktionen und Parabeln	308
2.7.1	Fachbegriffe	217	3.4.2	Veränderungen der Normalparabel	310
2.7.2	Lösen von Bruchgleichungen	218	3.4.3	Die Scheitelpunktform	316
2.7.3	Offene Anwendungsaufgabe	223	3.4.4	Die allgemeine Darstellungsform einer quadratischen Funktion	318
2.7.4	Aufgaben zu Bruchgleichungen	225	3.4.5	Nullstellen von quadratischen Funktionen	322
3	Funktionen	228	3.4.6	Linearfaktordarstellung einer quadratischen Funktion	324
3.1	Überblick über Funktionen	228	3.4.7	Schnittpunkte einer Parabel mit der x-Achse	332
3.1.1	Anschauliche Darstellung des Funktionsbegriffs	228	3.4.8	Schnittpunkte einer Parabel mit anderen Graphen	334
3.1.2	Funktion als Paarmenge	232	3.4.9	Aufstellen von Funktionsgleichungen quadratischer Funktionen	337
3.1.3	Fachbegriffe im Zusammenhang mit Funktionen	234	3.4.10	Bestimmung der Wertemenge einer quadratischen Funktion	340
3.1.4	Grafische Darstellung einer Funktion mithilfe von Mengendiagrammen	235	3.4.11	Offene Anwendungsaufgabe	342
3.1.5	Schreibweisen von Funktionen	236	3.5	Quadratische Funktionenscharen	348
3.1.6	Darstellungen von Funktionen im Koordinatensystem	237	3.5.1	Funktionen aus Scharen mit besonderen Eigenschaften	349
3.1.7	Anwendungsaufgabe	239	3.5.2	Lage einer Parabelschar im Koordinatensystem	351
3.1.8	Aufgaben zu Funktionen	240	3.5.3	Gemeinsame Punkte einer Parabelschar	352
3.2	Lineare Funktionen	241	3.5.4	Nullstellen einer quadratischen Funktionenschar	354
3.2.1	Grundlegendes zu linearen Funktionen	242	3.5.5	Gemeinsame Punkte von Graphen mit Parabelscharen	356
3.2.2	Zeichnen einer Geraden	245	3.5.6	Aufgaben zu quadratische Funktionenscharen	359
3.2.3	Aufstellen einer linearen Funktionsgleichung mit zwei Punkten	253	3.6	Symmetrie von Funktionsgraphen	360
3.2.4	Punkt-Steigungsform einer Geraden	256	3.6.1	Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse	361
3.2.5	Nullstellen einer linearen Funktion	258			
3.2.6	Gemeinsame Punkte zweier Geraden	259			

3.6.2	Punktsymmetrie bezüglich des Koordinatenursprungs	362	6.2.2	Umfang und Flächeninhalt zweidimensionaler geometrischer Figuren	421
3.6.3	Aufgaben zu Symmetrie	363	6.2.3	Volumen und Oberflächeninhalt geometrischer Körper	423
3.7	Grafisches Lösen von Ungleichungen	364	6.2.4	Flächeninhalt geometrischer Figuren sowie Volumen geometrischer Körper in Abhängigkeit von einem Parameter	426
3.7.1	Strategie zum grafischen Lösen einer Ungleichung	364	6.3	Üben & Anwenden	432
3.7.2	Lage von Graphen im Koordinatensystem	368	7	Daten und Zufall, Wahrscheinlichkeit	438
3.7.3	Anwendungsaufgaben	371	7.1	Wichtige Begriffe zu Daten und Zufall, Wahrscheinlichkeit	438
3.7.4	Aufgaben zum grafischen Lösen von Ungleichungen	374	7.1.1	Zufallsexperiment	438
4	Lineare Gleichungssysteme	379	7.1.2	Ergebnis und Ergebnisraum	438
4.1	Wichtige Begriffe	379	7.1.3	Ereignisse	438
4.2	Strategien zum rechnerischen Lösen linearer Gleichungssysteme	383	7.1.4	Venn-Diagramm	439
4.2.1	Einsetzverfahren	383	7.1.5	Logische Verknüpfung von Ereignissen	439
4.2.2	Gleichsetzverfahren	385	7.1.6	Vierfeldertafel	439
4.2.3	Additionsverfahren	386	7.1.7	Baumdiagramm	439
4.2.4	Auswahl des Lösungsverfahrens beim rechnerischen Lösen linearer Gleichungssysteme	388	7.1.8	Absolute und relative Häufigkeit	440
4.2.5	Lineares Gleichungssystem mit 3 Variablen	389	7.2	Strategien zum Bearbeiten von Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit	440
4.2.6	Gauß-Verfahren	390	7.2.1	Zufallsexperiment und Ereignis	440
4.2.7	Lineare Gleichungssysteme beim Lösen von anwendungsbezogenen Aufgaben	393	7.2.2	Logische Verknüpfungen von Ereignissen	444
4.3	Üben & Anwenden	399	7.2.3	Absolute und relative Häufigkeit	445
5	Dreieckslehre	403	7.2.4	Vierfeldertafel	447
5.1	Wichtige Begriffe im Dreieck	403	7.2.5	Laplace-Experimente	449
5.2	Strategien zum Berechnen von Winkeln und Seitenlängen eines Dreiecks	404	7.2.6	Pfadregeln am Baumdiagramm	450
5.2.1	Bezeichnungen	404	7.3	Üben & Anwenden	454
5.2.2	Winkelsumme im Dreieck	405	8	Exponentialfunktion und Logarithmus	459
5.2.2	Ähnliche Dreiecke	405	8.1	Wichtige Begriffe zu Exponentialfunktion und Logarithmus	459
5.2.3	Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken	406	8.2	Strategien zum Bearbeiten von Exponentialfunktionen	461
5.2.4	Satz des Pythagoras	410	8.2.1	Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$	461
5.3	Üben & Anwenden	413	8.2.2	Die Exponentialfunktion $f(x) = b \cdot a^x$	463
6	Berechnungen von Längen, Flächeninhalten und Volumina	418	8.2.3	Exponentialgleichungen und Logarithmus	464
6.1	Wichtige Begriffe zu Längen, Flächeninhalten und Volumina	418	8.2.4	Anwendung der Exponentialfunktion	469
6.2	Strategien zum Berechnen von Längen, Flächeninhalten und Volumina	420	8.3	Üben & Anwenden	477
6.2.1	Försterdreieck	420	Sachwortverzeichnis	482	

1 Mengenlehre, Aussagenlogik, Rechenregeln

1.1 Mengenlehre

Mithilfe der Mengenlehre können mathematisch komplexe Sachverhalte einfach, eindeutig und klar dargestellt werden. Die gesamte heutige Mathematik basiert auf der eindeutigen Sprache und den Grundgesetzen (Axiomen) der Mengenlehre. Sie ist daher von grundlegender Bedeutung für die moderne Mathematik.

Bevor wir uns in die Sprache bzw. in die Axiome der Mengenlehre vertiefen, muss zuerst geklärt werden, was in der Mathematik unter dem Begriff »Menge« verstanden wird.

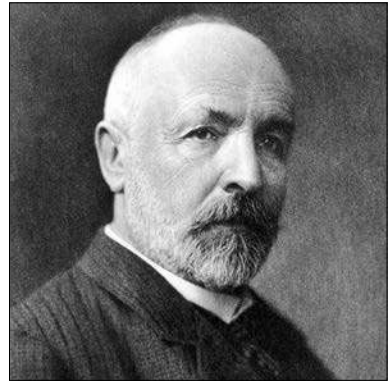


Bild 1: Georg Cantor (*1845 Sankt Petersburg, †1918 Halle an der Saale), der als Begründer der sogenannten Mengenlehre gilt.

1.1.1 Der Begriff »Menge«

Wir betrachten zunächst den Freistaat Bayern mit seinen Regierungsbezirken (**Bild 2**):

- Oberfranken
- Unterfranken
- Mittelfranken
- Oberpfalz
- Schwaben
- Oberbayern
- Niederbayern

Es stellt sich die Frage, was Bayern und seine Regierungsbezirke mit Mathematik bzw. mit der Mengenlehre zu tun haben. Diese Frage ist leicht beantwortet, denn mathematisch betrachtet stellen die Regierungsbezirke von Bayern eine Menge dar. Eine Menge ist in der Mathematik definiert als die Zusammenfassung von wohlunterscheidbaren, realen oder abstrakten Objekten zu einem Ganzen. Wohlunterscheidbar bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Objekte unterschiedlich sein müssen, was bei den betrachteten Regierungsbezirken der Fall ist. Die realen Objekte einer Menge bzw. die abstrakten Objekte, die nur in der gedanklichen Vorstellung existieren, werden auch als Elemente bezeichnet.



Bild 2: Regierungsbezirke von Bayern

Der Begriff Menge

Eine Menge ist die Zusammenfassung von wohlunterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte einer Menge werden Elemente genannt.

1.1.2 Darstellungsformen von Mengen

Im vorherigen Absatz wurde erläutert, dass die Regierungsbezirke Oberfranken (Obf.), Unterfranken (Ufr.), Mittelfranken (Mfr.), Oberpfalz (Opf.), Schwaben (Schw.), Oberbayern (Obb.) und Niederbayern (Ndb.) eine Menge im mathematischen Sinne darstellen. Mengen lassen sich auf unterschiedliche Weisen darstellen.

■ Grafische Darstellung im Mengendiagramm (Venn-Diagramm)

Bei der grafischen Darstellung einer Menge werden alle Elemente von einer geschlossenen Kurve umgeben (**Bild 1**). Diese anschauliche Darstellungsform wird Mengendiagramm oder Venn-Diagramm genannt.

Die Bezeichnung der Mengen erfolgt mit Großbuchstaben. Die Menge in **Bild 1** wird mit B bezeichnet.

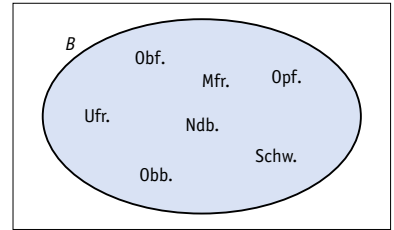


Bild 1: Mengendiagramm der Regierungsbezirke

Anmerkung Ndb. (Niederbayern) ist offensichtlich ein Element der Menge B . Um diesen Sachverhalt kurz und prägnant auszudrücken, benutzt man das Symbol $\in$. Dieses bedeutet ... ist Element von ... Demnach drückt $Ndb. \in B$ aus, dass Ndb. Element von B ist.

■ Aufzählende Darstellungsform

Bei der aufzählenden Darstellungsform einer Menge werden alle Elemente der Menge zwischen zwei geschweiften Klammern geschrieben. Die einzelnen Elemente werden durch Strichpunkte getrennt. Die aufzählende Darstellungsform der Menge B aller Regierungsbezirke von Bayern lautet wie folgt:

$$B = \{ \text{Obf.; Ufr.; Mfr.; Opf.; Schw.; Obb.; Ndb.} \}$$

Anmerkung Die leere Menge, also die Menge, die kein Element enthält, wird üblicherweise durch zwei geschweifte Klammern angegeben.

$$A = \{ \} \quad \text{leere Menge}$$

■ Beschreibende Darstellungsform

Die aufzählende und die grafische Darstellungsform einer Menge haben den wesentlichen Nachteil, dass alle Elemente explizit genannt werden müssen. Das ist jedoch nicht immer möglich. Stellen wir uns beispielsweise vor, dass wir nicht die Menge der Regierungsbezirke von Bayern betrachten, sondern die Menge aller Einwohner Bayerns. Das würde bedeuten, dass wir bei der aufzählenden bzw. grafischen Form jeden Einwohner Bayerns namentlich nennen müssten, was bei 12.988.539 Einwohner* kaum möglich ist. In diesem Fall hilft die beschreibende Darstellungsform einer Menge. Bei dieser werden die Elemente über das gemeinsame Merkmal bzw. durch die kennzeichnende Eigenschaft alle Elemente beschrieben.

Die beschreibende Darstellungsform der Menge B aller Regierungsbezirke von Bayern lautet wie folgt:

$$B = \left\{ \begin{array}{c|c} \text{Regierungsbezirke} & \text{liegen in Bayern} \\ \hline \text{Objekte} & \text{Eigenschaft} \end{array} \right\}$$

Der senkrechte Strich $|$ hat in der Mathematik die Bedeutung »mit der Eigenschaft.« Die oben genannte Menge B ist wie folgt zu lesen: »Die Menge B besteht aus Regierungsbezirken (Objekten), die die Eigenschaft haben, dass sie in Bayern liegen.« Durch die Menge B in beschreibender Form sind die sieben Regierungsbezirke Oberfranken (Obf.), Unterfranken (Ufr.), Mittelfranken (Mfr.), Oberpfalz (Opf.), Schwaben (Schw.), Oberbayern (Obb.) und Niederbayern (Ndb) eindeutig beschrieben, ohne dass sie explizit genannt wurden.

Erkenntnis: Die beschreibende Darstellungsform dient zur Darstellung von Mengen, die sehr viele Elemente enthalten.

* Stand 30.9.2017

Die Menge E aller Einwohner Bayerns lautet in beschreibend Form:

$$E = \{\text{Menschen} \mid \text{wohnhaft in Bayern}\}$$

Lesen würde man die Menge E wie folgt: »Die Menge E besteht aus Menschen, die die Eigenschaften haben, dass sie in Bayern wohnhaft sind.«

Beschreibende Darstellungsform einer Menge

Die beschreibende Form einer Menge A ist wie folgt aufgebaut:

$$A = \{\text{Objekt} \mid \text{kennzeichnende Eigenschaft aller Objekte dieser Menge}\}$$

Aufgaben

1. Geben Sie die Menge A aller Bundesländer (inkl. Stadtstaaten) in aufzählender Form an, deren Anfangsbuchstabe mit B beginnt.
2. Geben Sie die Menge B aller Städte in Bayern in grafischer Form an, in denen die jeweiligen Bezirksregierungen ihren Hauptsitz haben.
3. Geben Sie die Menge C aller europäischen Staaten an. Begründen Sie, weshalb für die Angabe dieser Menge die beschreibende Form vorteilhaft ist.
4. Nennen Sie zwei weitere Mengen, die ausschließlich durch die beschreibende Form angegeben werden können.

1.1.3 Zahlenmengen

Es ist allgemein bekannt, dass in der Mathematik selten Mengen von Regierungsbezirken oder Mengen von Einwohnern eines Bundeslandes behandelt werden, in der Regel betrachtet man Mengen aus Zahlen. Die sicherlich bekannteste Zahlenmenge sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Neben dieser Zahlenmenge werden im Folgenden noch die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die der rationalen $\mathbb{Q}$ und die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ behandelt.

Die Zahlenmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erhalten als Abkürzung einen Großbuchstaben mit Doppelstrich. Der Doppelstrich symbolisiert, dass es sich um fest definierte Zahlenmengen handelt.

Fest definierte Zahlenmengen

$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}$	Ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen

1.1.3.1 Die Menge der natürlichen Zahlen

Unter den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ werden die Zahlen verstanden, die zum Abzählen von Gegenständen verwendet werden. Geht man beispielsweise über den Parkplatz eines Schwimmbads kann man die Autos zählen, die dort parken. Man beginnt logischerweise mit der Zahl 1, gefolgt von der Zahl 2 usw. Die Zahlen 1, 2, 3 usw. sind somit natürliche Zahlen. Unter Mathematikern gilt es als nicht geklärt, ob die Zahl 0 zu den natürlichen Zahlen gehört oder nicht. Laut deutscher Industrienorm (DIN) wird die Zahl 0 zu den natürlichen Zahlen gezählt. Daher wird in diesem Buch die Zahl 0 als natürliche Zahl betrachtet.

Menge der natürlichen Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ lautet: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$

■ Zahlenstrahl

Die natürlichen Zahlen können durch einen Zahlenstrahl dargestellt werden (**Bild 1**). Zwei natürliche Zahlen haben einen Abstand von einer Längeneinheit.

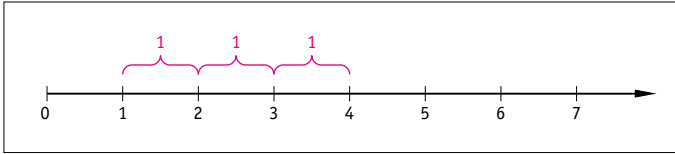


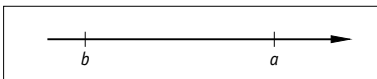
Bild 1: Zahlenstrahl

■ Vergleich zweier Zahlen mittels Zahlenstrahl

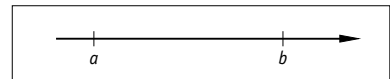
Für die Anordnung am Zahlenstrahl gilt: Je größer die Zahl ist, desto weiter rechts befindet sie sich. Betrachtet man zwei benachbarte Zahlen am Zahlenstrahl, so ist immer die rechte die größere Zahl. Um diese Beziehung »größer als« auszudrücken, wird das Symbol $\gg$ benutzt. Beispielsweise ist die Zahl $5 > 4$, da die Zahl 5 weiter rechts auf dem Zahlenstrahl zu finden ist. Die geöffnete Seite des $\gg$ -Symbols zeigt stets auf die größere Zahl. Analog ist von zwei Zahlen stets die kleinere, die sich weiter links am Zahlenstrahl befindet. Man benutzt das Symbol $\ll$, um die Beziehung »kleiner als« auszudrücken. Bekanntlich ist 1 kleiner als 2, man schreibt daher $1 < 2$. Die geschlossene Seite des Kleiner-Symbols zeigt stets zur kleineren Zahl. Man nennt die Symbole $\gg$ und $\ll$ Relationszeichen.

Bedeutung der Relationszeichen – Teil 1

a größer als $b \rightarrow a > b$



a kleiner als $b \rightarrow a < b$



Zwei Zahlen a und b sind gleich (Symbol $=$), wenn sie sich an der selben Stelle am Zahlenstrahl befinden. Das Relationszeichen $\leq$ vereint die Symbole $<$ und $=$. Es bedeutet kleiner oder gleich. $a \leq b$ bedeutet demnach, dass die Zahl a kleiner als b oder gleich b ist. Das Relationszeichen $\geq$ vereint die Symbole $>$ und $=$. Die Bedeutung dieses Symbols ist größer oder gleich. Dementsprechend bedeutet $a \geq b$, dass die Zahl a größer als b oder gleich b ist.

Bedeutung der Relationszeichen – Teil 2

a größer als oder gleich $b \rightarrow a \geq b$

a kleiner als oder gleich $b \rightarrow a \leq b$

■ Intervallschreibweise

Durch die Kombination von Relationszeichen können Bereiche des Zahlenstrahls beschrieben werden. Beispielsweise besagt der Ausdruck $3 < a < 7$, dass sich die Zahl a im Bereich zwischen den Zahlen 3 und 7 befindet (**Bild 2**).

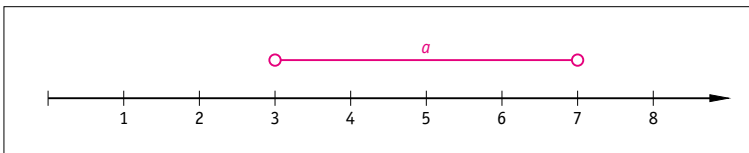


Bild 2: Beschriebener Bereich des Zahlenstrahls

Man bezeichnet die Menge aller Zahlen, die sich zwischen zwei gegebenen Zahlen auf dem Zahlenstrahl befinden, als Intervall. Bei der Angabe des Intervalls werden lediglich die beiden Zahlen angegeben, die den Bereich abgrenzen.

Diese beide Zahlen werden Intervallgrenzen genannt. Der in **Bild 2** auf der vorhergehenden Seite dargestellte Bereich wird durch das Intervall $]3;7[_{\mathbb{N}}$ beschrieben. Der Index $\mathbb{N}$ gibt an, dass die betrachtete Zahlenmenge aus natürlichen Zahlen besteht.

$$\{a \in \mathbb{N} \mid 3 < a < 7\} =]3;7[_{\mathbb{N}} = \{4;5;6\}$$

Intervall

Unter einem Intervall wird die Menge aller Zahlen verstanden, die sich auf dem Zahlenstrahl zwischen zwei Zahlen, den Intervallgrenzen, befinden. Für alle $b, c \in \mathbb{N}$ gilt:

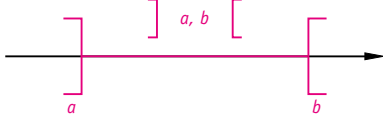
$$]b;c[_{\mathbb{N}} = \{b+1; \dots; c-1\}$$

Je nachdem, ob die Intervallgrenzen zum Intervall gehören oder nicht, müssen vier Arten von Intervallen unterschieden werden:

1. Offenes Intervall

Beim offenen Intervall gehören die Intervallgrenzen nicht zum Intervall. Diese Art von Intervallen wird mit eckigen Klammern geschrieben, die von den Grenzen weg zeigen. Das Intervall $]2;8[_{\mathbb{N}}$ beschreibt daher alle natürlichen Zahlen zwischen ausgeschlossen 2 und ausgeschlossen 8, also 3,4,5,6 und 7.

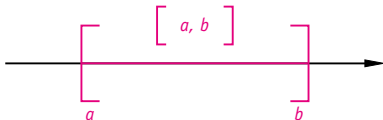
$$]2;8[_{\mathbb{N}} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 8\} = \{3;4;5;6;7\}$$

Offenes Intervall		$a < x < b$
-------------------	---	-------------

2. Geschlossenes Intervall

Beim geschlossenen Intervall gehören die Intervallgrenzen zum Intervall. Geschlossene Intervalle erkennt man daran, dass beide eckige Klammern in der Intervallschreibweise zu den Grenzen zeigen. Das Intervall $[2;8]_{\mathbb{N}}$ beschreibt alle natürlichen Zahlen zwischen eingeschlossen 2 und eingeschlossen 8, also 2,3,4,5,6,7 und 8.

$$[2;8]_{\mathbb{N}} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 8\} = \{2;3;4;5;6;7;8\}$$

Geschlossenes Intervall		$a \leq x \leq b$
-------------------------	---	-------------------

3. Linksseitig geschlossenes und rechtsseitig geöffnetes Intervall

Beim linksseitig geschlossenen und rechtsseitig geöffneten Intervall gehört die linke Intervallgrenze zum Intervall, während die rechte nicht dazu gehört. Da die linke Intervallgrenze zum Intervall gehört, zeigt die linke eckige Klammer zur Intervallgrenze hin. Die rechte Intervallgrenze gehört nicht zum Intervall, daher zeigt die rechte eckige Klammer weg von der Intervallgrenze. Das Intervall $[2;8[_{\mathbb{N}}$ beschreibt daher alle natürlichen Zahlen zwischen eingeschlossen 2 und ausgeschlossen 8, also 2,3,4,5,6 und 7.

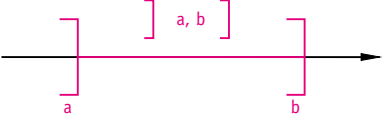
$$[2;8[_{\mathbb{N}} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 8\} = \{2;3;4;5;6;7\}$$

Linksseitig geschlossenes Intervall		$a \leq x < b$
-------------------------------------	---	----------------

4. Linksseitig geöffnetes und rechtsseitig geschlossenes Intervall

Das Intervall $]2;8]_{\mathbb{N}}$ stellt ein linksseitig geöffnetes und rechtsseitig geschlossenes Intervall dar, da die linke Klammer von der Zahl 2 weg zeigt, während die eckige Klammer zur 8 gerichtet ist. Das genannte Intervall beschreibt alle natürlichen Zahlen zwischen ausgeschlossen 2 und eingeschlossen 8, also 3, 4, 5, 6, 7 und 8.

$$]2;8]_{\mathbb{N}} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 8\} = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

Rechtsseitig geschlossenes Intervall		$a < x \leq b$
--------------------------------------	---	----------------

Vertiefende Betrachtung – Abgeschlossenheit

In der Mathematik wird der Begriff Abgeschlossenheit verwendet, um folgenden Sachverhalt zu verdeutlichen: Werden zwei natürliche Zahlen addiert oder multipliziert, erhält man wieder eine natürliche Zahl. Die Zahlenmenge der natürlichen Zahlen ist daher abgeschlossen bezüglich der Addition und der Multiplikation. Die Zahlenmenge der natürlichen Zahlen ist jedoch nicht abgeschlossen bezüglich der Subtraktion und Division, da zwei natürliche Zahlen subtrahiert bzw. dividiert nicht zwingend eine natürliche Zahl ergeben. Beispielsweise ist das Ergebnis der Rechnung $4 - 8$ keine natürliche Zahl.

Erkenntnis: Die Menge der natürlichen Zahlen ist abgeschlossen bezüglich der Addition und Multiplikation. Bezüglich der Subtraktion und Division ist diese Zahlenmenge nicht abgeschlossen.

Aufgaben

- Geben Sie den folgenden Sachverhalt in abkürzender Schreibweise unter Verwendung der Relationszeichen wieder.
 - Die Zahl a ist größer als die Zahl b .
 - Die Zahl a ist größer oder gleich als die Zahl b .
 - Die Zahl a ist kleiner als die Zahl b .
- Geben Sie die Menge I in aufzählender Form an, die durch das folgende Intervall $I = [3; 10]_{\mathbb{N}}$ beschrieben wird. Veranschaulichen Sie anschließend das Intervall I anhand des Zahlenstrahls.
- Erklären Sie den Unterschied zwischen dem Intervall $I = [3; 10]_{\mathbb{N}}$ aus Aufgabe 2 und dem Intervall $I = [3; 10]_{\mathbb{N}}$.
- Eine Mitschülerin behauptet, dass ein Intervall nichts anderes als eine Menge sei. Geben Sie an, ob Sie dieser Aussage zustimmen oder widersprechen. Begründen Sie Ihre Angabe.

1.1.3.2 Die Menge der ganzen Zahlen

Wenn man nur die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ betrachtet, dann ist die Subtraktion $2 - 6$ nicht ausführbar. Um das Ergebnis dieser Rechnung anzugeben, sind negative Zahlen notwendig. Diese sind in der Menge der natürlichen Zahlen nicht enthalten. Aus diesem Grund wird die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ um negative Zahlen erweitert (**Bild 1**). Diese so erweiterte Menge nennt man die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

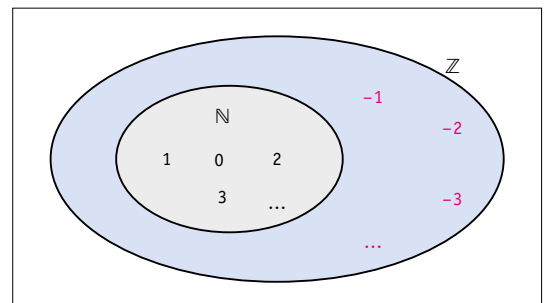
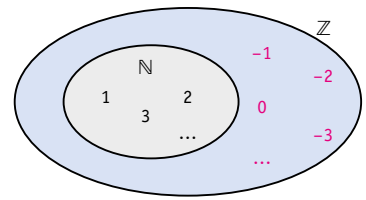


Bild 1: Erweiterung der natürlichen Zahlen

Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ besteht aus allen natürlichen Zahlen, der Zahl 0 und den Gegenzahlen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.



■ Betrag einer Zahl

Der Betrag einer Zahl gibt ihren Abstand von der Zahl 0 auf dem Zahlenstrahl an. Da der Abstand immer größer oder gleich 0 Längeneinheiten ist, ist der Betrag einer Zahl stets 0 oder positiv. Die symbolhafte Schreibweise für den Betrag sind zwei senkrechte Striche ($||$). Der Betrag der Zahl 5 und ihrer Gegenzahl -5 beträgt jeweils 5, da beide Zahlen 5 Längeneinheiten von der Zahl 0 auf dem Zahlenstrahl entfernt sind.

$$|-5| = 5 \quad \text{und} \quad |5| = 5$$

Betrag einer Zahl

Der Betrag einer Zahl a ($a \neq 0$) ist stets positiv. Anschaulich gibt der Betrag einer Zahl a den Abstand zur Zahl 0 auf dem Zahlenstrahl an.

Aufgaben

1. Nennen Sie drei Zahlen, die zur Menge der ganzen Zahlen, aber nicht zur Menge der natürlichen Zahlen gehören.
2. Geben Sie zu den Zahlen 2 und -4 jeweils die Gegenzahlen an.
3. Geben Sie die Menge I in aufzählender Form an, die durch das Intervall $I = [-3; 2]_{\mathbb{Z}}$ beschrieben wird. Veranschaulichen Sie anschließend das Intervall I anhand des Zahlenstrahls.
4. Begründen Sie mithilfe des Zahlenstrahls, weshalb gilt: $|-4| = 4$

1.1.3.3 Die Menge der rationalen Zahlen

In der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ können alle Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen ausgeführt werden. Wenn man zwei ganze Zahlen addiert, subtrahiert oder multipliziert, erhält man als Ergebnis stets wiederum eine ganze Zahl. Die Division von ganzen Zahlen ist hingegen in $\mathbb{Z}$ nicht immer durchführbar. Dividiert man beispielsweise $-5:3$, so ist das Ergebnis keine ganze Zahl. Damit das Ergebnis dieser Rechnung angegeben werden kann, muss die Menge der ganzen Zahlen um sogenannte Bruchzahlen erweitert werden. Die Menge, die bei der Erweiterung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ um die Bruchzahlen entsteht, nennt man die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (**Bild 1**).

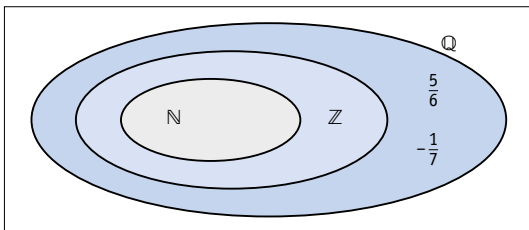


Bild 1: Erweiterung der ganzen Zahlen um die Bruchzahlen

■ Beschreibung einer Bruchzahl

Unter einer Bruchzahl versteht man Zahlen der Form $a:b$ bzw. $\frac{a}{b}$, wobei a und b ganzen Zahlen sind, a kein Vielfaches von b ist und $b \neq 0$. Beispiele für Bruchzahlen sind $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{8}{7}$ usw. Keine Bruchzahl im engen Sinne ist beispielsweise $-\frac{4}{2}$, da sich $-4:2$ zu einer ganzen Zahl -2 reduzieren lässt.

Die Zahl über dem Bruchstrich einer Bruchzahl wird Zähler oder Dividend genannt. Die Zahl unterhalb wird als Nenner oder Divisor bezeichnet.

Bruchzahlen

Zahlen der Form $a:b$ bzw. $\frac{a}{b}$ werden als Bruchzahlen bezeichnet, wobei a und b ganze Zahlen sind, a kein Vielfaches von b und $b \neq 0$ ist.

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}}$$

Bruchzahlen befinden sich auf dem Zahlenstrahl stets zwischen zwei ganzen Zahlen. Zwei Bruchzahlen werden als gleichwertig erachtet, wenn sie sich an derselben Stelle auf dem Zahlenstrahl befinden. Beispielsweise sind die Bruchzahlen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ gleichwertig (**Bild 1**).

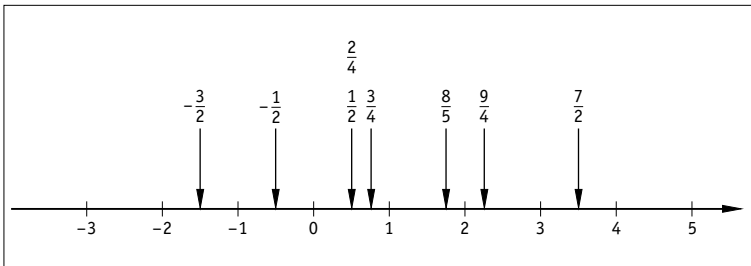


Bild 1: Bruchzahlen auf dem Zahlenstrahl

Anhand von **Bild 1** erkennt man, dass die Bruchzahlen sehr dicht auf dem Zahlenstrahl liegen. An dieser Stelle sei jedoch angemerkt, dass Stellen auf dem Zahlenstrahl existieren, die nicht durch ganze Zahlen oder Bruchzahlen beschrieben werden können. Diese Stellen werden im Kapitel »reelle Zahlen« betrachtet.

■ Besondere Bruchzahlen

Unter der unendlichen Menge von Bruchzahlen gibt es einige, die sich durch eine besondere Eigenschaft auszeichnen. Diese werden im Folgenden benannt.

a) Stammbrüche

Alle Bruchzahlen mit der Zahl 1 im Zähler heißen Stammbruch.

Beispiele für Stammbrüche: $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{25}$

b) Scheinbrüche

Als Scheinbrüche werden diejenigen Bruchzahlen bezeichnet, deren Zähler ein ganzzahliges Vielfaches des Nenners ist. Scheinbrüche können stets zu einer ganzen Zahl reduziert werden.

Beispiele für Scheinbrüche: $\frac{6}{3}, \frac{25}{5}, -\frac{9}{3}$

Ist der Nenner der Bruchzahl 1, liegt stets ein Scheinbruch vor. Es gilt für jede beliebige Zahl a : $\frac{a}{1} = a$. Umgekehrt kann jede ganze Zahl stets als Scheinbruch dargestellt werden.

c) Unechter Bruch

Eine Bruchzahl, deren Zähler größer als der Nenner ist, wird als unechter Bruch bezeichnet.

Beispiele für unechte Brüche: $-\frac{12}{11}, \frac{8}{5}, \frac{3}{2}$

d) Kehrbruch

Den Kehrbruch oder Kehrwert einer Bruchzahl erhält man, indem man den Zähler und Nenners der Bruchzahl vertauscht. Eine Bruchzahl und ihr Kehrbruch ergeben miteinander multipliziert stets die Zahl 1.

Beispiel für einen Kehrbruch: Bruchzahl: $\frac{3}{2}$ Kehrbruch: $\frac{2}{3}$.

■ Regeln für Brüche

Bruchzahlen werden auch kurz Brüche genannt. Bei ihnen gibt es Besonderheiten und Regeln, die beachtet werden müssen. Diese werden im Folgenden genannt.

a) Der Nenner eines Bruchs darf niemals 0 sein. Warum dies so ist, wird am Ende dieses Abschnitts in der Rubrik »Vertiefende Betrachtung« gezeigt.

b) Wenn der Zähler eines Bruchs Null ist, dann ist der Wert des Bruches insgesamt Null. Es gilt für alle beliebigen Zahlen $a \neq 0$: $\frac{0}{a} = 0$.

Dies kann man sich durch folgende Überlegung verdeutlichen: Stellen Sie sich vor, dass Sie keinen Kuchen haben und diesen durch 10 Personen teilen möchten. Wie viel bekommt jeder? Nichts, also Null.

c) Bei der Ermittlung des Bruchwerts gilt folgende Vorzeichenregel ($a, b \in \mathbb{N}$):

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b} \quad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b} \quad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$$

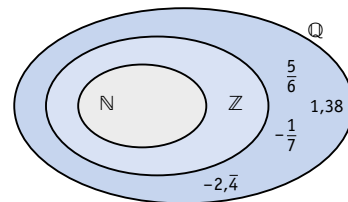
■ Mathematische Beschreibung der rationalen Zahlen

Sowohl jede endliche als auch jede unendliche, aber periodische Dezimalzahl lässt sich als Bruchzahl darstellen. Beispielsweise entspricht der endlichen Dezimalzahl 0,875 die Bruchzahl $\frac{7}{8}$. Die unendliche, periodische Dezimalzahl $0,\overline{27}$ ist gleich der Bruchzahl $\frac{3}{11}$. Im Kapitel »Rechnen mit rationalen Zahlen« wird erläutert, wie man rechnerisch die zu einer Dezimalzahl zugehörige Bruchzahl ermittelt.

Mit dem Wissen über den Zusammenhang von Bruchzahlen und Dezimalzahlen, können wir die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ eindeutig in Worten beschreiben:

Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Die Menge der rationalen Zahlen besteht aus allen ganzen Zahlen, den Bruchzahlen und den Dezimalzahlen, die sich als Bruchzahl darstellen lassen.



In beschreibender Mengenschreibweise lautet die Definition der Menge der rationalen Zahlen wie folgt:

Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in beschreibender Mengenschreibweise

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{Z}^* \right\} \quad \mathbb{Z}^*: \text{Ganze Zahlen außer die Zahl } 0.$$

Vertiefende Betrachtung – Keine Division durch Null

Es wird gezeigt, weshalb eine Division durch Null nicht definiert ist.

Nehmen wir an, dass eine Division durch Null möglich wäre, dann würde für $a \neq 0$ gelten $\frac{a}{0} = b$. Formen wir diesen Ausdruck um, entsteht die Aussage $a = b \cdot 0$. $b \cdot 0$ ergibt insgesamt 0. Das bedeutet: $a = 0$. Laut Voraussetzung gilt jedoch $a \neq 0$. Aufgrund dieses Widerspruchs ist unsere Annahme, dass eine Division durch Null möglich wäre, falsch. Eine Division durch Null ist daher nicht zulässig.

Aufgaben

1. Geben Sie die Menge $I = [-1; 4]_{\mathbb{Q}}$ in beschreibender Mengenschreibweise an. Veranschaulichen Sie anschließend das Intervall I anhand des Zahlenstrahls.
2. Erklären Sie den Unterschied zwischen einem Schein- und einem Stammbruch.
3. Geben Sie drei Beispiele für unechte Brüche an.
4. Eine Mitschülerin stellt die Frage: »Zu welcher Zahlenmenge gehört jetzt die Zahl -7 ? Zur Menge der ganzen oder zur Menge der rationalen Zahlen?« Beantworten Sie diese Frage.

1.1.3.4 Die Menge der reellen Zahlen

Aus den vorherigen Kapiteln wissen wir, dass sich die Bruchzahlen zwischen den ganzen Zahlen auf dem Zahlenstrahl befinden (**Bild 1**).

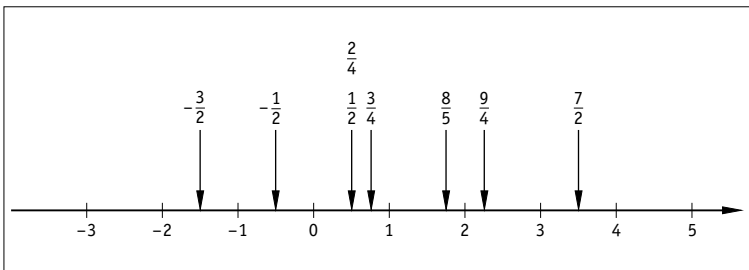


Bild 1: Bruchzahlen auf dem Zahlenstrahl

Es existieren auf dem Zahlenstrahl jedoch Stellen, die nicht durch Bruchzahlen beschrieben werden können. Diese Zahlen werden als irrationale Zahlen bezeichnet.

■ Irrationale Zahlen

Eine irrationale Zahl lässt sich nicht als Bruchzahl darstellen. Das bedeutet, dass eine irrationale Zahl eine unendliche, nicht periodische Dezimalzahl ist. Die bekannteste dieser Zahlen ist die Kreiszahl π (Pi), die wir in Lernbereich 6 dieses Buches kennenlernen werden. In **Bild 2** sind die ersten ihrer Ziffern dargestellt. Man erkennt, dass π offensichtlich eine Dezimalzahl ist, die unendlich und nicht periodisch ist. Neben der Zahl π gibt es noch weitere irrationale Zahlen, auf die wir im Kapitel Rechnen mit reellen Zahlen eingehen werden.

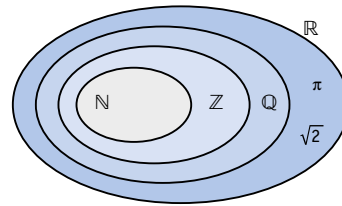
3. 14159265358979323846264338327950288419716939
 9375105820974944592307816406286208998628034825
 3421170679821480865132823066470938446095505822
 3172535940812848111745028410270193852110555964
 4622948954930381964428810975665933446128475648
 2337867831652712019091456485669234603486104543
 2664821339360726024914127372458700660631558817
 4881520920962829254091715364367892590360011330
 5305488204665213841469519415116094330572703657
 595919530921861173819326117931051185480744623
 7996274956735188575272489122793818301194912 ...

Bild 2: Die Zahl π

Die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen ergeben zusammen die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Mithilfe der reellen Zahlen kann jede Stelle des Zahlenstrahls beschrieben werden, d. h. durch die reellen Zahlen wird der Zahlenstrahl vollständig beschrieben.

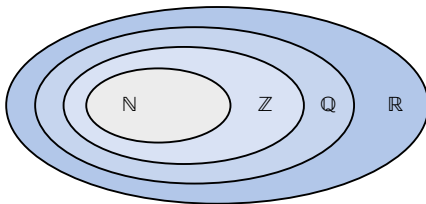
Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Die Menge der reellen Zahlen umfasst die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen.



Aufgaben

1. Erklären Sie den Unterschied zwischen einer rationalen Zahl und einer irrationalen Zahl.
2. Ordnen Sie die Zahlen -1 , $\frac{7}{3}$, 4 , $-\frac{18}{5}$, π und $1,\overline{63}$ im folgenden Diagramm passend an.



1.1.3.5 Einschränkung und Erweiterungen der Zahlenmengen

Mithilfe von Zusatzsymbolen können die fest definierten Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ erweitert und eingeschränkt werden. Die Zahlenmenge $\mathbb{Z}_0^+$ beschreibt alle positiven ganzen Zahlen und die Zahl 0. Der Index Null bei $\mathbb{Z}_0^+$ gibt somit an, dass die Zahl 0 zur betrachteten Zahlenmenge gehört. Durch ein hochgestelltes Pluszeichen wird festgelegt, dass ausschließlich die positiven Zahlen der Zahlenmenge betrachtet werden.

Aufgaben

1. Erklären Sie den Unterschied zwischen den Zahlenmengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^-$.
2. Ein Mitschüler behauptet, es gelte: $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$. Geben Sie an, ob Sie dieser Aussage zustimmen oder ihr widersprechen. Begründen Sie Ihre Angabe.
3. Begründen Sie, weshalb die Zahlenmenge $\mathbb{R}_0$ weder eine Erweiterung noch eine Einschränkung der Zahlenmenge $\mathbb{R}$ ist.

1.1.4 Vergleich zweier Mengen

In diesem Kapitel werden zwei Mengen miteinander verglichen. Insbesondere wird untersucht, unter welcher Voraussetzung zwei Mengen gleich, gleichmächtig oder elementarfremd sind.

• Gleichheit zweier Mengen

Zwei Mengen M_1 und M_2 sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Man schreibt:

$$M_1 = M_2.$$

$$M_1 = \{1; 2; 3\}$$

$$M_2 = \{1; 2; 3\}$$

$$M_1 = M_2$$

• Elementarfremde (disjunkte) Mengen

Zwei Mengen M_1 und M_2 sind genau dann elementarfremd (disjunkt), wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben.

$$M_1 = \{1; 2; 3\}$$

$$M_2 = \{4; 5; 6\}$$

M_1 und M_2 sind disjunkt.

• Gleichmächtige Mengen

Unter der Mächtigkeit einer Menge wird die Anzahl der Elemente einer Menge verstanden. Mithilfe von Betragsstrichen wird symbolisiert, dass die Mächtigkeit der Menge und nicht die Menge an sich betrachtet wird.

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5\} \rightarrow |A| = 5$$

$$B = \{-1; 0; 1\} \rightarrow |B| = 3$$

Zwei Mengen M_1 und M_2 sind genau dann gleichmächtig, wenn sie über die gleiche Anzahl an Elementen verfügen.

$$M_1 = \{1; 2; 3\}$$

$$M_2 = \{4; 5; 6\}$$

$$\rightarrow |M_1| = |M_2|$$

• Teilmenge

Sind alle Elemente der Menge M_1 ebenfalls in der Menge M_2 vorhanden (**Bild 1**), dann nennt man M_1 eine Teilmenge von M_2 . Man schreibt symbolhaft: $M_1 \subset M_2$.

$$M_1 = \{4; 5; 6\}$$

$$M_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

$$\rightarrow M_1 \subset M_2$$

Eine Mengen M_1 ist genau dann eine Teilmenge einer Menge M_2 , wenn alle Elemente der Menge M_1 auch in der Menge M_2 enthalten sind.

$$M_1 \subset M_2$$

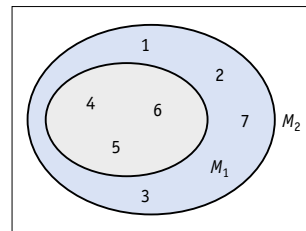
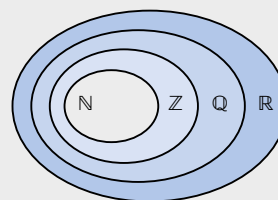


Bild 1: M_1 ist Teilmenge von M_2

Anmerkung Bei den Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Aufgaben

1. Begründen Sie folgende Aussage: Zwei gleiche Mengen sind auch gleichmächtig.
2. Widerlegen Sie folgende Aussage mit einem Gegenbeispiel: $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}_0^-$ sind disjunkt.

1.1.5 Grundmenge und Ergänzungsmenge

Die sogenannte Grundmenge ist eine besonders bedeutsame Menge in der Mengenlehre. Sie beinhaltet alle Zahlen, die für eine gewisse mathematische Überlegung prinzipiell zur Verfügung stehen. Die Grundmenge für die jeweilige mathematische Überlegung ist meist vorgegeben oder lässt sich aus dem Kontext der Aufgabenstellung erschließen. Wir werden die Grundmenge bei grafischen Darstellungen stets durch ein Rechteck kennzeichnen.

Eng verbunden mit dem Begriff der Grundmenge ist die Ergänzungsmenge, oder auch Komplementärmenge genannt.

Um zu erläutern, was die Ergänzungsmenge (Komplementärmenge) ist, betrachten wir die Grundmenge $G = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ und die Menge $A = \{2; 4; 6; 8\}$. Die Menge A ist eine Teilmenge der Grundmenge (**Bild 1**). In der Ergänzungsmenge $\bar{A}$ der Menge A sind alle Elemente der Grundmenge G enthalten, die nicht in der Menge A enthalten sind.

$\bar{A}$ lautet demnach $\bar{A} = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Die Teilmenge A und ihre Ergänzungsmenge $\bar{A}$ ergeben zusammen stets die Grundmenge G .

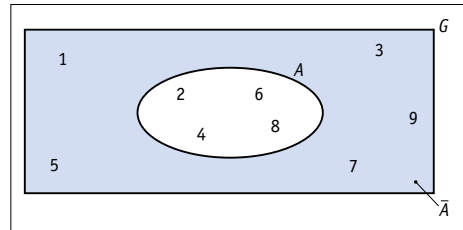


Bild 1: Ergänzungsmenge

Ergänzungsmenge

Es sei A eine Teilmenge der Grundmenge G . Alle Elemente der Grundmenge, die nicht in der Teilmenge A enthalten sind, bilden die Ergänzungsmenge $\bar{A}$ der Menge A bezüglich der Grundmenge G .

$$\bar{A} = \{x \in G \mid x \notin A\}$$

Aufgaben

1. Gegeben ist die Grundmenge $G = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$ und die Teilmenge $A = \{-1; 0; 1\}$.
 - a) Geben Sie die Ergänzungsmenge $\bar{A}$ der Menge A bezüglich der Grundmenge G an.
 - b) Stellen Sie die Mengen G , A und $\bar{A}$ in einem gemeinsamen Mengendiagramm dar.
 - c) Geben Sie die Mächtigkeit der Mengen G , A und $\bar{A}$ an.
2. Begründen Sie folgende Aussage: Eine beliebige Menge M und ihre Ergänzungsmenge $\bar{M}$ sind stets disjunkt.

1.1.6 Schnittmenge zweier Mengen

In **Bild 2** sind die Mengen A und B grafisch in einem Mengendiagramm dargestellt. Für die Grundmenge G dieser Überlegung gilt: $G = \mathbb{R}$.

Man erkennt, dass die Zahlen 4 und 5 sowohl in der Menge A als auch in der Menge B enthalten sind. Diese beiden Zahlen bilden die sogenannte Schnittmenge der Mengen A und B . Im Mengendiagramm werden sie in den Überlappungsbereich der Diagramme eingetragen. Symbolhaft schreibt man $A \cap B = \{4; 5\}$, wobei das Kurzzeichen $\cap$ die Abkürzung für Schnittmenge ist.

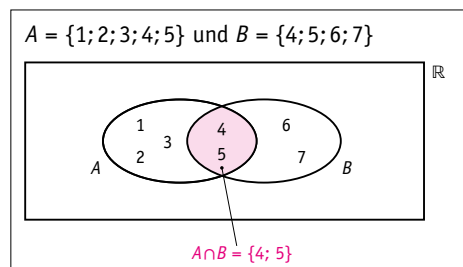


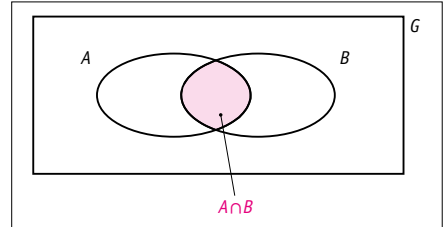
Bild 2: Schnittmenge der Mengen A und B

Anmerkung Mengendiagramme, mit deren Hilfe Zusammenhänge zwischen zwei betrachteten Mengen veranschaulicht werden, nennt man Venn-Diagramme.

Schnittmenge

Die Schnittmenge der Mengen A und B enthält alle Elemente, die sowohl in der Menge A als auch in der Menge B enthalten sind.

$$A \cap B = \{x \in G \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$



Aufgaben

Gegeben sind die Mengen $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ und die Menge $B = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. Die Grundmenge ist die Menge der reellen Zahlen ($G = \mathbb{R}$).

- Geben Sie die Schnittmenge $A \cap B$ in aufzählender Mengenschreibweise an.
- Stellen Sie die Mengen A und B in einem gemeinsamen Mengendiagramm dar und kennzeichnen Sie die Schnittmenge.
- Geben Sie eine Menge C an, für die gilt $C \subset \mathbb{N}$, $A \cap C = \{5; 7\}$ und $|C| = 4$.

1.1.7 Vereinigungsmenge zweier Mengen

In **Bild 1** sind die Mengen A und B grafisch in einem Mengendiagramm dargestellt. Die Grundmenge G dieser Überlegung ist $G = \mathbb{R}$.

In der sogenannten Vereinigungsmenge der Mengen A und B sind alle Elemente enthalten, die in der Menge A oder in der Menge B oder in beiden enthalten sind. Demnach lautet die Vereinigungsmenge der Mengen A und B $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Das Symbol $\cup$ ist die Abkürzung für Vereinigungsmenge.

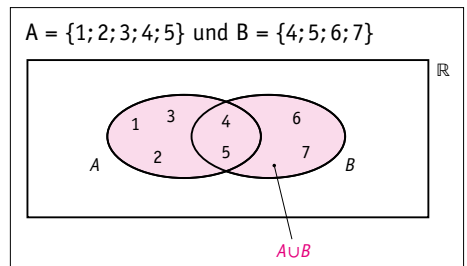


Bild 1: Vereinigungsmenge der Mengen A und B

Vereinigungsmenge

Die Vereinigungsmenge der Mengen A und B enthält alle Elemente, die in der Menge A oder in der Menge B enthalten sind.

$$A \cup B = \{x \in G \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

