Beispiel 5

Ein Sparbetrag von 3 000,00 € brachte in der Zeit vom 25. 1. bis 5. 7. insgesamt 20,00 € an Zinsen.
Zu welchem Zinssatz war der Sparbetrag angelegt?

Lösung

Gegeben: Z = 20; K = 3000;

Berechnung der Zinstage vom 25. 1. bis 5. 7.: $5 + 5 \cdot 30 + 5 = 160$

$t = 160$

Hinweis: 25. 1. bis 30. 1. ≙ 5 Tage; 5 Monate ≙ 150 Tage; 1. 7. bis 5. 7. ≙ 5 Tage

Gesucht: Zinssatz p %

In die Formel $\mathbf{Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}}$

Zahlenwerte einsetzen: $20 = \frac{3000 \cdot p \cdot 160}{100 \cdot 360}$

und nach p umstellen: $p = \frac{20 \cdot 100 \cdot 360}{3000 \cdot 160}$

$p = 1{,}5$

DerZinssatz beträgt 1,5 %.

Beispiel 6

1,75 % **Tagesgeld** Zinsen

Jemand hat am 16. Mai 2 000,00 € bei einer Bank zu 1,75 % auf ein Tagesgeldkonto eingezahlt.
Wie viel Tage muss dieses Kapital angelegt werden, wenn es einen Zinsbetrag von 14,00 € bringen soll?
Zu welchem Datum findet die Auszahlung statt?

Lösung

Gegeben: Z = 14; K = 2000 ; Zinssatz: p % = 1,75 %

Gesucht: Zeitraum t und Auszahlungsdatum

In die Formel $\mathbf{Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}}$

Zahlenwerte einsetzen: $14 = \frac{2000 \cdot 1{,}75 \cdot t}{100 \cdot 360}$

$t = \frac{14 \cdot 100 \cdot 360}{2000 \cdot 1{,}75}$

$t = 144$

Das Kapital muss 144 Tage angelegt werden.

Berechnung des Auszahlungsdatums:

16. Mai bis 30. Mai: ≙ 14 Tage; 4 Monate ≙ 120 Tage; 1.10. bis 10.10. ≙ 10 Tage

Das Kapital wird mit Wertstellung 10.Oktober ausgezahlt.

Aufgaben

1 Berechnen Sie die fehlenden Werte.

	Kapital	Zinssatz	Zeit	Zinsen
a)	520,00 €	2,5 %	1.2. bis 17.04.	?
b)	1200,00 €	4,5 %	?	4,50 €
c)	540,00 €	?	6 Monate	29,70 €
d)	?	9	1,5 Jahre	27,00 €

2 Simone zahlt am 27. Dezember 800,00 € auf ein neu eingerichtetes Sparkonto ein, das mit 1,5 % verzinst wird. Auf welches Guthaben wächst das Konto bis zu ihrem Urlaub am 20. Juli des Folgejahres an?

3 Ein Privatmann zahlte für ein Darlehen, das er am 12. 6. bei seiner Bank aufgenommen und am 19. 12. zurückgezahlt hat, Zinsen in Höhe von 233,75 €. Der Zinssatz der Bank betrug 7,5 %. Wie hoch war das ausgeliehene Darlehen?

4 Ein Kaufmann hat bei einer Rechnung über 675,00 € das Zahlungsziel überschritten und überweist deshalb unter Berücksichtigung von 7 % Verzugszinsen am 27. Mai insgesamt 677,63 € an seinen Lieferanten.
Mit wie viel Tagen war er mit seiner Rechnung in Verzug?
An welchem Tag war die Rechnung fällig?

5 Ein Ingenieur zahlte für ein Darlehen in Höhe von 18 000,00 €, das vom 18. 5. bis 13. 10. ausgeliehen war, Zinsen in Höhe von 362,50 €.
Zu welchem Zinssatz war das Darlehen ausgeliehen?

6 Der Einzelhandelskaufmann Groß kommt mit einer Rechnung über 3 690,00 €, fällig am 13. 9., in Zahlungsverzug. Sein Lieferant belastet ihn daraufhin wegen Überschreitung des Zahlungsziels mit Verzugszinsen in Höhe von 17,43 € bei einem Zinssatz von 10 %.
An welchem Tag stellt der Lieferant die Abrechnung über die Verzugszinsen aus?

7 Ein privates Geldinstitut unterbreitet seinen Kunden folgendes Angebot: „Sie zahlen 10 000,00 € bei uns ein und wir zahlen nach 10 Monaten 10 208,33 € zurück".
Lohnt sich dieses Angebot, wenn Sie bei Ihrer Bank einen Zins von 2 % für Ihre Spareinlage erhalten?

8 Ein Schüler hatte am 12. 3. einen Geldbetrag bei seiner Bank angelegt und erhielt dafür am Jahresende eine Zinsgutschrift in Höhe von 6,00 €. Der Zinssatz der Bank lag bei 1,5 %.
Welchen Betrag hatte der Schüler eingezahlt?

9 Eine Rechnung über 490,00 €, die am 20. Juni fällig war, wird erst am 11. Juli einschließlich Verzugszinsen und 2,50 € Mahngebühren mit 494,79 € zurückgezahlt.
Wie viel Verzugszinsen wurden berechnet (in € und %)?

3.2 Gemeinsame Punkte

Gemeinsame Punkte von Kurve und x-Achse

Beachten Sie

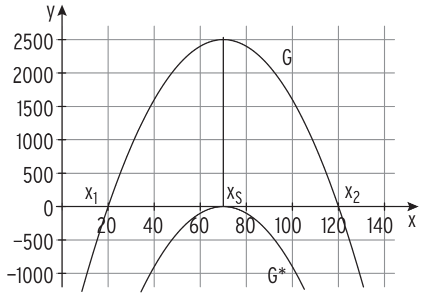
Bedingung für die **Nullstelle von f**: $f(x) = 0$
Die **Nullstelle** einer quadratischen Funktion zu berechnen, heißt, eine **quadratische Gleichung lösen.**

Beispiel 1

In einer Unternehmung lässt sich der **Gewinn** in € näherungsweise darstellen durch die Funktion G mit $G(x) = -x^2 + 140x - 2400$.
Die Variable x steht für die Stückzahl der produzierten und verkauften Ware.

a) Für welche Stückzahlen wird ein positiver Gewinn erzielt?
b) Wie groß ist der maximale Gewinn?
c) Die Fixkosten werden um 2500 € erhöht.
Beschreiben Sie die zugehörige Gewinnfunktion.

Lösung



a) Aus der grafischen Darstellung des Gewinnverlaufs lässt sich die **Gewinnzone** (Bereich für die Ausbringungsmenge x mit $G(x) \geq 0$) erkennen.

Um den Übergang von der Verlust- zur Gewinnzone **exakt** angeben zu können, müssen die **Schnittstellen von Gewinnkurve und x-Achse** berechnet werden.

Die Bedingung dafür ist $G(x) = 0$ — $-x^2 + 140x - 2400 = 0$

quadratische Gleichung in Normalform: $x^2 - 140x + 2400 = 0$

Lösung mit der **pq-Formel:** $x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$p = -140;\ q = 2400$ — $x_{1|2} = 70 \pm \sqrt{(-70)^2 - 2400} = 70 \pm 50$

Lösungen: $x_1 = 20;\ x_2 = 120$

Die Lösungen sind die **Gewinnschwelle** $(x_1 = 20)$ und die **Gewinngrenze** $(x_2 = 120)$.
x_1 und x_2 sind die **Nullstellen** der Gewinnfunktion.

b) Der maximale Gewinn wird im Scheitelpunkt S angenommen.
Für die x-Koordinate von S gilt: $x_S = -\frac{p}{2} = 70$ (vgl. pq-Formel)
Mit $G(70) = 2500$ erhält man den maximalen Gewinn $G_{max} = 2500$ €.

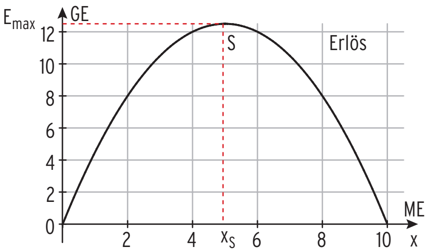
c) Die Gewinnkurve wird um 2500 nach unten verschoben.
Die verschobene Gewinnkurve berührt die x-Achse in $x = 70$ und wird beschrieben durch $G^*(x) = -x^2 + 140x - 4900$.

Beispiel 2

Ein Monopolist orientiert seine Preispolitik an der Preis-Absatz-Funktion p_N mit $p_N(x) = -\frac{1}{2}x + 5$, sein Erlös wird also durch E mit $E(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$ beschrieben. Bestimmen Sie den maximal ökonomisch sinnvollen Defintionsbereich und das Erlösmaximum.

Lösung

$E(x) = p_N(x) \cdot x$ ist ökonomisch sinnvoll für alle x, für die gilt: $E(x) \geq 0$.
Die Erlösparabel hat mit der x-Achse **genau zwei Punkte gemeinsam.**



Seite 477

Bedingung für die Nullstellen: $E(x) = 0$

$-\frac{1}{2}x^2 + 5x = 0$

Lösung durch **Ausklammern:** $-\frac{1}{2}x(x - 10) = 0$

Satz vom Nullprodukt liefert: $x_1 = 0;\ x_2 = 10$

Zwischen $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$ ist der **Erlös positiv.**
Maximal ökonomisch sinnvoller Definitionsbereich
$D_{ök} = [0; 10]$

Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt ist null, wenn **mindestens** ein Faktor null ist:
$u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee v = 0$

Beachten Sie

x_1 und x_2 sind die **Nullstellen** der Funktion E.

Die **erlösmaximale** Ausbringungsmenge liegt genau zwischen den Nullstellen (Symmetrie).
Es gilt für die **x-Koordinate des Scheitelpunkts:**

$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = 5$

Erlösmaximum: $E(5) = 12{,}5$
Der maximale Erlös beträgt 12,5 GE.

Scheitelkoordinate

$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Wirtschaftliche Zusammenhänge

In der Marktform **Monopol** gibt es einen Anbieter, der **Preis** für das betrachtete Gut ist von der Menge abhängig, die am Markt abgesetzt werden soll.

$p_N(x) = a - bx;\ a,\ b > 0$	Preis in GE pro ME abhängig von der Menge x; p_N ist die **Preis-Absatz-Funktion des Monopolisten**
$E(x) = p_N(x) \cdot x$	**Erlös** (Umsatz) in Abhängigkeit von x; quadratische Funktion
$G(x) = E(x) - K(x)$	**Gewinn** = **Erlös** minus **Gesamtkosten**

Beispiel 3

Seite 476

Wo schneidet das Schaubild von f die x-Achse?

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ b) $f(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$ c) $f(x) = x^2 + 3x + 4$

Lösung

Bedingung für die Nullstelle: $f(x) = 0$

Lösung mit Formel

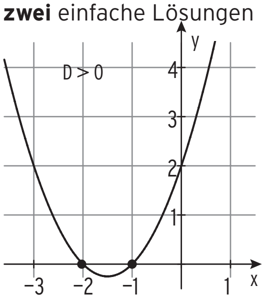
a) $x^2 + 3x + 2 = 0$

$x_{1|2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$

$D = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4} > 0$

$x_1 = -2;\ x_2 = -1$

zwei einfache Lösungen



2 einfache Nullstellen

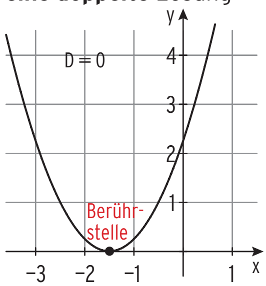
b) $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0$

$x_{1|2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}$

$D = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$

$x_{1|2} = -\frac{3}{2}$

eine doppelte Lösung



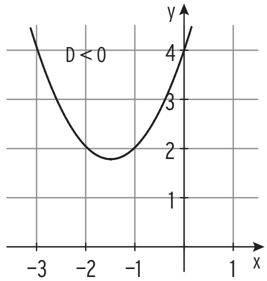
doppelte Nullstelle

c) $x^2 + 3x + 4 = 0$

$x_{1|2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4}$

$D = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 = -\frac{7}{4} < 0$

keine Lösung



keine Nullstellen

Beachten Sie

Lösung der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mithilfe der pq-Formel: $x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ heißt **Diskriminante.**

Die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung hängt von der **Diskriminante D** ab.

D > 0	**D = 0**	**D < 0**
zwei Lösungen	**eine (doppelte) Lösung**	**keine Lösung**

Weitere quadratische Gleichungen:

Lösung durch Ausklammern:

$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = 3$

Lösung durch Wurzelziehen:

$-\frac{1}{2}x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$

$x_{1|2} = \pm\sqrt{2}$

Beachten Sie

$ax^2 + bx = 0$

Ausklammern von x: $x(ax + b) = 0$

Satz vom Nullprodukt:

$x = 0 \vee ax + b = 0$

$ax^2 + c = 0$

Umformen: $x^2 = -\frac{c}{a}$

Lösungen für $-\frac{c}{a} > 0$ durch Wurzelziehen.

Aufgaben

1 Lösen Sie die quadratische Gleichung ohne Hilfsmittel.

Seite 476

a) $x^2 + x - 12 = 0$ **b)** $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0$ **c)** $3 - 2x + \frac{1}{3}x^2 = 0$

d) $x^2 + 2x + 6 = -2x + 1$ **e)** $-x^2 - 1{,}5x - 1{,}25 = 0$ **f)** $x^2 - 6x + 5 = 0$

g) $8x^2 + 3x - 1 = 0$ **h)** $x^2 = x + 3$ **i)** $1{,}5x - 0{,}5x^2 + 2 = 0$

2 Lösen Sie die quadratische Gleichung ohne Formel.

a) $-2x(x + 5) = 0$ **b)** $(3 - x)(x - 6) = 0$ **c)** $\frac{x}{5}(x + 1) = 0$

3 H ist der Graph der quadratischen Funktion f. Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte von H. Wie liegt H im Koordinatensystem? Fertigen Sie eine Skizze an.

a) $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - x - 6)$ **b)** $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + x - \frac{5}{4}$ **c)** $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + x$

4 Bestimmen Sie einen Wert für a so, dass $x^2 - ax = 0$ die Lösung $x_1 = 4{,}5$ hat.

5 Ordnen Sie jeder Parabel einen Funktionsterm zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
$f(x) = -0{,}5(x - 1)^2$; $g(x) = 0{,}5x^2 - x$; $h(x) = (x + 1)(x - 2)$

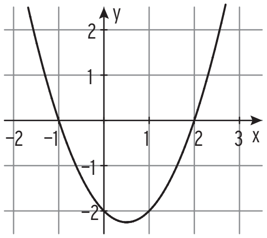


Abb. 1

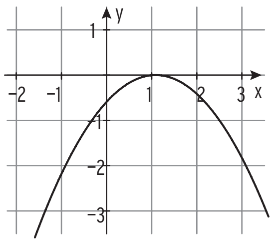


Abb. 2

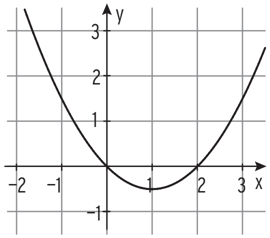


Abb. 3

6 Gegeben ist die Preis-Absatz-Funktion p_N mit $p_N(x) = -\frac{4}{5}x + 12$.
Bestimmen Sie den maximal ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich und das Erlösmaximum.

7 Für eine Ofenproduktion gilt die Gewinnfunktion G mit
$G(x) = -0{,}2x^2 + 12x - 100$; $x \geq 0$; x in ME, G(x) in €.

a) Bestimmen Sie die Gewinnschwelle, die Gewinngrenze und den maximalen Gewinn.

b) Die Fixkosten werden um 80 € erhöht. Ist die Produktion noch sinnvoll? Begründen Sie.

8 Die Nachfragefunktion p_N ist mit $p_N(x) = 20 - 0{,}025x^2$ gegeben.
Bestimmen Sie den Höchstpreis und die Sättigungsmenge.

9 Die Gesamtkosten bei der Produktion von Fernsehgeräten werden beschrieben durch die Funktion K mit $K(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}5x + 37{,}5$; x in ME, K(x) in GE.
Der konstante Marktpreis beträgt 18 GE.

a) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion G. Auf welchem Bereich wird ein positiver Gewinn erzielt?

b) Berechnen Sie den maximalen Gewinn.