



Mathematik
FOS Bayern Jahrgangsstufe 11
Ausbildungsrichtungen
ABU, G, S, W, GH, IW

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 87478

Autoren des Buches

„Mathematik FOS Bayern Jahrgangsstufe 11, Ausbildungsrichtungen ABU, G, S, W, GH, IW“

Gülsüm Döner, Erlangen

Patrick Drössler, Amberg

Lektorat:

Josef Dillinger

Bildentwürfe: Die Autoren

Bilderstellung und -bearbeitung: Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

1. Auflage 2022

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

ISBN: 978-3-8085-8747-8

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2022 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, Radevormwald
unter Verwendung einer Grafik von © Senoldo – stock.adobe.com
Layout und Satz: Daniela Schreuer, 78256 Steißlingen
Druck: Plump Druck und Medien GmbH, 53619 Rheinbreitbach

Vorwort zu „Mathematik FOS Bayern Jahrgangsstufe 11, Ausbildungsrichtungen ABU, G, S, W, GH, IW“

Seit dem Schuljahr 2017/18 gilt an den beruflichen Oberschulen in Bayern der LehrplanPLUS. Mit der Änderung der Fachlehrpläne geht eine Änderung der didaktischen Konzeption des Mathematikunterrichts einher, der im vorliegenden Lehr- und Übungsbuch Rechnung getragen wurde.

Inhalte

Das vorliegende Werk besteht inhaltlich aus den drei Teilen „Ganzrationale Funktionen“, „Differenzialrechnung“ und „Stochastik“. Die mit Asterisk (*) versehenen Inhalte und Aufgaben stellen Ergänzungen dar und können ohne Bedenken weggelassen werden.

Konzept

Nie war es so einfach, mathematische Inhalte durch den Einsatz elektronischer Medien unterstützend zu vermitteln. Nutzen Sie das (kostenlosen) Programm *GeoGebra*, das plattformunabhängig auf jedem Rechner betrieben werden kann (zum Einsatz der portablen Versionen der Software ist keine Installation notwendig). Das vorliegende Lehrbuch „lebt“ davon, dass dieses Programm sinnvoll eingesetzt wird. Insbesondere bei der Einführung in die Differenzialrechnung kann damit auf langwierige Berechnungen verzichtet werden, die vielen Schülerinnen und Schülern ohnehin den Blick auf das Wesentliche (die Bedeutung der Ableitung einer Funktion) versperrt haben.

Zum Arbeiten mit dem Buch

Die Anfangsphase der beruflichen Oberschule ist erfahrungsgemäß geprägt von einer sehr heterogenen Schülerschaft. Aus diesem Grund sind die beiden Themen „Lineare Funktionen“ und „Quadratische Funktionen“ sehr ausführlich gehalten. Dennoch kann nicht erwartet werden, sich ohne jegliche Vorkenntnisse aus der Mittelstufe einarbeiten zu können. Die ersten beiden Abschnitte dieses Lehrbuches sind als Zusammenfassung und Ergänzung der Mittelstufeninhalte gedacht.

Beim Lernen mit diesem Buch können die folgenden Tipps helfen:

- **Kopiervorlagen**

Einige Seiten des Buches sind als Kopiervorlage freigegeben. Sie dienen der Bereicherung des Unterrichts und unterstützen den Methodenwechsel.

- **Beispiele**

„Die einzige überzeugende Lehre ist die des Beispiels.“ (Romain Rolland)

Ausführlich durchgerechnete Beispiele führen die Schüler systematisch in die Thematik ein und bereiten die Grundlage, Aufgaben und Problemstellungen in oberstufengerechten Schwierigkeitsgraden zu bewältigen. Zu jedem Aufgabenbeispiel sollten Papier und Bleistift bereit gehalten werden!

- **Aufgaben**

Beachten Sie die Randspalte mit den Verweisen zu den Aufgaben, die einen Lerninhalt sinnvoll abrunden. Dort finden Sie auch viele praktische Anwendungen.

- **Tests**

Zusätzlich zu den Aufgaben finden sich im Buch einige Tests, die unbedingt innerhalb der vorgesehenen Zeitvorgabe bearbeitet werden sollten, um zu einer realistischen Selbsteinschätzung des eigenen Könnens zu gelangen. Da die Abschlussprüfung aus einem hilfsmittelfreien Teil bestehen wird, sollte zudem – wenn gefordert – auf Taschenrechner und Formelsammlung verzichtet werden.



Wenn Sie dieses Symbol sehen, heißt es: **Finger weg von Formelsammlung und Taschenrechner!** Hier geht es um grundlegende Kompetenzen.

Förderunterricht

Neben der Vertiefung der eigentlichen Unterrichtsinhalte kann mit dem Anhang dieses Buches unterstützend sowohl für schwache als auch starke Schülerinnen und Schüler der Förderunterricht gestaltet werden.

Wir wünschen Ihnen viel Freude bei der Arbeit mit unserem Buch und zögern Sie bitte nicht, Anmerkungen, Kritik (oder auch Lob) an den Verlag zu richten!

Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

I	Ganzrationale Funktionen	9
1	Lineare Funktionen	9
1.1	Einführungsbeispiel	11
1.2	Geradengleichung und Steigungsdreieck	13
1.3	Lagebeziehung von Geraden	15
1.4	Lineare Ungleichungen	17
1.5	Geradenscharen	18
1.6	Betrag und Betragsfunktion*	21
1.7	Aufgaben	23
1.7.1	Aufgaben zu linearen Funktionen	23
1.7.2	Aufgaben zu Geradenscharen	25
1.7.3	Aufgaben zu Betrag und Betragsfunktion*	26
1.8	Test: Lineare Funktionen	27
2	Quadratische Funktionen	28
2.1	Parabeln	28
2.2	Quadratwurzeln	39
2.2.1	Definition der Quadratwurzel	39
2.2.2	Rechnen mit Quadratwurzeln	40
2.3	Quadratische Gleichungen	41
2.3.1	Lösungsformel für quadratische Gleichungen	41
2.3.2	Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen	41
2.3.3	Herleitung der Lösungsformel*	45
2.4	Lagebeziehung Gerade – Parabel	46
2.5	Quadratische Ungleichungen	49
2.6	Aufgaben	52
2.6.1	Aufgaben zu Parabeln	52
2.6.2	Aufgaben zu Lagebeziehungen	54
2.6.3	Aufgaben mit Parametern	55
2.7	Test: Quadratische Funktionen	56
3	Potenzfunktionen	57
3.1	Einführungsbeispiele	57
3.1.1	Delisches Problem der Würfelverdoppelung	57
3.1.2	Größenwachstum von Säugetieren	58
3.2	Potenzen und Wurzeln	59
3.2.1	Potenzgesetze	59
3.2.2	Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten	59
3.2.3	Potenzgleichungen	60
3.3	Potenzfunktionen mit positiven Exponenten	61
3.3.1	Potenzfunktionen mit geraden Exponenten	62
3.3.2	Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten	63
3.4	Verschiebung, Streckung und Stauchung	64
3.5	Aufgaben	67
3.6	Test: Potenzfunktionen	69
4	Ganzrationale Funktionen	70
4.1	Einführungsbeispiel	70
4.2	Globalverhalten	73
4.3	Vielfachheit einer Nullstelle und Linearfaktorzerlegung	75
4.4	Polynomdivision	77
4.5	Substitution	80
4.6	Symmetrie	85
4.7	Aufgaben	87
4.7.1	Aufgaben zu Vielfachheit und Linearfaktorzerlegung	87

4.7.2	Aufgaben zur Polynomdivision	88
4.7.3	Aufgaben zur Substitution	89
4.7.4	Aufgaben zur Symmetrie	90
4.7.5	Vermischte Aufgaben	91
4.8	Test: Ganzrationale Funktionen	92

II	Differenzialrechnung	93
1	Einführung in die Differenzialrechnung	93
2	Die Ableitung	98
2.1	Differenzenquotient und Differenzialquotient	98
2.2	Bestimmung von Differenzialquotienten	101
2.2.1	Graphisches Verfahren	101
2.2.2	Rechnerisches Verfahren	108
2.3	Ableitungsfunktion und Ableitungsregeln	111
2.4	Beweis der Ableitungsregeln*	116
2.5	Aufgaben	117
2.5.1	Aufgaben zum Differenzenquotient	117
2.5.2	Aufgaben zum Differenzieren von Polynomfunktionen	118
2.6	Test: Differenzenquotient und Differenzialquotient, Ableitung	120
3	Stetigkeit und Differenzierbarkeit	121
3.1	Begriffsbildung	121
3.2	Aufgaben zu Stetigkeit und Differenzierbarkeit	124
4	Aufstellen von Tangentengleichungen	125
4.1	Das Tangentenproblem	125
4.2	Aufgaben zu Tangentengleichungen	128
5	Monotonie und Extrempunkte	130
5.1	Hinführung	130
5.2	Monotonie von Folgen	131
5.3	Monotonie von Funktionen	132
5.4	Extrempunkte	133
5.5	Aufgaben zu Monotonie und Extrempunkten	137
6	Krümmung und Wendepunkte	138
6.1	Einführungsbeispiel und Begriffe	138
6.2	Krümmung und 2. Ableitung	141
6.3	Der Flachpunkt	146
6.4	Aufgaben zu Krümmung und Wendepunkten	148
7	Steckbriefaufgaben	149
7.1	Auffinden von Funktionsgleichungen	149
7.2	Aufgaben zum Aufstellen von Funktionsgleichungen	153
8	Kurvendiskussion	155
8.1	Graph und seine Ableitungen	155
8.2	Übersicht	157
8.3	Musteraufgaben	162
8.3.1	Diskussion einer Funktion vom Grad 3	162
8.3.2	Diskussion einer Funktion vom Grad 4	165
8.4	Aufgaben zur Kurvendiskussion	168
8.4.1	Aufgaben zum graphischen Differenzieren	168
8.4.2	Aufgaben zur Diskussion	169
8.4.3	Anwendungen	171
8.5	Test: Kurvendiskussion	174

III Stochastik	175
1 Zufallsexperiment und Ereignis	176
1.1 Ergebnis und Ergebnisraum	177
1.2 Mehrstufiges Zufallsexperiment	179
1.3 Simulation mit dem Urnenmodell	181
1.4 Ereignisse	187
1.5 Verknüpfung von Ereignissen	192
1.6 Gesetze von De Morgan	197
1.6.1 Analyse und Beschreibung von Merkmalen	198
1.6.2 Fehleranalyse und Qualitätskontrolle	199
1.7 Kapitelübergreifende Aufgaben	200
1.8 Überblick – Zufallsexperiment und Ereignis	203
1.9 Test: Zufallsexperiment und Ereignis	204
2 Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	205
2.1 Absolute und relative Häufigkeit	206
2.1.1 Datenerhebung zu Geschlechterunterschieden im Schulerfolg	206
2.1.2 Absolute und relative Häufigkeit beim Würfeln einer Sechse	207
2.1.3 Eigenschaften von relativen Häufigkeiten	207
2.2 Vierfeldertafel	209
2.2.1 Untersuchung von Blutgruppen mittels Vierfeldertafel	209
2.2.2 Datenerhebung zu Fremdsprachenkenntnissen	211
2.2.3 Datenauswertung bei einem Allergietest	213
2.2.4 Aufgaben zu absoluten und relativen Häufigkeiten	215
2.3 Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen	217
2.3.1 1000-maliger Würfelwurf – das Gesetz der großen Zahlen	217
2.3.2 Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Vierfeldertafel	221
2.3.3 Aufgaben zu Wahrscheinlichkeiten	223
2.4 Laplace-Experimente	224
2.5 Pfadregeln	226
2.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit	235
2.7 Stochastische Unabhängigkeit	240
2.7.1 Einflussfaktoren auf das Fahrverhalten	240
2.7.2 (Un-)Abhängigkeit beim Urnenmodell mit und ohne Zurücklegen	242
2.7.3 Aufgaben zu bedingten Wahrscheinlichkeiten und stochastischer (Un-)Abhängigkeit	244
2.7.4 Kapitelübergreifende Aufgaben	246
2.8 Überblick – Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	251
2.9 Test: Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	253
3 Grundlagen der Kombinatorik	254
3.1 Allgemeines Zählprinzip	255
3.1.1 Produktregel der Kombinatorik	255
3.1.2 Aufgaben zur Produktregel (Allgemeines Zählprinzip)	256
3.2 Geordnete Stichproben	257
3.2.1 Variation mit Wiederholung (Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge)	257
3.2.2 Variationen beim Multiple-Choice	258
3.2.3 Anzahl der Möglichkeiten beim Code-Wort	258
3.2.4 Variation ohne Wiederholung (Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge)	259
3.2.5 Permutation	260
3.2.6 Permutation mit Wiederholung (Das Mississippi-Problem)	262
3.2.7 Aufgaben zu geordneten Stichproben	264
3.3 Ungeordnete Stichproben – Kombination	265
3.3.1 Fünf Richtige im Lotto	266
3.3.2 Grundaufgaben der Kombinatorik – ein Überblick	268
3.3.3 Aufgaben zur Kombinatorik	269
3.4 Test: Kombinatorik	271

A Grundlagen	272
A.1 Aufgaben zu linearen Gleichungen	272
A.2 Aufgaben zu linearen Ungleichungen	274
A.3 Aufgaben zu Quadratwurzeln	276
A.4 Aufgaben zu quadratischen Gleichungen	278
A.5 Aufgaben zu Potenzen, Wurzeln, Potenzgleichungen	280
B Grenzwerte	283
B.1 Grenzwerte in der Geometrie	284
B.2 Aus der Geschichte: Achilles und die Schildkröte	287
B.3 Limes-Schreibweise	289
B.4 Grenzwerte von Funktionen	291
B.5 Rechenregeln für Grenzwerte	292
Lösungen	295
1 Lösungen zu Kapitel I	295
2 Lösungen zu Kapitel II	312
3 Lösungen zu Kapitel III	336
Sachwortverzeichnis	358
Bildquellenverzeichnis	361

Berühmte Mathematiker, deren grundlegende Thesen auch im Buch zu finden sind

Blaise Pascal (1623 – 1662)

Französischer Mathematiker, Physiker, Literat und Philosoph. Pascal konstruierte 1642 eine Rechenmaschine zum Addieren und Subtrahieren von Zahlen. Er beschäftigte sich mit der Wahrscheinlichkeitsberechnung und untersuchte Würfelspiele. Nach ihm ist das Pascal'sche Dreieck zur geometrischen Darstellung der Binomialkoeffizienten benannt.

„Jeder Wahrheit sollte man hinzufügen, dass man sich auch der entgegengesetzten Wahrheit entsinne“.



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)

Deutscher Mathematiker, Physiker und Philosoph. Leibniz konstruierte 1672 eine Rechenmaschine, mit der man multiplizieren, dividieren und Quadratwurzeln ziehen konnte. Leibniz entwickelte zwischen 1672 bis 1676 (unabhängig von Isaac Newton) die Infinitesimalrechnung. Auf ihn geht die heute übliche Differenzialschreibweise $\frac{dy}{dx}$ und das Integralzeichen $\int dx$ zurück. Die Leibniz-Formel dient zur Berechnung von Determinanten bei Matrizen.

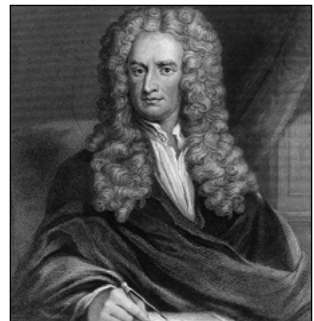
„Beim Erwachen hatte ich schon so viele Einfälle, dass der Tag nicht ausreicht, sie niederzuschreiben“.



Sir Isaac Newton (1642 – 1726)

Englischer Naturforscher, Mathematiker, Physiker und Astronom. Er entwickelte (unabhängig von Gottfried Wilhelm Leibniz) die Infinitesimalrechnung um Differentialrechnung und Integralrechnung zu betreiben. Newton ist der Verfasser des Buches Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.

„Der wesentliche Kern der Schaffenskraft ist, den Misserfolg nicht zu fürchten.“



Christiaan Huygens (1629 – 1695)

Niederländischer Physiker, Astronom und Mathematiker. Huygens verfasste ein Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Grundbegriff ist dabei der Erwartungswert. Er schrieb auch eine Abhandlung über das Würfelspiel (Der Wert aller Chancen bei Glücksspielen)

„Ich glaube, wir wissen nichts mit Sicherheit, aber wahrscheinlich alles“.



I Ganzrationale Funktionen

1 Lineare Funktionen

Arbeitsblatt lineare Funktionen

Mit linearen Funktionen sind Sie bereits aus der Mittelstufe vertraut. Wir beginnen das Kapitel mit einem Arbeitsblatt, dessen Bearbeitung Ihnen nicht schwer fallen sollte.

Erinnerung: Steigungsdreieck (Abb. 1)

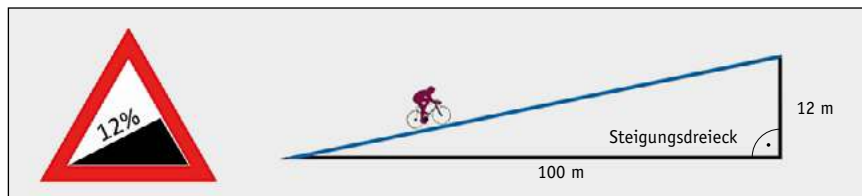


Abb. 1 Steigung und Steigungsdreieck

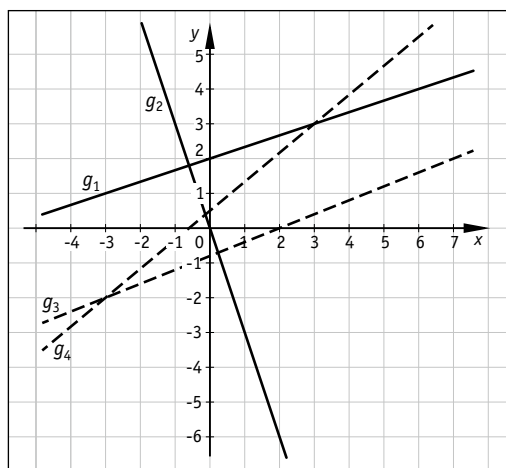


Abb. 2 Geraden g_1 , g_2 , g_3 , g_4

Geradengleichungen

Ermitteln Sie Gleichungen der Geraden g_1 bis g_4 in Abb. 2!

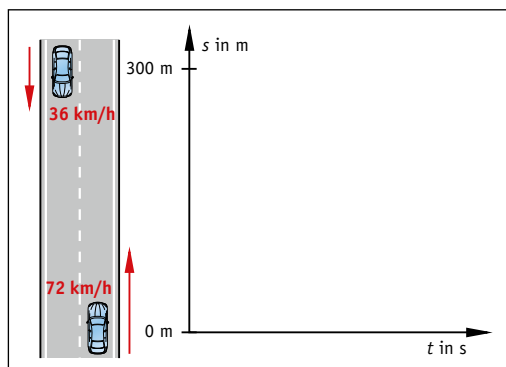


Abb. 3 Begegnungsvorgang

Zeit-Ort-Diagramm

In Abb. 3 ist ein Begegnungsvorgang dargestellt. Formulieren Sie die Aufgabe selbst!

Lösungsvorschlag

Steigungsdreieck (vgl. Kap. 1.2)

$$m = \frac{\text{Hochwert}}{\text{Rechtswert}} = \frac{12 \text{ m}}{100 \text{ m}} = 0,12 \triangleq 12 \%$$

Geradengleichungen (vgl. Kap. 1.2)

- geeignete Steigungsdreiecke eintragen und Steigung ablesen
- y-Achsenabschnitt ablesen (falls möglich) oder berechnen
- alternativ: Punkt-Richtungsform der Gerade verwenden (vgl. Kasten auf S. 20)

Zeit-Ort-Diagramm

Eine Aufgabe könnte lauten, wann ($t = ?$) und wo ($s = ?$) sich die Autos treffen.

- Zunächst ist es hilfreich, die Geschwindigkeiten in Meter pro Sekunde ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$) umzurechnen:

$$72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{72\,000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ und } 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{36\,000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

- Lässt man das „untere“ Auto mit „positiver Geschwindigkeit“ im Ursprung starten, dann hat das „obere“ Auto den y-Achsenabschnitt 300 m und „negative Geschwindigkeit“, also gilt

$$s_1(t) = +20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t \text{ und } s_2(t) = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 300 \text{ m}.$$

Wenn beide Autos sich treffen, befinden sie sich zur selben Zeit am selben Ort, also

$$s_1(t) = s_2(t) \quad (\text{gleichsetzen})$$

$$+20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 300 \text{ m} \quad \left| +10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t \right.$$

$$30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t = 300 \text{ m} \quad \left| : 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right.$$

$$t = 10 \text{ s}$$

$$\Rightarrow s = +20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10 \text{ s} = 200 \text{ m}$$

Die Autos treffen sich also nach 10 s. Das „untere“ Auto hat dann 200 m zurückgelegt, das „obere“ 100 m.

1.1 Einführungsbeispiel

Abbrennen einer Kerze

Eine 12 cm lange Kerze brennt pro Stunde um 1,5 cm herunter.
An diesem Beispiel werden die folgenden Begriffe aus der Mittelstufe wiederholt:

- abhängige und unabhängige Variable
- Wertetabelle
- Funktionsgraph
- Funktionsterm und -gleichung
- Nullstelle und y-Achsenabschnitt
- Definitions- und Wertemenge



Variablen

Wir führen t für die Zeit („time“) und L für die Länge („length“) ein.

Da die Länge von der Zeit abhängt, ist L die **abhängige** Variable, t die **unabhängige** Variable.

Wertetabelle

Die zeitliche Änderung der Länge der Kerze kann entweder in einer Tabelle (Tab. 1) oder in einem Diagramm (Abb. 1) erfasst werden.

t in h	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L in cm	12	10,5	9,0	7,5	6,0	4,5	3,0	1,5	0

Tab. 1 zeitliche Abhängigkeit der Kerzenlänge

Funktionsgraph (Abb. 1)

Die unabhängige Variable wird auf der Abszisse (x-Achse), die abhängige Variable auf der Ordinate (y-Achse) angetragen.

Funktionsterm

Welche Länge hat die Kerze nach einer bestimmten Zeit?

- Nach 1 h gilt $L = 12 \text{ cm} - 1,5 \text{ cm}$,
 - nach 2 h gilt $L = 12 \text{ cm} - 2 \cdot 1,5 \text{ cm}$,
 - \vdots
 - zum Zeitpunkt t gilt $L(t) = 12 \text{ cm} - t \cdot 1,5 \frac{\text{cm}}{\text{h}}$.
- Dabei bedeutet $L(t)$ (lies: „ L von t “) die Länge der Kerze zum Zeitpunkt t .

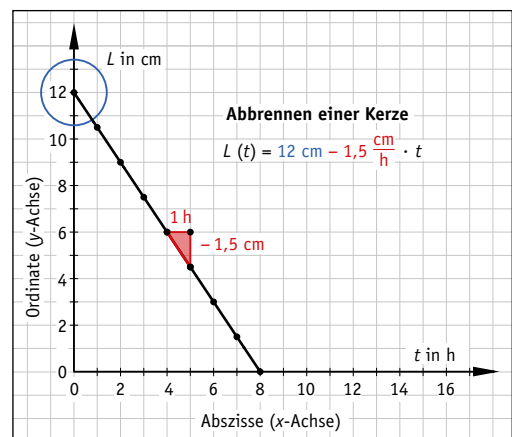


Abb. 1 Funktionsgraph und -gleichung
(blau: y-Achsenabschnitt; rot: Steigung) zu Tab. 1

Beispiel

Nach 45 min, also $t = \frac{3}{4} \text{ h} = 0,75 \text{ h}$, ist

$$L(0,75 \text{ h}) = 12 \text{ cm} - 0,75 \text{ h} \cdot 1,5 \frac{\text{cm}}{\text{h}} = 12 \text{ cm} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} \text{ cm} = 10 \frac{7}{8} \text{ cm} \approx 10,9 \text{ cm}.$$

y-Achsenabschnitt: Den y-Achsenabschnitt erhält man für den x-Wert null.

Hier: $L(0) = 12 - 1,5 \cdot 0 = 12$ (Zentimeter).

Nullstelle: Als Nullstelle wird derjenige x -Wert bezeichnet, für den der y -Wert null wird.

Hier: $L(t) = 0 \Leftrightarrow 12 - 1,5 \cdot t = 0 \Rightarrow t = \frac{12}{1,5} = 8$ (Stunden).

Definitionsmenge: Damit wird die Menge aller zulässigen Einsetzungen („ x -Werte“) bezeichnet.

Da die Kerze nach 8 h heruntergebrannt ist, sind für t nur Werte zwischen 0 und 8 möglich (Grenzen jeweils eingeschlossen). Diese Werte können als Intervall oder in der Mengenschreibweise (vgl. auch Tab. 1) angegeben werden:

$D = [0; 8]$ („abgeschlossenes Intervall von 0 bis 8“)

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 8\}$ („Menge aller x mit der Eigenschaft ...“)

Dabei steht das Symbol \mathbb{R} für die Menge der reellen Zahlen. Weitere wichtige Zahlenmengen können Tab. 1 entnommen werden und sind aus der Mittelstufe bekannt.

Wertemenge: Dabei handelt es sich um die Menge aller möglichen Funktionswerte („ y -Werte“).

Da die Kerze anfangs 12 cm lang ist und auf die Länge 0 cm herunterbrennt, ist die Wertemenge $W = [0; 12] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 12\}$.

Symbol	Bezeichnung	Elemente
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen	0, 1, 2, 3, ...
\mathbb{Z}	... der ganzen Zahlen	..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
\mathbb{Q}	... rationalen Zahlen (Quotienten)	$\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$; z. B. $\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{10}{5} = 2$, ...
\mathbb{R}	... reellen Zahlen	alle aus \mathbb{Q} , ergänzt um die irrationalen Zahlen wie z. B. $\sqrt{2}$, π , $\log_2(3)$, $\sin(8^\circ)$, ...
\mathbb{R}^+	... positiven reellen Zahlen	$]0; +\infty[$
\mathbb{R}_0^+	... positiven reellen Zahlen mit null	$[0; +\infty[$
\mathbb{R}^-	... negativen reellen Zahlen	$] -\infty; 0[$
\mathbb{R}_0^-	... negativen reellen Zahlen mit null	$] -\infty; 0]$
$[a, b]$	geschlossenes Intervall	alle reellen Zahlen zwischen a und b , einschließlich a und b
$]a, b[$	offenes Intervall	alle reellen Zahlen zwischen a und b , a und b ausgeschlossen
$[a, b[$	halboffenes Intervall (rechts offen)	alle reellen Zahlen zwischen a und b , a eingeschlossen, b ausgeschlossen
$]a, b]$	halboffenes Intervall (links offen)	alle reellen Zahlen zwischen a und b , a ausgeschlossen, b eingeschlossen

Tab. 1 in der Mathematik häufig verwendete Zahlenmengen und Intervalle

Merke: Als **Funktion** wird in der Mathematik eine Vorschrift bezeichnet, die einem x -Wert eindeutig einen y -Wert zuordnet. Die Menge aller **zulässigen** x -Werte wird **Definitionsmenge** D genannt, die Menge aller **möglichen** y -Werte **Wertemenge** W . Funktionen können durch **Wertetabellen** ($x \mapsto y$) und/oder **Graphen** anschaulich dargestellt werden. Eine algebraische Beschreibung erfolgt durch eine **Funktionsgleichung** $y = f(x)$.

Auf die Bedingung der Eindeutigkeit gehen wir an dieser Stelle nicht weiter ein, sondern verweisen auf Grundwissen aus der Mittelstufe. Außerdem gibt es Funktionen, die **nicht** durch Gleichungen beschrieben werden können (z. B. Fieberkurve).

1.2 Geradengleichung und Steigungsdreieck

Im Einführungsbeispiel (Kap. 1.1) war $L(t) = 12 \text{ cm} - 1,5 \frac{\text{cm}}{\text{h}} \cdot t$ die Länge der Kerze abhängig von der Zeit t . Bei Verallgemeinerung des Problems wird t durch x (Abszisse) und L durch y (Ordinate) ersetzt. Unterdrücken der Einheiten führt dann zu

$$y(x) = 12 - 1,5 \cdot x = -1,5 \cdot x + 12 \Rightarrow y = \underbrace{-\frac{3}{2}}_{\text{Steigung}} \cdot x + \underbrace{12}_{\text{y-Achsenabschnitt}}$$

Geradengleichung („Steigung mal x plus y -Achsenabschnitt“):

$$y = m \cdot x + t; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Berechnung der Steigung

$$m = \frac{\text{Hochwert}}{\text{Rechtswert}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Beispiel

Steigung der Gerade durch die Punkte A(-5|1) und B(0|3) (vgl. Abb. 1):

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{0 - (-5)} = \frac{2}{5}.$$

Da Punkt B die x -Koordinate null hat, ist der y -Achsenabschnitt $t = y_B = 3$, also gilt

$$y(x) = \frac{2}{5} \cdot x + 3.$$

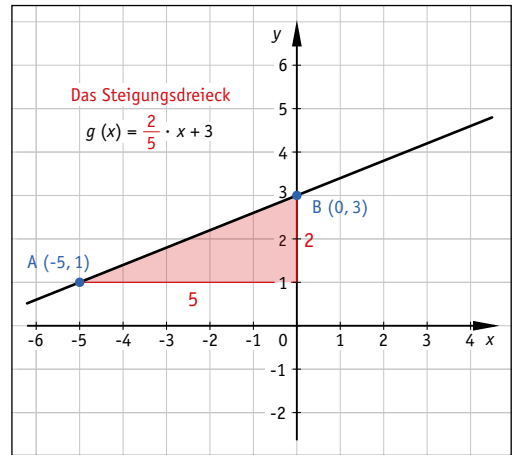


Abb. 1 Steigungsdreieck

! Achtung: Der y -Achsenabschnitt muss oft erst berechnet werden!

Beispiel

Gleichung der Geraden $g = AB$ durch die Punkte A(2|3) und B(5|7)

- Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7 - 3}{5 - 2} = \frac{4}{3}$ („Hochwert durch Rechtswert“)
- Zwischenergebnis: $g(x) = \frac{4}{3}x + t$
- A und B liegen auf g , also erfüllen die Koordinaten die Geradengleichung, d. h.

$$y = \frac{4}{3}x + t \xrightarrow{A \in g} \underset{y_A}{3} = \frac{4}{3} \cdot \underset{x_A}{2} + t \Leftrightarrow 3 = \frac{8}{3} + t \Rightarrow t = \frac{1}{3}.$$

- Lösung: $g(x) = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ (Geradengleichung)

Merke: Gerade zeichnen in zwei Schritten:

1. Markiere den y -Achsenabschnitt t .
2. Zeichne dort ein *geeignetes* Steigungsdreieck. Hierfür sollte der Steigungswert (Bruch!) ggf. erweitert werden, um die Zeichengenauigkeit zu erhöhen.

Beispiel

Die Gerade mit $y = -1,2 \cdot x + 2$ soll in ein Koordinatensystem eingetragen werden.

1. Ablesen aus der Funktionsgleichung liefert $t = +2$ als y -Achsenabschnitt ...
2. ... und Steigung $m = -1,2 = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5}$ (negative Steigung \triangleq Gefälle).

Die Gerade zeigt Abb. 1.

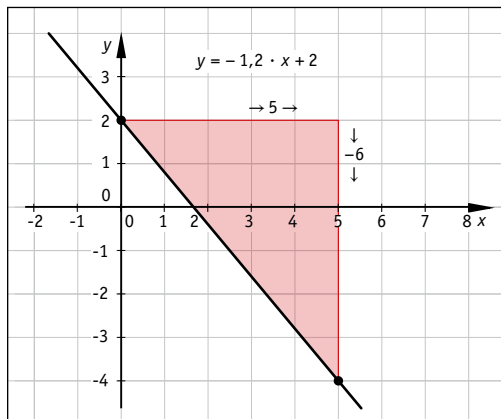


Abb. 1 Negative Steigung

Besondere Geraden (Abb. 2)

- $y = x$ ist die Winkelhalbierende (WH) des I. und III. Quadranten,
- $y = -x$ ist die WH des II. und IV. Quadranten,
- $y = a$ ist **Parallele zur x -Achse**:
 - für $a > 0$ oberhalb der x -Achse,
 - für $a < 0$ unterhalb der x -Achse.
- $x = a$ ist **Parallele zur y -Achse**:
 - für $a > 0$ rechts von der y -Achse,
 - für $a < 0$ links von der y -Achse.

Sonderfälle

- $y = 0$ ist die Gleichung der x -Achse,
- $x = 0$ ist die Gleichung der y -Achse.

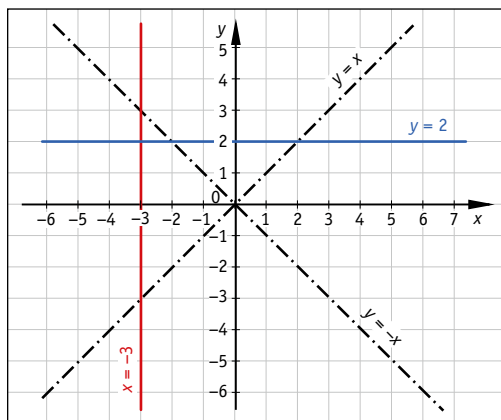


Abb. 2 Besondere Geraden

Quadranten

Das Koordinatensystem wird in vier Quadranten eingeteilt, die Nummerierung beginnt „rechts oben“ (x, y beide positiv) und erfolgt mathematisch positiv, also gegen den Uhrzeigersinn (Abb. 3).

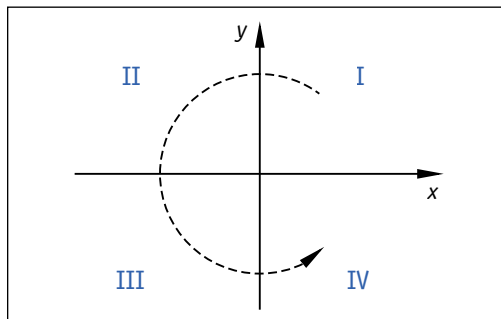


Abb. 3 Die vier Quadranten des Koordinatensystems werden gegen den UZS durchnummeriert

1.3 Lagebeziehung von Geraden

Parallele Geraden

... haben offensichtlich die gleiche Steigung:

$$g_1 \parallel g_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2.$$

Zueinander senkrechte Geraden

In Abb. 1 gilt für die Steigungen m_1 und m_2 zweier zueinander senkrechten Geraden:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{3} \wedge m_2 = -3 \\ \Rightarrow m_1 &= -\frac{1}{m_2} \\ \Rightarrow m_1 \cdot m_2 &= -1. \end{aligned}$$

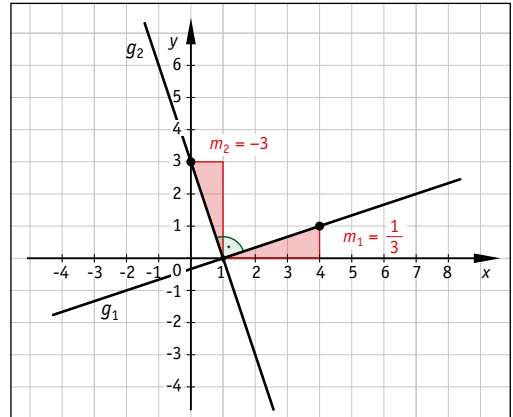


Abb. 1 Zueinander senkrechte Geraden ($g_1 \perp g_2$)

Das Beispiel lässt sich verallgemeinern (Drehung des Steigungsdreiecks um 90° , wobei Δx und Δy vertauscht werden und Δy sein Vorzeichen ändert).

Senkrechte Geraden: Zwei Geraden g_1 und g_2 sind genau dann orthogonal (senkrecht), wenn das Produkt ihrer Steigungen (m_1 und m_2) den Wert -1 hat, also

$$g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Schnittpunkt zweier Geraden

Bei sich schneidenden Geraden kann der Schnittpunkt nicht nur abgelesen, sondern auch rechnerisch bestimmt werden. Das Verfahren ist aus der Mittelstufe bekannt.

Beispiel

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $g_1(x) = \frac{1}{3}x + 1$ und $g_2(x) = -x + 4$.

1. Gleichsetzen:

$$\begin{aligned} g_1 \cap g_2: \quad \frac{1}{3}x + 1 &= -x + 4 \quad | +x - 1 \\ \frac{4}{3}x &= 3 \quad | \cdot \frac{3}{4} \text{ (Kehrbruch)} \\ x &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

2. Einsetzen (z. B. in g_2 , da einfacher):

$$y = g_2\left(\frac{9}{4}\right) = -\frac{9}{4} + 4 = -\frac{9}{4} + \frac{16}{4} = \frac{7}{4}$$

3. Probe (optional):

$$g_1\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4} \quad \checkmark$$

Lösung: Schnittpunkt $S\left(\frac{9}{4} \mid \frac{7}{4}\right) = (2,25 \mid 1,75)$, in Übereinstimmung mit Abb. 2!

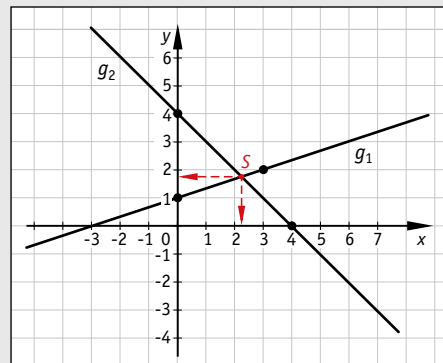


Abb. 2 Schnitt $g_1 \cap g_2 = \{S\}$ zweier Geraden (\cap ist Schnittmenge, \cup wäre Vereinigungsmenge; Eselsbrücke: Schnittmenge, Vereinigungsmenge)

Schnittpunktberechnung zweier Geraden

1. Beide Geradengleichungen gleichsetzen und nach x auflösen.
2. Den x -Wert in eine der Geradengleichungen einsetzen \rightarrow erhalte y -Wert.
3. Probe (optional): Die Koordinaten des Schnittpunktes müssen auch die andere Geradengleichung erfüllen!

☞ **Aufgaben S. 23**

Die Berechnung der Schnittpunktkoordinaten ist gleichbedeutend mit dem Lösen einer linearen Gleichung. Hierbei können folgende Fälle auftreten.

Allgemeine lineare Gleichung

$$a \cdot x + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}, \text{ falls } a \neq 0.$$

Falls $a = 0$, dann folgt $0 \cdot x + b = 0$. Und nun:

- ✓ Falls $b = 0$, dann ist $L = \mathbb{R}$, d. h. die Gleichung ist allgemeingültig (sie hat unendlich viele Lösungen).

Geometrisch: Die zugehörigen Geraden sind identisch.

- ✓ Falls $b \neq 0$, dann ist $L = \{ \}$ (leere Menge), d. h. die Gleichung ist unlösbar.

Geometrisch: Die zugehörigen Geraden sind echt parallel.¹

Fallunterscheidung

Die durchgeführte Überlegung wird als Fallunterscheidung bezeichnet: Abhängig vom Wert der Variablen (a und/oder b) ergeben sich unterschiedliche Lösungsmengen. Die Variablen, die *nicht* Lösungsvariablen sind, werden auch als Parameter bezeichnet (vgl. Kap. 1.5).

Beispiel

Lösen Sie die Gleichung $\frac{1}{2}tx - t = 0$ nach x auf.

$$\frac{1}{2}tx - t = 0 \quad | + t$$

$$\frac{1}{2}tx = t \quad | \cdot 2; : t \quad (t \neq 0!)$$

$$x = 2, \text{ falls } t \neq 0$$

Falls $t = 0$ ist, dann erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (allgemeingültig)} \Rightarrow L = \mathbb{R}.$$

$$\text{Ergebnis: } L = \begin{cases} \{2\}, & \text{falls } t \neq 0 \\ \mathbb{R}, & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

☞ **Aufgaben S. 272**

¹ Der Zusatz „echt“ parallel ist notwendig, denn „identisch“ bedeutet in gewisser Weise ebenfalls „parallel“ (Abstand null).

1.4 Lineare Ungleichungen

Aus der TIMSS-Studie²

Gemeinsame Kasse in Japan: Zwei Brüder A und B zahlen in eine gemeinsame Kasse ein. A besitzt anfangs 180 Yen, B nur 110 Yen. Dafür zahlt B wöchentlich nur 5 Yen ein, A hingegen 10 Yen. Ab wann hat A weniger Geld als B?



Lösen durch Probieren

Am einfachsten lässt sich die Frage mit Hilfe einer Tabelle (Tab. 1) lösen. Dabei stellt man schnell fest, dass die einfachste Lösung nicht unbedingt die effizienteste ist. Also ist es sinnvoll, ein mathematisches Verfahren zur Lösung des Problems zu entwickeln.

Zeit	A	B
0 (zu Beginn)	180 Yen	110 Yen
nach 1 Woche	170	105
nach 2 Wochen	160	100
3 Wochen	150	95
4	140	90
⋮	⋮	⋮
t	$180 - 10 \cdot t$	$110 - 5 \cdot t$

Tab. 1 Tabelle zur „gemeinsamen Kasse“

Lösen durch Rechnen

Wie in Tab. 1 ersichtlich (letzte Zeile), ist die Ungleichung $180 - 10 \cdot t < 110 - 5 \cdot t$ (Zeit t in Wochen) zu lösen. Grundmenge ist $G = \mathbb{N}$ (nur positive ganze Wochen). Aus der Mittelstufe ist das folgende Lösungsverfahren bekannt:

Lösungsverfahren für lineare Ungleichungen

Löse wie eine Gleichung, aber beachte, dass bei Multiplikation oder Division durch eine negative Zahl das Ungleichheitszeichen (Tab. 2) umgedreht werden muss!

Beispiel

$$-2x - 3 < 1 \quad | + 3$$

$$-2x < 4 \quad | : (-2)$$

$$x > -2$$

oder $L =]-2; +\infty[$ in Intervallschreibweise.

Symbol	Bedeutung
$<$	kleiner
$>$	größer
\leq	kleiner oder gleich
\geq	größer oder gleich

Tab. 2 Ungleichheitszeichen

Graphische Lösung

Bruder A besitzt anfangs 180 Yen, Bruder B 110 Yen. Dies sind die y -Achsenabschnitte zweier Geraden. Das eingangs gestellte Problem lässt sich auch so formulieren: „Ab welchem Wert von t verläuft Gerade A **unterhalb** von Gerade B?“ – Denn:

$$\underbrace{180 - 10 \cdot t}_{y_A} < \underbrace{110 - 5 \cdot t}_{y_B}$$

Aus Abb. 1 entnimmt man $t > 14$, also hat A nach 15 Wochen weniger als B!

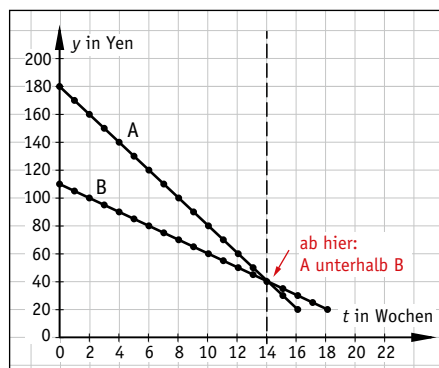


Abb. 1 Graphische Lösung zur „gemeinsamen Kasse“

☉ Aufgaben S. 274

² Trends in International Mathematics and Science Study, eine Studie, die im regelmäßigen Turnus die Leistungen von Schülern international vergleicht.

1.5 Geradenscharen

Wir betrachten einige einführende Aufgaben, die Sie mit Ihrem bereits erworbenen Wissen und ein wenig Allgemeinbildung lösen können.

Geradenbündel

Abb. 1 gibt den Bewegungsablauf dreier Fahrzeuge wieder.

1. Ordnen Sie die Graphen den Verkehrsteilnehmern Auto, Mofa und Fahrrad zu (mit Begründung).
2. Stellen Sie die Gleichungen $s = s(t)$ der drei Geraden auf.
3. Tragen Sie die Bewegung eines Läufers $\left(12 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ mit ein.

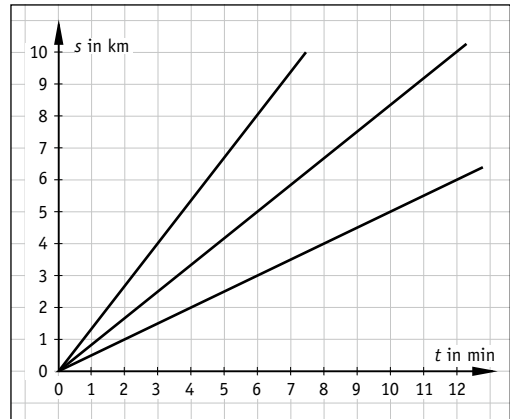


Abb. 1 Geradenbündel

Parallelenschar

Beschreiben Sie den Bewegungsablauf der drei Verkehrsteilnehmer in Abb. 2 und stellen Sie die Geradengleichungen auf.

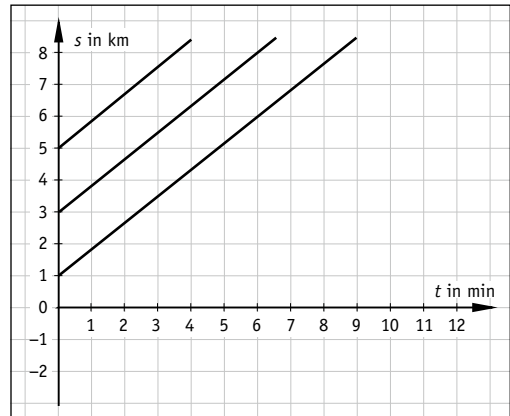


Abb. 2 Parallelenschar

Und noch ein Bündel ...?

Bestimmen Sie die „Steigungen“ der verwendeten Stoffe!

Geben Sie deren physikalische Bedeutung an.

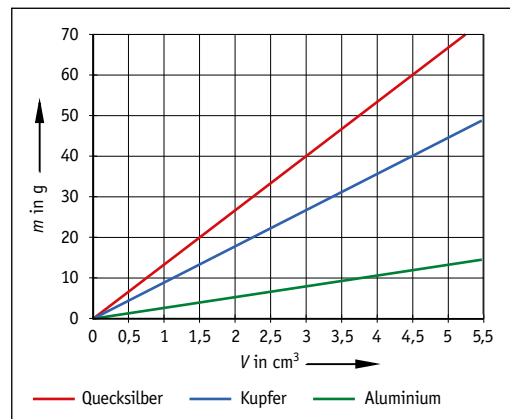


Abb. 3 Geradenbündel

Lösungshinweise

Abb. 1, S. 18

1. Die Geschwindigkeit entspricht der Steigung im $s(t)$ -Diagramm, also „Auto, Mofa, Fahrrad“ (von oben nach unten).

$$2. s_A(t) = \frac{4}{3} \frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot t \text{ fürs Auto}$$

$$s_M(t) = \frac{5}{6} \frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot t \text{ fürs Mofa}$$

$$s_F(t) = \frac{1}{2} \frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot t \text{ fürs Fahrrad}$$

$$s(t) = v \cdot t \text{ (} v \text{ für velocity, Geschwindigkeit)}$$

3. Eine Umrechnung in „passende“ Einheiten ergibt

$$12 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{12}{60} \frac{\text{km}}{\text{min}} = \frac{1}{5} \frac{\text{km}}{\text{min}} = \frac{2}{10} \frac{\text{km}}{\text{min}},$$

Der Läufer hat also eine Geschwindigkeit von 2 km in 10 min (Ursprungs-Halbgerade durch den Punkt (10|2)).

Abb. 2, S. 18

Alle Fahrzeuge haben dieselbe Geschwindigkeit (nämlich $v = \frac{5}{6} \frac{\text{km}}{\text{min}}$ bzw. $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$), starten jedoch an unterschiedlichen Positionen.

Die Geradengleichungen lauten

$$s_5(t) = \frac{5}{6} \frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot t + 5 \text{ km („oben“)}$$

$$s_3(t) = \frac{5}{6} \frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot t + 3 \text{ km („Mitte“)}$$

$$s_1(t) = \frac{5}{6} \frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot t + 1 \text{ km („unten“)}$$

Allgemein in physikalischer Schreibweise: $s(t) = v \cdot t + x_0$ mit x_0 = Startposition.

Abb. 3, S. 18

Die „Steigung“ hat die Einheit $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ (Hochwert geteilt durch Rechtswert), deswegen handelt es sich

um die Dichte ρ (lies: „rho“) des Materials.

Ablesen aus dem Diagramm ergibt:

$$\rho_{\text{Al}} = \frac{13 \text{ g}}{5 \text{ cm}^3} = 2,6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\rho_{\text{Cu}} = \frac{40 \text{ g}}{4,5 \text{ cm}^3} \approx 8,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\rho_{\text{Hg}} = \frac{67 \text{ g}}{5 \text{ cm}^3} = 13,4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Die Werte können mit einer Formelsammlung verglichen werden ...

Beispiele für Geradenscharen

Zur Beschreibung von Geradenscharen wird neben x und y eine weitere Variable benötigt. Diese Variable wird als Parameter³ bezeichnet.

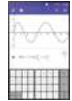
Geradenbüschel (Abb. 1 bis Abb. 3)

- ... mit Büschelpunkt im Ursprung: $y = m \cdot x$; Steigung $m \in \mathbb{R}$ ist Parameter.
- ... mit Büschelpunkt auf der y -Achse, z. B. $y = m \cdot x + 2$ ($m \in \mathbb{R}$ ist Parameter)
- ... mit Büschelpunkt beliebig, z. B. $B(2|1) \Rightarrow y = m \cdot (x - 2) + 1$, $m \in \mathbb{R}$

Allgemein gilt:

Punkt-Steigungsform der Geraden g :

$$y = m \cdot (x - x_P) + y_P, \quad P(x_P | y_P) \in g.$$



Parallelschar (Abb. 4)

... z. B. mit Steigung $m = \frac{3}{2}$: Gleichung $y = \frac{3}{2}x + t$ mit y -Achsenabschnitt $t \in \mathbb{R}$ als Parameter

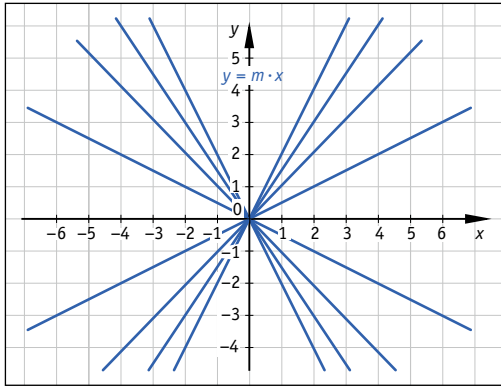


Abb. 1 Büschel mit Büschelpunkt (0|0)

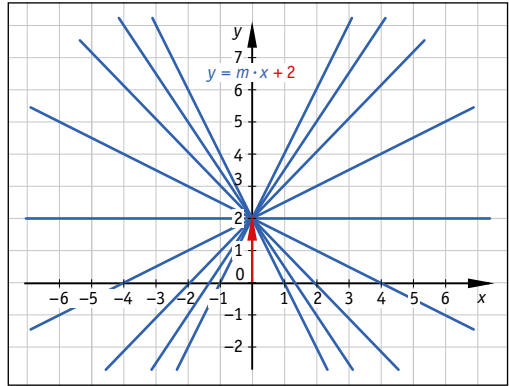


Abb. 2 Büschel mit Büschelpunkt (0|2)

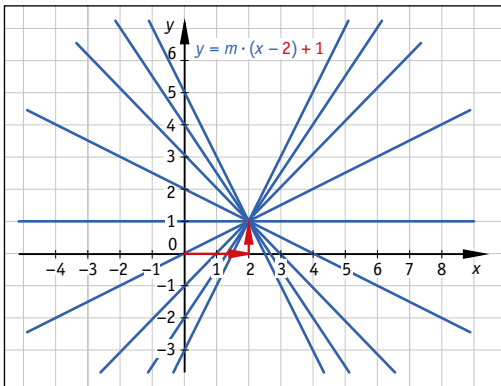


Abb. 3 Büschel mit Büschelpunkt (2|1)

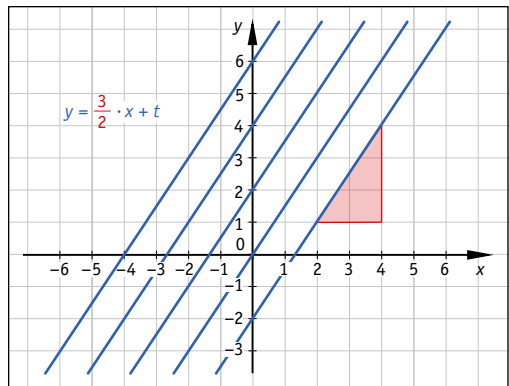


Abb. 4 Parallelschar mit Steigung $\frac{3}{2}$

© Aufgaben S. 25

³ Definition des Begriffs laut Duden: „in Funktionen und Gleichungen neben der eigentlichen Variablen auftretende, entweder unbestimmt oder konstant gehaltene Größe“