



**MEHR
ERFAHREN**

TRAINING

FOS • BOS Vorkurs • Vorklasse

Grundwissen Algebra

STARK

Inhalt

Vorwort

1	Aufbau des Zahlensystems	1
1.1	Zahlenmengen	1
1.2	Grundrechenarten	8
2	Potenzen und Wurzeln	17
2.1	Potenz und Potenzgesetze	17
2.2	Die Quadratwurzel	24
3	Terme	29
3.1	Der Begriff „Term“ und Termarten	29
3.2	Grund- und Definitionsmenge eines Terms	37
4	Rechnen mit Termen	41
4.1	Klammerterme	41
4.2	Binomische Formeln und Faktorzerlegung	46
4.3	Bruchterme	49
4.4	Potenzen und Wurzelterme	63
4.5	Polynomdivision	66
5	Gleichungen	71
5.1	Lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme	71
5.2	Quadratische und biquadratische Gleichungen	78
5.3	Bruchgleichungen	84
5.4	Betragsgleichungen*	87
6	Reelle Funktionen	89
6.1	Grundbegriffe und grundlegende Eigenschaften	89
6.2	Lineare Funktionen	95
6.3	Quadratische Funktionen	110
6.4	Schnitt von Parabeln und Geraden	131
6.5	Potenzfunktionen mit positiven Exponenten	139
6.6	Potenzfunktionen mit negativen Exponenten*	144

* Die Inhalte der so markierten Abschnitte sind erst in der Jahrgangsstufe 12 relevant und können beim ersten Durcharbeiten übersprungen werden.

7	Ungleichungen	147
7.1	Lineare Ungleichungen	147
7.2	Bruchungleichungen*	152
7.3	Quadratische Ungleichungen	158
	Lösungen	163

Autor: Dr. Volker Altrichter

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

in diesem Band wird in kompakter Form der Stoff der Algebra der Mittelstufe wiederholt und erklärt. Die folgenden Punkte helfen dabei, das Lernen mit diesem Buch zu erleichtern:

- In den farbig umrandeten bzw. getönten Kästen finden Sie – präzise und schülergerecht formuliert – die wichtigen **Definitionen**, **Regeln** und **Merksätze**, die Sie sicher beherrschen müssen.
- Anhand passgenauer, kommentierter **Beispiele** lässt sich die Theorie unmittelbar nachvollziehen, verstehen und wiederholen.
- Die **Übungsaufgaben** eines jeden Abschnitts sind im Schwierigkeitsgrad steigend angeordnet. Die mit einem * markierten Aufgaben entsprechen in Form und Schwierigkeitsgrad denjenigen der Feststellungs- bzw. Aufnahmeprüfung.
- Am Ende des Buches finden Sie zu jeder Aufgabe eine vollständig ausgearbeitete, ausführliche **Lösung** zur Selbstkontrolle.

Mit dem Band können also selbstständig grundlegende Stoffgebiete der Algebra reaktiviert, wiederholt und vertieft werden. Das Buch vermittelt die Algebra-Kenntnisse, die in der Fachoberschule, in der Berufsoberschule und in der gymnasialen Oberstufe vorausgesetzt werden. Es trägt zu einem erfolgreichen Bestehen der Probezeit an der Fachoberschule oder Berufsoberschule bei. Die Auswahl der Themen orientiert sich an den aktuellen Lehrplänen der Vorstufe und Vorklasse zur Berufsoberschule und Fachoberschule. Die im Inhaltsverzeichnis mit einem * markierten Abschnitte (5.4, 6.6 und 7.2) werden erst in der Jahrgangsstufe 12 für Sie relevant und sind daher genau wie alle anderen in diesem Band vermittelten Kenntnisse und Fertigkeiten für einen erfolgreichen Besuch der Oberstufe sehr hilfreich.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg bei der Arbeit mit diesem Trainingsband, in der Schule und bei Ihren Prüfungen!

Ihr



Dr. Volker Altrichter

29. Faktorisieren Sie, indem Sie gemeinsame Faktoren suchen, diese vor die neu gebildete Klammer schreiben und die Restglieder in die Klammer schreiben.

a) $4xy + 2x - 6xy$

b) $\frac{2}{3}a + \frac{5}{3}b - \frac{1}{3}c$

c) $42abc^2 - 30ab^2c - 28a^2bc$

d) $a^3 - 2a^2 + 4a$

e) $-a - b$

f) $a \cdot (5x - 2y) - b \cdot (5x - 2y)$

g) $x \cdot (3a - b) + y \cdot (-3a + b) + 3az - bz$

h) $3at - 5bt + 3as - 5bs$

i) $3bx - 7ax + 6b^2 - 14ab - 12ab + 28a^2$

j) $sx^2y - tx^2y + 3ps - 3pt - 4as + 4at$

4.2 Binomische Formeln und Faktorzerlegung

Ein Summenterm, der aus zwei Gliedern besteht, heißt **Binom**. Drei Arten von Produkten von Binomen kommen sehr häufig vor.

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Da solche Terme sehr oft auftreten, sollte man die Ergebnisse auswendig wissen. Dies ist insbesondere dann unbedingt notwendig, wenn man einen Summenterm (rechte Seite) gegeben hat, den man in ein Produkt (linke Seite) umformen soll.

Regel

Für alle reellen Zahlen a und b gelten die drei **binomischen Formeln**:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Auf zwei Arten kann man einen Summenterm in einen Produktterm umwandeln:

- durch **Ausklammern gemeinsamer Faktoren** (in einem oder mehreren Schritten; siehe Kapitel 4.1) oder
- durch **Anwenden der drei binomischen Formeln**.

Diese Methoden können auch nacheinander angewendet werden.

Beispiel

Wandeln Sie jeweils den Produktterm in eine Summe um oder umgekehrt, indem sie obige Formeln von links nach rechts oder von rechts nach links verwenden oder zuerst ausklammern.

- | | |
|--------------------------|--|
| a) $(3+s)^2$ | b) $(5x+7y)^2$ |
| c) $25+30t+9t^2$ | d) $(5x-7y)^2$ |
| e) $121a^2+256b^2-352ab$ | f) $(5s+3t) \cdot (5s-3t)$ |
| g) $36x^2-49y^2$ | h) $8xz-10x^2-12yz+15xy$ |
| i) $48s^2x-72stx+27t^2x$ | j) $3ac^2+6acd+3ad^2-2bc^2-4bcd-2bd^2$ |

Lösung:

$$a) (3+s)^2 = 9+6s+s^2$$

$$((\text{3})+(\text{s}))^2 = \text{3}^2 + 2 \cdot \text{3} \cdot \text{s} + \text{s}^2$$

$$b) (5x+7y)^2 = 25x^2+70xy+49y^2$$

$$((\text{5x})+(\text{7y}))^2 = \text{5x}^2 + 2 \cdot \text{5x} \cdot \text{7y} + \text{7y}^2$$

$$c) 25+30t+9t^2 = (5)^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3t + (3t)^2 = (5+3t)^2$$

Man sucht erst die Quadrate ($25, 9t^2$), ermittelt daraus die Grundzahlen 5 und $3t$ und überprüft dann, ob das verbleibende Glied das doppelte Produkt **2ab** der beiden Grundzahlen ist: $2 \cdot 5 \cdot 3t = 30t$. Der letzte Schritt darf nicht übergangen werden!

$$d) (5x-7y)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 7y + (7y)^2 = 25x^2 - 70xy + 49y^2$$

$$e) 121a^2+256b^2-352ab = (11a)^2 + (16b)^2 - 2 \cdot 11a \cdot 16b = (11a-16b)^2 = (16b-11a)^2$$

$$f) (5s+3t) \cdot (5s-3t) = (5s)^2 - (3t)^2 = 25s^2 - 9t^2$$

$$g) 36x^2-49y^2 = (6x)^2 - (7y)^2 = (6x+7y) \cdot (6x-7y)$$

$$h) 8xz-10x^2-12yz+15xy = 2x \cdot (4z-5x) - 3y \cdot (4z-5x) = (4z-5x) \cdot (2x-3y)$$

Teilt man den Term in zwei Gruppen, aus denen jeweils ein gemeinsamer Faktor ausgeklammert wird, so muss jede Gruppe gleich viele Glieder haben. Hier sind es zwei Glieder.

$$i) 48s^2x-72stx+27t^2x = 3x \cdot (16s^2-24st+9t^2) = 3x \cdot (4s-3t)^2$$

Bei drei Gliedern ist dies nicht möglich. Erst wird der gemeinsame Faktor ausgeklammert, sodass zwei Faktoren entstehen, danach wird eine binomische Formel angewendet.

$$j) 3ac^2+6acd+3ad^2-2bc^2-4bcd-2bd^2 = 3a \cdot (c^2+2cd+d^2) - 2b \cdot (c^2+2cd+d^2) = (c^2+2cd+d^2) \cdot (3a-2b) = (c+d)^2 \cdot (3a-2b)$$

Jede Gruppe hat drei Glieder.

Das Faktorisieren kann also durchaus sehr aufwendig sein, insbesondere wenn mehrere einzelne Schritte dazu nötig sind. Auch mit Fehlversuchen muss man dabei rechnen.

Aufgaben 30. Wandeln Sie, falls möglich, jeweils den Produktterm in eine Summe um oder umgekehrt.

- | | |
|---|--|
| a) $(s+t)^2$ | b) $(12s+4t)^2$ |
| c) $(5x+6y)^2$ | d) $(9a+6b)^2$ |
| e) $4s^2+12st+9t^2$ | f) $9x^2+4y^2+12xy$ |
| g) t^2+2t+1 | h) $400n^2+9m^2+120mn$ |
| i) $(1,2x+5y)^2$ | j) $(s-t)^2$ |
| k) $(8n-0,5m)^2$ | l) $k^2-24k\ell+144\ell^2$ |
| m) $16s^2+25t^2-40st$ | n) $x^2-x+0,25$ |
| o) x^2-2x+1 | p) $25d^2+36c^2-60cd$ |
| q) $9x^2+64y^2-24xy$ | r) $x^4+100-20x^2$ |
| s) $4x^2+0,25y^2-xy$ | t) $(2s+5t) \cdot (2s-5t)$ |
| u) $(x+12s) \cdot (x-12s)$ | v) $(16x-11y) \cdot (16x+12y)$ |
| w) $9y^2-25$ | x) $169-144x^2$ |
| y) $196a^2-225b^2$ | z) $256p^2-16pq+0,25q^2$ |
| α) $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{16}y^2$ | β) $36a^2-4ab+\frac{1}{9}b^2$ |
| γ) $\frac{1}{100}+2x+100x^2$ | δ) $\left(\frac{1}{12}x^2-6x\right)^2$ |
| ϵ) x^4-y^4 | ζ) $4x^4-25x^2$ |
| η) $\frac{1}{25}a^2-2\frac{1}{4}b^2$ | |

31. Wandeln Sie jeweils den Produktterm in eine Summe um oder umgekehrt, indem sie die binomischen Formeln von links nach rechts oder von rechts nach links verwenden oder zuerst ausklammern.

- $3as+5at-6bs-10bt$
- $15a^2+30ab+15b^2$
- $8g^2-8h^2$
- $18x+12ux+2u^2x-27y-18uy-3u^2y$
- $18s^3-60s^2t+50st^2$
- $6a^2xz+12a^2vx+6a^2yz+12a^2vy$
- $5a^2-5b^2+4a^2+8ab+4b^2$
- $4x^2-2xy+12x^2+3y^2-12xy$
- $4x^5-24x^4+36x^3$
- $3x^3-48x$

$$b) \frac{2}{3}a + \frac{5}{3}b - \frac{1}{3}c = \frac{1}{3} \cdot (2a + 5b - c)$$

$$c) \quad 42abc^2 - 30ab^2c - 28a^2bc \\ = 2abc \cdot (21c - 15b - 14a)$$

Das Produkt abc steckt in jedem Variablenanteil.

$$d) \quad a^3 - 2a^2 + 4a = a \cdot (a^2 - 2a + 4)$$

Aus jedem Summanden kann ein a ausgeklammert werden, die Exponenten verringern sich alle um 1.

$$e) \quad -a - b = -1 \cdot (a + b)$$

Das Minuszeichen ist der Faktor -1 .

$$f) \quad a \cdot (5x - 2y) - b \cdot (5x - 2y) = (5x - 2y) \cdot (a - b)$$

$$g) \quad x \cdot (3a - b) + y \cdot (-3a + b) + 3az - bz = x \cdot (3a - b) - y \cdot (3a - b) + z \cdot (3a - b) \\ = (3a - b) \cdot (x - y + z)$$

$$h) \quad 3at - 5bt + 3as - 5bs = t \cdot (3a - 5b) + s \cdot (3a - 5b) = (3a - 5b) \cdot (t + s)$$

$$i) \quad 3bx - 7ax + 6b^2 - 14ab - 12ab + 28a^2 \\ = x \cdot (3b - 7a) + 2b \cdot (3b - 7a) - 4a \cdot (3b - 7a) \\ = (3b - 7a) \cdot (x + 2b - 4a)$$

$$j) \quad sx^2y - tx^2y + 3ps - 3pt - 4as + 4at = x^2y \cdot (s - t) + 3p \cdot (s - t) - 4a \cdot (s - t) \\ = (s - t) \cdot (x^2y + 3p - 4a)$$

$$30. a) \quad (s + t)^2 = s^2 + 2st + t^2$$

$$b) \quad (12s + 4t)^2 = (12s)^2 + 2 \cdot 12s \cdot 4t + (4t)^2 = 144s^2 + 96st + 16t^2$$

$$c) \quad (5x + 6y)^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 6y + (6y)^2 = 25x^2 + 60xy + 36y^2$$

$$d) \quad (9a + 6b)^2 = (9a)^2 + 2 \cdot 9a \cdot 6b + (6b)^2 = 81a^2 + 108ab + 36b^2$$

$$e) \quad 4s^2 + 12st + 9t^2 = (2s)^2 + 2 \cdot 2s \cdot 3t + (3t)^2 = (2s + 3t)^2$$

$$f) \quad 9x^2 + 4y^2 + 12xy = (3x)^2 + (2y)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y = (3x + 2y)^2$$

$$g) \quad t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$$

$$h) \quad 400n^2 + 9m^2 + 120mn = (20n)^2 + (3m)^2 + 2 \cdot 20n \cdot 3m = (20n + 3m)^2$$

$$i) \quad (1,2x + 5y)^2 = (1,2x)^2 + 2 \cdot 1,2x \cdot 5y + (5y)^2 = 1,44x^2 + 12xy + 25y^2$$

$$j) (s-t)^2 = s^2 - 2st + t^2$$

$$k) (8n - 0,5m)^2 = (8n)^2 - 2 \cdot 8n \cdot 0,5m + (0,5m)^2 = 64n^2 - 8mn + 0,25m^2$$

$$l) k^2 - 24k\ell + 144\ell^2 = k^2 - 2 \cdot k \cdot 12\ell + (12\ell)^2 = (k - 12\ell)^2$$

$$m) 16s^2 + 25t^2 - 40st = (4s)^2 + (5t)^2 - 2 \cdot 4s \cdot 5t = (4s - 5t)^2$$

$$n) x^2 - x + 0,25 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 0,5 + 0,5^2 = (x - 0,5)^2$$

$$o) x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$p) 25d^2 + 36c^2 - 60cd = (5d)^2 + (6c)^2 - 2 \cdot 5d \cdot 6c = (5d - 6c)^2$$

$$q) 9x^2 + 64y^2 - 24xy = (3x)^2 + (8y)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 8y; \text{ keine binomische Formel}$$

$$r) x^4 + 100 - 20x^2 = (x^2)^2 + 10^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 10 = (x^2 - 10)^2$$

$$s) 4x^2 + 0,25y^2 - xy = (2x)^2 + (0,5y)^2 - 2x \cdot 0,5y; \text{ keine binomische Formel}$$

$$t) (2s + 5t) \cdot (2s - 5t) = (2s)^2 - (5t)^2 = 4s^2 - 25t^2$$

$$u) (x + 12s) \cdot (x - 12s) = x^2 - (12s)^2 = x^2 - 144s^2$$

$$v) (16x - 11y) \cdot (16x + 12y) = 256x^2 + 192xy - 176xy - 132y^2 \\ = 256x^2 + 16xy - 132y^2$$

$$w) 9y^2 - 25 = (3y)^2 - 5^2 = (3y + 5) \cdot (3y - 5)$$

$$x) 169 - 144x^2 = 13^2 - (12x)^2 = (13 + 12x) \cdot (13 - 12x)$$

$$y) 196a^2 - 225b^2 = (14a)^2 - (15b)^2 = (14a + 15b) \cdot (14a - 15b)$$

$$z) 256p^2 - 16pq + 0,25q^2 = (16p)^2 - 2 \cdot 16p \cdot 0,5q + (0,5q)^2 = (16p - 0,5q)^2$$

$$\alpha) \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2 = \left(\frac{1}{3}x\right)^2 - \left(\frac{1}{4}y\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y\right) \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y\right)$$

$$\beta) 36a^2 - 4ab + \frac{1}{9}b^2 = (6a)^2 - 2 \cdot 6a \cdot \frac{1}{3}b + \left(\frac{1}{3}b\right)^2 = \left(6a - \frac{1}{3}b\right)^2$$

$$\gamma) \frac{1}{100} + 2x + 100x^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot 10x + (10x)^2 = \left(\frac{1}{10} + 10x\right)^2$$

$$\delta) \left(\frac{1}{12}x^2 - 6x\right)^2 = \frac{1}{144}x^4 - 2 \cdot \frac{1}{12}x^2 \cdot 6x + 36x^2 = \frac{1}{144}x^4 - x^3 + 36x^2$$

$$\epsilon) x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 + y^2) \cdot (x^2 - y^2)$$

$$\begin{aligned}\zeta) \quad 4x^4 - 25x^2 &= (2x^2)^2 - (5x)^2 = (2x^2 + 5x) \cdot (2x^2 - 5x) \\ &= \mathbf{x} \cdot (2x + 5) \cdot \mathbf{x} \cdot (2x - 5) = \mathbf{x^2} \cdot (2x + 5) \cdot (2x - 5)\end{aligned}$$

$$\eta) \quad \frac{1}{25}a^2 - 2\frac{1}{4}b^2 = \left(\frac{1}{5}a\right)^2 - \left(\frac{3}{2}b\right)^2 = \left(\frac{1}{5}a + \frac{3}{2}b\right) \cdot \left(\frac{1}{5}a - \frac{3}{2}b\right)$$

$$31. \text{ a) } 3as + 5at - 6bs - 10bt = \mathbf{a} \cdot (3s + 5t) - \mathbf{2b} \cdot (3s + 5t) = (3s + 5t) \cdot (a - 2b)$$

$$\text{b) } 15a^2 + 30ab + 15b^2 = 15 \cdot (a^2 + 2ab + b^2) = 15(a + b)^2$$

$$\text{c) } 8g^2 - 8h^2 = 8 \cdot (g^2 - h^2) = 8(g + h) \cdot (g - h)$$

$$\begin{aligned}\text{d) } \quad 18x + 12ux + 2u^2x - 27y - 18uy - 3u^2y \\ = \mathbf{2x} \cdot (9 + 6u + u^2) - \mathbf{3y} \cdot (9 + 6u + u^2) = (3 + u)^2 \cdot (2x - 3y)\end{aligned}$$

$$\text{e) } 18s^3 - 60s^2t + 50st^2 = 2s \cdot (9s^2 - 30st + 25t^2) = 2s \cdot (3s - 5t)^2$$

$$\begin{aligned}\text{f) } \quad 6a^2xz + 12a^2vx + 6a^2yz + 12a^2vy &= \mathbf{6a^2x} \cdot (z + 2v) + \mathbf{6a^2y} \cdot (z + 2v) \\ &= (z + 2v) \cdot (6a^2x + 6a^2y) \\ &= (z + 2v) \cdot 6a^2 \cdot (x + y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{g) } \quad 5a^2 - 5b^2 + 4a^2 + 8ab + 4b^2 &= 5 \cdot (a^2 - b^2) + 4 \cdot (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 5 \cdot \mathbf{(a + b)} \cdot (a - b) + 4 \cdot \mathbf{(a + b)}^2 \\ &= \mathbf{(a + b)} \cdot (5 \cdot (a - b) + 4 \cdot (a + b)) \\ &= (a + b) \cdot (5a - 5b + 4a + 4b) = (a + b) \cdot (9a - b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{h) } \quad 4x^2 - 2xy + 12x^2 + 3y^2 - 12xy &= 2x \cdot (2x - y) + 3 \cdot (4x^2 + y^2 - 4xy) \\ &= 2x \cdot \mathbf{(2x - y)} + 3 \cdot \mathbf{(2x - y)}^2 \\ &= \mathbf{(2x - y)} \cdot (2x + 3 \cdot (2x - y)) \\ &= (2x - y) \cdot (2x + 6x - 3y) \\ &= (2x - y) \cdot (8x - 3y)\end{aligned}$$

$$\text{i) } 4x^5 - 24x^4 + 36x^3 = x^3 \cdot (4x^2 - 24x + 36) = x^3 \cdot (2x - 6)^2$$

$$\text{j) } 3x^3 - 48x = 3x \cdot (x^2 - 16) = 3x \cdot (x + 4) \cdot (x - 4)$$

$$32. \text{ a) } (a + \boxed{2b})^2 = a^2 + 4ab + \boxed{4b^2}$$

$$\text{b) } (\boxed{3} + b)^2 = \boxed{9} + 6b + b^2$$

$$\text{c) } (3a + \boxed{2b})^2 = \boxed{9a^2} + 12ab + \boxed{4b^2}$$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK