Abit

MEHR ERFAHREN

Mathemati

FOS · BOS 12 Nicht

Fachabitur Bayern a

Das musst du können!

passend zum LehrplanPLUS

STARK

Inhalt

Analysis

1 Ganzrationale Funktionen 1
1.1 Quadratische Gleichungen 1
1.2 Quadratische Funktionen 1
1.3 Quadratische Ungleichungen 3
1.4 Quadratische Funktionen mit Parameter 5
1.5 Ganzrationale Funktionen 3. und 4. Grades 7

2 Differenzieren reeller Funktionen 13
2.1 Die Ableitung einer Funktion 13
2.2 Ableitungsregeln 14
2.3 Tangentengleichung 15

3 Elemente der Kurvendiskussion 16
3.1 Maximale Monotonieintervalle 16
3.2 Punkte mit waagrechter Tangente 17
3.3 Extrempunkte 20
3.4 Maximale Krümmungsintervalle 22
3.5 Wendepunkte 24
3.6 Aufstellen von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben") 27
3.7 Optimierungsprobleme und Anwendungsaufgaben (Extremwertaufgaben) 29

4 Exponentialfunktionen und Logarithmen 32
4.1 Exponentialgleichungen 32
4.2 Exponentialfunktionen 33
4.3 Kurvendiskussion mit Exponentialfunktionen 35
4.4 Exponentielle Zunahme und Abnahme 38

5 Integralrechnung 40
5.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral 40
5.2 Bestimmtes Integral und Flächenberechnung 42

Stochastik

1 Zufallsexperimente **46**
1.1 Ergebnisse und Ergebnisraum 46
1.2 Ereignisse 47
1.3 Verknüpfungen von zwei Ereignissen 48

2 Wahrscheinlichkeit **50**
2.1 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff 50
2.2 Laplace-Experiment 51
2.3 Baumdiagramm und Pfadregeln 51
2.4 Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten 54
2.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit 56
2.6 Stochastische Unabhängigkeit 58

3 Kombinatorik **59**
3.1 Allgemeines Zählprinzip 59
3.2 Binomialkoeffizient 60

4 Bernoulli-Ketten **62**

5 Zufallsgrößen **65**
5.1 Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung 65
5.2 Maßzahlen einer Zufallsgröße 67
5.3 Binomialverteilte Zufallsgrößen 69

6 Testen von Hypothesen **73**

Stichwortverzeichnis **79**

Autor: Friedrich Schmidt

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Fachabitur in den nichttechnischen Ausbildungsrichtungen benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Fachabiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis und Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Vorbereitung auf das Fachabitur. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Fachabitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- An relevanten Stellen wird auf die **Merkhilfe**, die Ihnen als Erinnerungsstütze im Fachabitur dient, verwiesen.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den jeweiligen Lerninhalt.
- Charakteristische und prägnante **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch das Symbol gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** schrittweise beschrieben.
- Die getrennten **Stichwortverzeichnisse** zur Analysis bzw. Stochastik führen schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Fachabiturprüfung!

Friedrich Schmidt

Friedrich Schmidt

Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre mit vollständigen Lösungen enthält das Buch „Abiturprüfung FOS/BOS Bayern, Mathematik Nichttechnik 12. Klasse“ (Bestell-Nr. 92510).

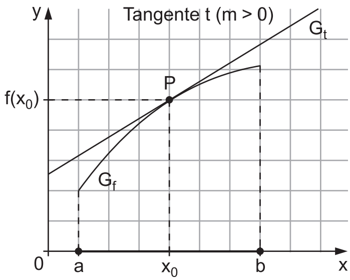
3 Elemente der Kurvendiskussion

3.1 Maximale Monotonieintervalle

Die Monotonie beschreibt das Steigungsverhalten eines Funktionsgraphen. Es treten zwei mögliche Fälle auf:

Die Funktion f ist in einem Intervall [a; b]

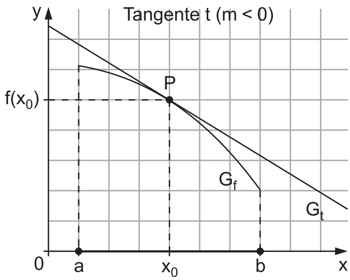
streng monoton zunehmend.



G_f steigt streng monoton in [a; b].

In jedem beliebigen Kurvenpunkt $P(x_0; f(x_0))$ mit $x_0 \in \,]a; b[$ besitzt die Tangente an den Graphen von f eine positive Steigung ($m > 0$).

streng monoton abnehmend.



G_f fällt streng monoton in [a; b].

In jedem beliebigen Kurvenpunkt $P(x_0; f(x_0))$ mit $x_0 \in \,]a; b[$ besitzt die Tangente an den Graphen von f eine negative Steigung ($m < 0$).

Das Monotonieverhalten einer Funktion wird beschrieben durch die Zerlegung der Definitionsmenge in die größtmöglichen Intervalle, in denen der Graph der Funktion steigt oder fällt. Diese Intervalle sind die maximalen Monotonieintervalle der Funktion.

Monotoniekriterium (vgl. Merkhilfe)

$f'(x) > 0$ für alle x aus dem Intervall I

$\Rightarrow$ Die Funktion f ist streng monoton zunehmend in I.
Der Graph der Funktion f steigt streng monoton in I.

$f'(x) < 0$ für alle x aus dem Intervall I

$\Rightarrow$ Die Funktion f ist streng monoton abnehmend in I.
Der Graph der Funktion f fällt streng monoton in I.

Bestimmung der maximalen Monotonieintervalle

Vorgehensweise
Schritt 1: Berechnen der 1. Ableitung von f.

Schritt 2: Ermitteln der Bereiche, in denen die Funktion streng monoton zunehmend bzw. streng monoton abnehmend ist, d. h. Lösen der Ungleichung $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$.

Schritt 3: Die Randstellen, die in der Definitionsmenge liegen, in die Monotonieintervalle einschließen. (Gültig für alle lehrplanrelevanten Funktionen.)

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 1;\ D_f = \mathbb{R}$

Schritt 1:
$f'(x) = \frac{1}{2}x - 1$

Schritt 2:
$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > 2$

$f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$

Schritt 3:
f ist streng monoton zunehmend im Intervall $[2; \infty[$.
f ist streng monoton abnehmend im Intervall $]-\infty; 2]$.

3.2 Punkte mit waagrechter Tangente

Der Punkt $P(x_0; f(x_0))$ ist genau dann ein Punkt des Graphen von f mit waagrechter Tangente, wenn $f'(x_0) = 0$ gilt. x_0 heißt **Waagrechtstelle** der Funktion f.

Es gibt drei Arten von Punkten eines Graphen mit waagrechter Tangente. Sie unterscheiden sich darin, ob die Funktion an der zugehörigen Waagrechtstelle ihr Monotonieverhalten ändert oder nicht und, wenn ja, in welche Richtung sie das Monotonieverhalten ändert.

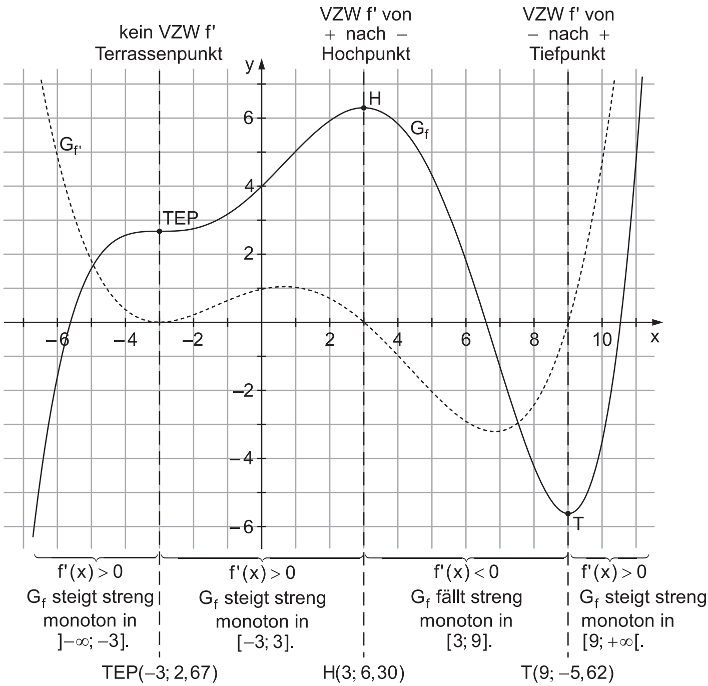
Art von Punkten mit waagrechter Tangente
Ist x_0 eine Waagrechtstelle von f, so gilt:

f' hat an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von + nach –
$\Rightarrow$ x_0 ist **Maximalstelle**. Der Graph G_f hat den relativen **Hochpunkt** $H(x_0; f(x_0))$. Die Funktion f hat das relative Maximum $f(x_0)$.

f' hat an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von – nach +
$\Rightarrow$ x_0 ist **Minimalstelle**. Der Graph G_f hat den relativen **Tiefpunkt** $T(x_0; f(x_0))$. Die Funktion f hat das relative Minimum $f(x_0)$.

f' hat an der Stelle x_0 keinen Vorzeichenwechsel
$\Rightarrow$ x_0 ist **Terrassenstelle**. Der Graph G_f hat den **Terrassenpunkt** $TEP(x_0; f(x_0))$.

Merkregel: Wenn x_0 eine Nullstelle von f' mit gerader Vielfachheit ist, dann ist x_0 eine Terrassenstelle von f.



Ermittlung von Art und Koordinaten der Punkte mit waagrechter Tangente

Vorgehensweise (Monotonieuntersuchung)
Schritt 1: Berechnen der 1. Ableitung von f.

Schritt 2: Ermitteln der Nullstellen der 1. Ableitung, d. h. Lösen der Gleichung $f'(x)=0$.

Schritt 3: Überprüfen, ob an den ermittelten Nullstellen jeweils ein Vorzeichenwechsel von f' vorliegt. Falls ja, mithilfe einer Skizze des Graphen von f' die Art des Vorzeichenwechsels bestimmen.
VZW von + nach – : Maximalstelle
VZW von – nach + : Minimalstelle
kein VZW: Terrassenstelle

Schritt 4: Berechnen der Funktionswerte von f an den ermittelten Nullstellen von f'; Angeben der Art und Koordinaten der Punkte mit waagrechter Tangente.

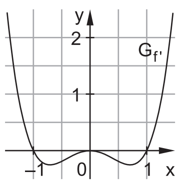
$f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3;\ D_f=\mathbb{R}$

Schritt 1:
$f'(x)=x^4-x^2$

Schritt 2:
$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^4-x^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2\cdot(x^2-1)=0$
Mit dem Satz vom Nullprodukt (Nullproduktregel) folgt:
$x^2\cdot(x^2-1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2=0 \ \vee\ x^2-1=0$
$\Rightarrow x_{1,2}=0;\ x_3=1;\ x_4=-1$

Schritt 3:
Da $x_{1,2}=0$ eine doppelte Nullstelle von f' ist, liegt kein VZW vor. Somit ist $x_{1,2}=0$ eine Terrassenstelle von f.

Da $x_3=1$ und $x_4=-1$ einfache Nullstellen von f' sind, liegt jeweils ein VZW vor.



$x_3=1$: f' hat einen VZW von – nach +
Minimalstelle von f

$x_4=-1$: f' hat einen VZW von + nach –
Maximalstelle von f