



**MEHR  
ERFAHREN**

**ABITUR-TRAINING**

FOS • BOS Nichttechnik

Analysis und Stochastik 1



**STARK**

# Inhalt

Vorwort

<b>Funktionen</b> .....	<b>1</b>
<b>1 Grundlegende Begriffe</b> .....	<b>2</b>
1.1 Funktionsbegriff .....	2
1.2 Schnittpunkte mit den Achsen .....	11
<b>2 Lineare Funktionen</b> .....	<b>14</b>
2.1 Geraden .....	14
2.2 Rechnen mit Geradengleichungen .....	20
2.3 Geradenscharen und Geradenbüschel .....	26
2.4 Anwendungen für lineare Funktionen .....	29
2.5 Lineare Ungleichungen .....	33
<b>3 Quadratische Funktionen</b> .....	<b>35</b>
3.1 Parabeln .....	35
3.2 Quadratische Gleichungen .....	38
3.3 Quadratische Ungleichungen .....	47
3.4 Quadratische Funktionen mit Parameter .....	50
3.5 Extremwertaufgaben .....	57
<b>4 Ganzrationale Funktionen</b> .....	<b>62</b>
4.1 Polynomdivision .....	62
4.2 Ganzrationale Funktionen 3. und 4. Grades .....	68
4.3 Mehrfache Nullstellen .....	71
4.4 Schnittpunkte zweier Graphen .....	75
4.5 Symmetrie .....	76
4.6 Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ .....	78
<b>Differenzialrechnung</b> .....	<b>81</b>
<b>5 Die Ableitung einer Funktion</b> .....	<b>82</b>
5.1 Sekante und Differenzenquotient .....	82
5.2 Tangente und Differenzialquotient .....	83
5.3 Differenzierbarkeit .....	86
5.4 Tangenten- und Normalengleichung .....	88
5.5 Die Ableitungsfunktion .....	90
5.6 Die Ableitung elementarer Funktionen .....	92
5.7 Ableitungsregeln .....	93
5.8 Höhere Ableitungen .....	98
5.9 Die Ableitung abschnittsweise definierter Funktionen .....	101

<b>6</b>	<b>Kurvendiskussion</b> .....	<b>102</b>
6.1	Monotonieverhalten .....	103
6.2	Krümmungsverhalten .....	109
6.3	Extremwerte .....	112
6.4	Wendepunkte und Wendetangenten, Sattelpunkte .....	121
6.5	Zusammenfassende Übersicht über Extrem- und Wendepunkte .....	124
	<b>Stochastik</b> .....	<b>131</b>
<b>7</b>	<b>Zufallsexperiment und Ereignis</b> .....	<b>132</b>
7.1	Zufallsexperimente und Ergebnisräume .....	132
7.2	Baumdiagramme .....	135
7.3	Ereignisse .....	137
7.4	Regeln für die Mengenverknüpfungen .....	140
<b>8</b>	<b>Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit</b> .....	<b>144</b>
8.1	Häufigkeit .....	144
8.2	Wahrscheinlichkeit .....	148
8.3	Laplace-Wahrscheinlichkeit .....	152
8.4	Pfadregeln .....	156
8.5	Bedingte Wahrscheinlichkeiten .....	161
8.6	Vierfeldertafeln .....	163
8.7	Abhängige und unabhängige Ereignisse .....	166
<b>9</b>	<b>Grundlagen der Kombinatorik</b> .....	<b>171</b>
9.1	Allgemeines Zählprinzip .....	171
9.2	Permutationen .....	173
9.3	Binomialkoeffizienten .....	174
	<b>Wichtige mathematische Definitionen und Schreibweisen</b> .....	<b>177</b>
	<b>Lösungen</b> .....	<b>181</b>

**Autor:** Reinhard Schubert

# Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieser Trainingsband ist für die 11. Jahrgangsstufe der Fachoberschule (FOS) in den nichttechnischen Ausbildungsrichtungen konzipiert. Auch Schülerinnen und Schüler der Berufsoberschule (BOS) können damit lernen. Für die Vorklassen und zum Wiederholen von Grundkenntnissen steht Ihnen der Trainingsband „Grundwissen Algebra“ (Stark Verlag, Best.-Nr. 92411) zur Verfügung.

Die modulare Struktur der Kapitel erlaubt es Ihnen, an vielen Stellen mit dem Lesen zu beginnen, ohne den Kontext zu verlieren. Daher können Sie sich sofort mit genau den Themenbereichen beschäftigen, die Ihnen noch Probleme bereiten. Die folgenden Punkte helfen dabei, das Lernen mit diesem Buch zu erleichtern:

- In den grün umrandeten bzw. getönten Kästen finden Sie – präzise und schülergerecht formuliert – die wichtigen **Definitionen, Regeln und Merksätze**, die Sie sicher beherrschen müssen.
- Anhand passgenauer, kommentierter **Beispiele** lässt sich die Theorie unmittelbar nachvollziehen, verstehen und wiederholen.
- Die **Übungsaufgaben** eines jeden Abschnitts sind im Schwierigkeitsgrad steigend angeordnet und beinhalten auch anwendungsorientierte Aufgaben.
- Wichtige **mathematische Definitionen und Schreibweisen** sind in einem separaten Teil übersichtlich zusammengestellt.
- Am Ende des Buches finden Sie zu jeder Aufgabe eine vollständig ausgearbeitete, kleinschrittige **Lösung** zur Selbstkontrolle.

Bleibt mir nur noch, Ihnen viel Erfolg bei der Arbeit mit diesem Trainingsband und in der Schule zu wünschen!

Ihr



Reinhard Schubert



- Aufgaben** 99. Bestimmen Sie jeweils die Ableitungsfunktionen der folgenden Funktionen:
- $f(x) = -1$
  - $f(x) = k - 2$ , wobei  $k$  eine Konstante ist
  - $p(x) = x^7$
  - $p(x) = x^{2a+1}$ , wobei  $a \in \mathbb{N}$
  - $g(t) = t^2$
  - $h(x) = a^2$
100. Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten an den Graphen der folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen.
- $f(x) = x^2$ ;  $x_0 = -\frac{1}{2}$
  - $g(x) = x^3$ ;  $x_0 = 2$
101. a) An welcher Stelle hat der Graph der Normalparabel  $f(x) = x^2$  eine Tangente mit der Steigung 1,5?  
 b) An welcher Stelle hat der Graph der Funktion  $f(x) = x^3$  die Steigung 1?

## 5.7 Ableitungsregeln

Es genügen zwei Ableitungsregeln und die Kenntnis der Ableitungen der elementaren Funktionen  $x \mapsto c$  und  $x \mapsto x^n$ , um sämtliche ganzrationalen Funktionen ableiten zu können, ohne auf den Differenzialquotienten zurückgreifen zu müssen.

Regel

### Die Summenregel

Sind die Funktionen  $f$  und  $g$  in einem gemeinsamen Definitionsbereich definiert und dort auch differenzierbar, dann ist auch die Summenfunktion  $f + g$  differenzierbar und es gilt:

$$(f + g)' = f' + g'$$

Beachten Sie: **Additive** Konstanten fallen beim Ableiten einfach weg.

Das bedeutet, man muss beim Ableiten einer Summe die Summanden einzeln ableiten und anschließend aufaddieren (das „+“ bleibt erhalten).

Beispiele

- Berechnen Sie die Ableitung der Funktion  $f(x) = x^2 + x$ .

*Lösung:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + x)' \\ &= (x^2)' + x' \\ &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Die Funktion  $f(x) = x^2 + x$  setzt sich aus den elementaren Funktionen  $x \mapsto x^2$  und  $x \mapsto x$  additiv zusammen. Da diese beiden Funktionen in  $\mathbb{R}$  differenzierbar sind, ist auch die Summenfunktion  $f$  in  $\mathbb{R}$  differenzierbar.

2. Es sei  $g(x) = x^3 - 2$ . Bestimmen Sie  $g'(x)$ .

*Lösung:*

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^3 + (-2))' \\ &= (x^3)' + (-2)' \\ &= 3x^2 + 0 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

Die Funktion  $g(x) = x^3 - 2$  setzt sich aus den elementaren Funktionen  $x \mapsto x^3$  und  $x \mapsto -2$  additiv zusammen:  $g(x) = x^3 - 2 = x^3 + (-2)$ . Die Ableitung der konstanten Funktion  $x \mapsto -2$  ist null.

Regel

### Die Faktorregel

Die Funktion  $f$  sei differenzierbar und  $k \in \mathbb{R}$  eine beliebige Konstante. Dann ist auch die Funktion  $k \cdot f$  differenzierbar und es gilt:

$$(k \cdot f)' = k \cdot f'$$

**Multiplikative** Konstanten bleiben beim Ableiten unverändert erhalten.

Zu beachten ist, dass die Faktorregel nur für konstante Faktoren gilt. Sie ist nicht mehr anwendbar, wenn der Faktor selbst eine Funktion von  $x$  ist.

Ist eine Funktion als Produkt von Funktionen dargestellt, muss vor dem Ableiten immer erst ausmultipliziert werden (außer es handelt sich um konstante Faktoren).

Beispiele

1. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von  $f(x) = 3x^2$ .

*Lösung:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2)' \\ &= 3(x^2)' \\ &= 3 \cdot 2x \\ &= 6x \end{aligned}$$

$f(x) = 3x^2$  setzt sich aus der Funktion  $x \mapsto x^2$  und der Konstanten 3 multiplikativ zusammen. Da die Funktion  $x \mapsto x^2$  in  $\mathbb{R}$  differenzierbar ist, ist es auch die Funktion  $f$ .

2. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von  $h(x) = x^2x^3$ .

*Lösung:*

$$h'(x) = (x^2x^3)' = (x^5)' = 5x^4$$

$h(x)$  darf nicht mit der Faktorregel abgeleitet werden, da  $x^2$  keine Konstante ist und selbst von  $x$  abhängt.  $h(x)$  darf auch nicht abgeleitet werden, indem man in Anlehnung an die Summenregel die beiden Faktoren einzeln ableitet und die Multiplikation dazwischen beibehält. In solchen Fällen muss grundsätzlich erst ausmultipliziert und dann abgeleitet werden.

**Achtung:**

$$\begin{aligned} (x^2x^3)' &\neq (x^2)' \cdot (x^3)' \\ &= 2x \cdot 3x^2 = 6x^3 \end{aligned}$$

Natürlich können Summen- und Faktorregel auch miteinander kombiniert angewandt werden. Daraus ergibt sich, dass alle ganzrationalen Funktionen in  $\mathbb{R}$  differenzierbar sind. Ihre Ableitungsfunktionen lassen sich mit den eingeführten Regeln bestimmen.

## Beispiele

1. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von  $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 9x - 1$ .

*Lösung:*

$$f'(x) = 12x^2 - x + 9$$

Die Koeffizienten bei der Ableitungsfunktion wurden sofort zu einer Zahl zusammengefasst.

2. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von  $h(x) = x(x-1)^2$ .

*Lösung:*

$$\begin{aligned} h(x) &= x(x-1)^2 = x(x^2 - 2x + 1) \\ &= x^3 - 2x^2 + x \end{aligned}$$

Achtung: Hier muss vor dem Ableiten ausmultipliziert werden.

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x^3 - 2x^2 + x)' \\ &= 3x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

Erst der ausmultiplizierte Funktionsterm wird abgeleitet.

3. An welchen Stellen hat der Graph von  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x + 6$  waagrechte Tangenten?

*Lösung:*

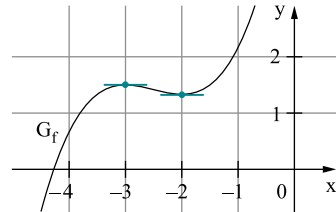
$$f'(x) = x^2 + 5x + 6$$

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \text{ mit Vieta:}$$

$$(x+3)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = -2$$

An den Stellen  $x_1 = -3$  und  $x_2 = -2$  hat der Graph von  $f$  waagrechte Tangenten.



4. An welchen Stellen hat der Graph der Funktion  $f(x) = x(x-1)^2$  Tangenten, die parallel zu der Geraden mit der Gleichung  $g: y = 2x - 0,5$  verlaufen?

*Lösung:*

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-1)^2 \\ &= x(x^2 - 2x + 1) \\ &= x^3 - 2x^2 + x \end{aligned}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

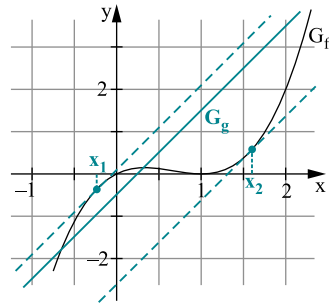
Da die Gerade  $g$  die Steigung  $m = 2$  besitzt, müssen zu  $g$  parallele Tangenten ebenfalls die Steigung 2 haben:

$$f'(x) = 2$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 2$$

$$3x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3} \approx \begin{cases} 1,55 \\ -0,22 \end{cases}$$







$$101. \text{ a) } \begin{aligned} (x^2)' &= 1,5 \\ 2x &= 1,5 \\ x &= 0,75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= 3x^2 \\ 3x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{3} \\ x_{1/2} &= \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \approx \pm 0,58 \end{aligned}$$

Die Steigung wird durch die Funktionswerte der Ableitungsfunktion angegeben. Es muss also gefragt werden, wo  $f'(x)$  den Wert 1,5 hat.

Ansatz

$$\begin{aligned} 102. \text{ a) } f'(x) &= 3x^2 + 1 \\ \text{b) } f'(x) &= 3x^2 + 2x + 1 \\ \text{c) } f'_t(x) &= 1 \\ \text{d) } f'(x) &= 3x^2 + 1 \\ \text{e) } f'_a(x) &= 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 103. \text{ a) } f'(x) &= -2 \\ \text{b) } f'(x) &= \frac{2}{3}x \\ \text{c) } f'(x) &= 4\sqrt{3}x^3 \\ \text{d) } f'(x) &= 2\frac{x}{4} = \frac{1}{2}x \\ \text{e) } f'_t(x) &= t \\ \text{f) } g'_a(x) &= 2a^3x \end{aligned}$$

$\sqrt{3}$  ist ein konstanter Faktor.

$a^3$  ist ein konstanter Faktor.

$$104. \text{ a) } f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{4}x^3 - 3 \cdot 5x^2 + 2 \cdot 9x - \sqrt{3} + 0 = x^3 - 15x^2 + 18x - \sqrt{3}$$

$$\text{b) } f'_k(x) = \frac{1}{2}(3x^2 + 2k^2x) \quad \frac{1}{2} \text{ ist ein konstanter Faktor.}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) &= x^2(x-2) = x^3 - 2x^2 \\ f'(x) &= 3x^2 - 4x \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Hier muss } f(x) \text{ zuerst ausmultipliziert werden,} \\ \text{erst dann kann abgeleitet werden!} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f(x) &= (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \\ f'(x) &= 2x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } f_t(x) &= \frac{3}{10}tx(x^2 - 2tx + t^2) \\ &= \frac{3}{10}t(x^3 - 2tx^2 + t^2x) \end{aligned}$$

Das  $x$  ist kein konstanter Faktor. Es muss deshalb erst in die Klammer hineinmultipliziert werden. Für  $t$  ist das nicht nötig, da  $t$  ein konstanter Faktor ist.

$$f'_t(x) = \frac{3t}{10}(3x^2 - 4tx + t^2)$$

- f)  $A_z(u) = zu^2 - zu + u - z^2$       Achtung: Hier ist  $u$  die Funktionsvariable und  $z$  eine Konstante. Es wird nach  $u$  abgeleitet.  
 $A'_z(u) = 2zu - z + 1$
- g)  $B_u(z) = zu^2 - zu + u - z^2$       Jetzt ist  $z$  die Variable und  $u$  eine Konstante.  
 $B'_u(z) = u^2 - u - 2z$

105. a)  $f(x) = 2x - x^3$   
 $f'(x) = 2 - 3x^2$   
 $x_0 = -1; f(-1) = -1; f'(-1) = -1$   
 $t: y = -1(x+1) - 1 = -x - 2$       Tangentengleichung

b)  $f(x) = \frac{1}{8}(x^4 - 2x^2)$   
 $f'(x) = \frac{1}{8}(4x^3 - 2 \cdot 2x) = \frac{1}{2}(x^3 - x)$   
 $x_0 = 1; f(1) = -\frac{1}{8}; f'(1) = 0$       waagrechte Tangente  
 $t: y = 0 \cdot (x-1) - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$       Tangentengleichung

c)  $f(x) = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$   
 $f'(x) = 2x - 1$   
 $x_0 = 2; f(2) = 0; f'(2) = 3$   
 $t: y = 3(x-2) + 0 = 3x - 6$

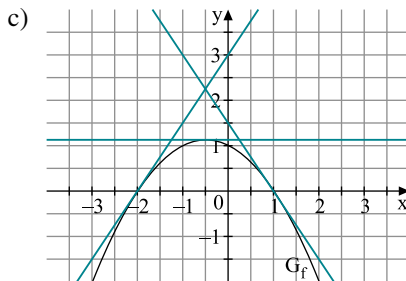
106.  $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-1) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1; f'(x) = -x - \frac{1}{2}$

a)  $f'(-2) = \frac{3}{2}; f'(-0,5) = 0; f'(1) = -\frac{3}{2}$

b)  $P_1(-2|?)$ :  $x_0 = -2; f(-2) = 0 \Rightarrow t_1: y = \frac{3}{2}(x+2) = \frac{3}{2}x + 3$

$P_2(-0,5|?)$ :  $x_0 = -0,5; f(-0,5) = \frac{9}{8} \Rightarrow t_2: y = \frac{9}{8}$

$P_3(1|?)$ :  $x_0 = 1; f(1) = 0 \Rightarrow t_3: y = -\frac{3}{2}(x-1) = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$





© **STARK Verlag**

[www.stark-verlag.de](http://www.stark-verlag.de)  
[info@stark-verlag.de](mailto:info@stark-verlag.de)

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

**STARK**