

Die richtigen Lösungsschritte

Ersatzmodelle und Ersatzsysteme

Ein Beispiel für den Einstieg

Kapitel 1

Problemstellung und Ersatzmodelle

Die Statik spielt im wahrsten Sinne des Wortes eine tragende Rolle im Bereich des Bauingenieurwesens, des Maschinenbaus, der Medizintechnik sowie in der Mechatronik und auch in der Elektrotechnik. Denn dort müssen alle Bauteile und natürlich auch die gesamte Konstruktion so ausgelegt werden, dass sie Belastungen standhalten, die zum Teil bekannt sind oder im Rahmen von »Worst-Case-Szenarios« abgeschätzt werden müssen. Die Statik liefert dann nicht nur Informationen über die Beanspruchung der Lager, mit denen die Bauteile untereinander oder mit der Umgebung verbunden sind, sondern auch die Kräfte und Momente, die im Inneren eines Bauteils auftreten.

Lösungsschritte

Um die Grundgesetze und die Methoden der Technischen Mechanik zur Lösung von Problemen anwenden zu können, sind folgende Schritte zu durchlaufen:

1. Formulieren der technischen Aufgabe,
2. Auswahl eines mechanischen Ersatzmodells,
3. mathematische Beschreibung,
4. analytische oder numerische Lösung und
5. Interpretation und Überprüfung der Ergebnisse.

In der Praxis müssen die Schritte 2 bis 5 oft mehrfach mit entsprechenden Erweiterungen oder weiteren Vereinfachungen durchlaufen werden.

Ersatzmodelle und Ersatzsysteme

Durch die Beschränkung auf das Wesentliche und durch eine geeignete Systemabgrenzung kann ein reales System über Vereinfachungen und Idealisierungen in ein mathematisch beschreibbares Ersatzmodell oder Ersatzsystem abgebildet werden.

Die Technische Mechanik kann, basierend auf den physikalischen Eigenschaften der Ersatzmodelle, in verschiedene Gebiete unterteilt werden, Abbildung 1.1.

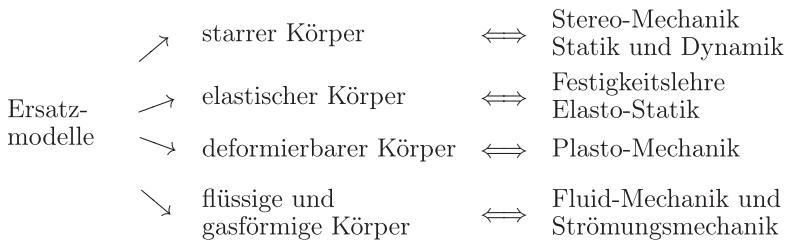


Abbildung 1.1: Verschiedene Ersatzmodelle, die in der Mechanik verwendet werden

Die Kontinuums-Mechanik fasst die Modellvorstellung deformierbarer, flüssiger und gasförmiger Körper zusammen.

In der Statik und der Dynamik arbeitet man in der Regel mit der Modellvorstellung des starren Körpers. In der Ebene hat ein starrer Körper drei freie Bewegungsmöglichkeiten (zwei translatorische und eine rotatorische Bewegung). Im Raum sind es sogar sechs (drei translatorische und drei rotatorische Bewegungen).

Die Festigkeitslehre lässt mit der Modellvorstellung eines elastischen Körpers Bauteildeformationen zu, setzt aber in der Regel voraus, dass diese im Vergleich zu den geometrischen Abmessungen vernachlässigbar klein bleiben. Die Bewegungen und die auf den Körper einwirkenden Kräfte und Momente können dann in der Regel weiterhin mit dem Modell des starren Körpers ermittelt werden.

Ein einführendes Beispiel

Mit diesem Beispiel tauchen wir bereits voll in die Welt der Statik ein. Dazu müssen jedoch mit der Kraftdarstellung sowie der Kraftzerlegung und dem Schnittprinzip jetzt schon Begriffe und Methoden angewendet werden, die im Detail erst in den Kapiteln 3 und 4 vermittelt werden.

Problemstellung und Ersatzmodell

In einigen Ländern hängen Verkehrsampeln direkt über der Mitte von Kreuzungen. Wie aus Abbildung 1.2 zu erkennen, werden dazu zwei Masten und ein Drahtseil benötigt. Die Verkehrsampel soll in diesem Beispiel genau in der Mitte zwischen zwei gleich hohen Masten

hängen. Dies wird in einigen Fällen nicht exakt erfüllt sein und stellt somit bereits eine erste Idealisierung dar. Die Straßenbreite $2b$ (zwei Fahrspuren der Breite b), die maximale Durchfahrthöhe d und die Höhe der Verkehrsampel a liegen fest.

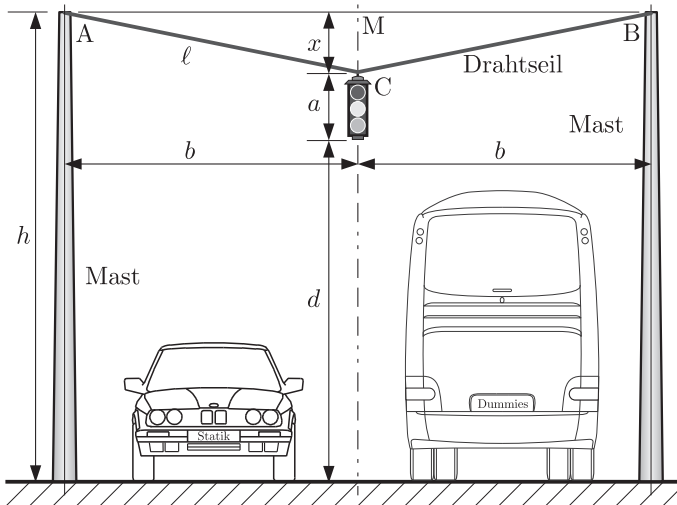


Abbildung 1.2: Frei hängende Verkehrsampel

Für eine erste statische Analyse wird das Modell der starren Körper verwendet. Im vorliegenden Fall bedeutet dies, dass eine mögliche Biegung der Masten unberücksichtigt bleibt. Passend dazu wird auch eine belastungsbedingte Längenänderungen des Drahtseils nicht betrachtet. Dann sind mit

$$h = d + a + x \quad (1.1)$$

$$\ell^2 = b^2 + x^2 \quad \text{bzw.} \quad \ell = \sqrt{b^2 + x^2} \quad \text{oder} \quad \ell = b \sqrt{1 + \left(\frac{x}{b}\right)^2} \quad (1.2)$$

die Höhe der Masten h und die halbe Länge des Drahtseils ℓ nur noch von dem Parameter x abhängig, der den Durchhang des Drahtseils angibt. Bei der Berechnung von ℓ wurde der Satz von Pythagoras angewendet. Die nach Voraussetzung gleich großen Dreiecke A-C-M und C-B-M sind rechtwinklig und haben jeweils ℓ als Hypotenuse und b und x als Katheten.

Der erste Gedanke, mit $x = 0$ die Höhe der Masten und die Länge des Drahtseils auf ein Minimum zu reduzieren, ist aber nicht praktikabel. Bei $x = 0$ stimmt gemäß (1.2) die halbe Länge des Drahtseils ℓ mit dem halben Mastabstand b überein. Wenn nun bei der Fertigung das Drahtseil nur geringfügig zu kurz abgeschnitten wird, kann es nicht mehr, bzw. nicht mehr ohne Gewalt, zwischen den Pfosten montiert werden.

Deshalb wollen wir nun eine typische statische Analyse durchführen.

Mathematische Beschreibung

Die Verkehrsampel selbst wird im Ersatzmodell nur noch durch einen Pfeil symbolisiert, der im Knoten C angreift und nicht nur die Richtung der Gewichtskraft G (Pfeilspitze zeigt nach unten), sondern über die Pfeillänge auch deren Größe darstellt, Abbildung 1.3. Zusätzlich wurde der Winkel α eingezeichnet, der die Neigung der Seilabschnitte (links und rechts) beschreibt. Der Definition der Winkelfunktionen in einem rechtwinkligen Dreieck entsprechend, gelten dann folgende Zusammenhänge

$$\sin \alpha = \frac{x}{\ell} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \frac{b}{\ell} \quad \text{sowie} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{x}{b} \quad (1.3)$$

wobei x die Gegenkathete, b die Ankathete und ℓ die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks A-C-M darstellen.

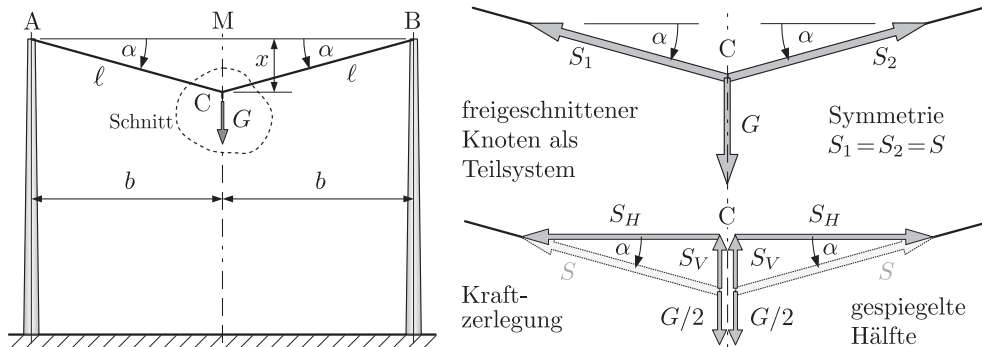


Abbildung 1.3: Freihängende Verkehrsampel mit freigeschnittenem Knoten als Teilsystem

Das gedankliche Durchtrennen des Drahtseils links und rechts vom Knoten C befreit diesen vom Rest des Ersatzmodells und liefert das Teilsystem Knoten, das in Abbildung 1.3 rechts oben dargestellt ist. Dem Schnittprinzip gehorchend, müssen dann an den durchgetrennten Bauteilen entsprechende Reaktionen berücksichtigt werden. In der idealen Modellvorstellung der Statik kann ein Seil nur Zugkräfte in Seilrichtung übertragen. Deshalb haben die Pfeile S_1 und S_2 die gleiche Richtung wie die nach links und rechts verlaufenden Abschnitte des Drahtseils. Ihre vom Knoten weg zeigenden Spitzen symbolisieren die Zugwirkung.

Aufgrund der symmetrischen Anordnung sind die Seilkräfte im linken und rechten Abschnitt gleich groß $S_1 = S_2 = S$, aber entgegengesetzt gerichtet. Teilt man die Belastung durch das Gewicht G in zweimal $G/2$ auf, dann zerfällt das Teilsystem Knoten in zwei symmetrische Hälften, die zur besseren Darstellung leicht auseinandergezogen dargestellt wurden.

Darüber hinaus wurde der Kraftpfeil der Seilkraft S mit S_H und S_V jeweils in eine horizontale und in eine vertikale Komponente zerlegt.



Die Zerlegung von Kraftpfeilen erfolgt immer so, dass der Weg vom Fußpunkt zur Pfeilspitze nicht mehr direkt durchlaufen, sondern über Umwege (zum Beispiel vertikal und horizontal) angesteuert wird.

Die am Knoten nach links und rechts zeigenden horizontalen Komponenten S_H heben sich auf. Damit dasselbe auch in vertikaler Richtung zutrifft, muss

$$2S_V = 2G/2 \quad \text{oder} \quad S_V = G/2 \quad (1.4)$$

gelten. Die vertikale Komponente der Seilkraft ist demnach unabhängig vom Durchhang x immer gleich dem halben Gewicht der Verkehrsampel.

Lösung

Die Beziehung (1.4) entspricht dem Gleichgewichtsaxiom von Newton, das in Kapitel 4 ausführlich behandelt wird. Die Seilkraft S und ihre Komponenten S_H und S_V bilden ein rechtwinkliges Dreieck, das durch Öffnungswinkel α gekennzeichnet ist. Analog zu (1.2) und (1.3) gilt dann

$$S^2 = S_H^2 + S_V^2 \quad \text{und} \quad \tan \alpha = \frac{S_V}{S_H} \quad \text{oder} \quad S_H = \frac{S_V}{\tan \alpha} \quad (1.5)$$

Mit (1.3) und (1.4) bleibt

$$S_H = \frac{S_V}{\tan \alpha} = \frac{G/2}{x/b} = \frac{G}{2} \frac{b}{x} \quad (1.6)$$

Die gesamte Seilkraft ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{S_H^2 + S_V^2} = \sqrt{\left(\frac{G}{2} \frac{b}{x}\right)^2 + \left(\frac{G}{2}\right)^2} = \frac{G}{2} \sqrt{\left(\frac{b}{x}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{G}{2} \sqrt{\frac{b^2 + x^2}{x^2}} = \frac{G}{2} \sqrt{\frac{\ell^2}{x^2}} = \frac{G}{2} \frac{\ell}{x} = \frac{G}{2 \sin \alpha} \end{aligned} \quad (1.7)$$

wobei die Beziehungen (1.2) und (1.3) mit berücksichtigt wurden. Damit wird die Vermutung bestätigt, dass eine simple Auslegung mit $x = 0$ nicht praktikabel ist, da (1.7) bei $x \rightarrow 0$ eine unendlich große Seilkraft $S \rightarrow \infty$ liefert.

Interpretation

Mit steigendem Durchhang $x > 0$ wird die Seilkraft S kleiner und erreicht für $x \rightarrow \infty$ den Grenzwert $S = G/2$, der gemäß (1.4) dem Wert der vertikalen Komponente S_V entspricht. Das leuchtet ein, denn bei $x \rightarrow \infty$ liefert (1.1) auch eine unendlich große Mastenhöhe $h \rightarrow \infty$. Die beiden Seilabschnitte verlaufen dann (eine endliche Breite b vorausgesetzt) vertikal nach unten und müssen je zur Hälfte das Gewicht der Verkehrsampel tragen. Das sich hier ergebende Dilemma bei der Auslegung wird in der Tabelle 1.1 veranschaulicht.

Weder eine unendlich große Seilkraft ($S \rightarrow \infty$) noch eine unendlich große Mastenhöhe ($h \rightarrow \infty$) kann Ziel der Auslegung sein. Optimale Lösungen, die auf eine minimale Mastenhöhe $h = h_{\min} = d + a$ oder auf eine minimale Seilkraft $S = S_{\min} = G/2$ führen, sind

	Durchhang	Mastenhöhe aus (1.1)	Seilkraft aus (1.7)
Grenzwert	$x \rightarrow 0$	$h = h_{\min} = d + a$	$S \rightarrow \infty$
realistischer Bereich	$0 < x < \infty$	$h = d + a + x$	$S = \frac{G}{2} \sqrt{\left(\frac{b}{x}\right)^2 + 1}$
Grenzwert	$x \rightarrow \infty$	$h \rightarrow \infty$	$S = S_{\min} \rightarrow \frac{G}{2}$

Tabelle 1.1: Eckpunkte bei der Auslegung der freien Aufhängung einer Verkehrsampel

folglich nicht praktikabel. Deshalb muss hier eine pragmatische Lösung gesucht werden. Dazu betrachtet man einfach den durch (1.7) festgelegten Zusammenhang zwischen dem Durchhang x und der Seilkraft S . Mit den dimensionslosen Größen x/b und S/G ergibt sich der in Abbildung 1.4 dargestellte Verlauf. Neben der Kurve S/G als Funktion von x/b wurde auch noch eine Wertetabelle angegeben, die mit der Umkehrfunktion x/b von S/G erstellt wurde, um glatte Werte für S/G zu erhalten. Wie erwartet, geht die Kurve S/G von x/b für $x \rightarrow 0$, bzw. $x/b \rightarrow 0$, gegen Unendlich und nähert sich für größere x/b -Werte asymptotisch dem Grenzwert $S_{\min}/G = 1/2$ an, der als gestrichelte horizontale Linie zusätzlich eingetragen ist.

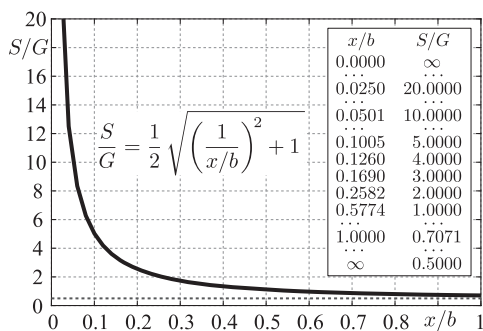


Abbildung 1.4: Seilkraft S als Funktion des Durchhangs x in dimensionsloser Darstellung

Für eine pragmatische Auslegung gibt man sich nun eine maximal tolerierbare Seilkraft $S = S_{\text{tol}}$ vor und entnimmt aus der Grafik oder der Wertetabelle den daraus resultierenden Durchhang. So hätte $S_{\text{tol}}/G = 5$ den leicht gerundeten Durchhang $x/b = 0.1$ zur Folge. Bei einer Fahrspurbreite von $b = 4$ m ergäbe das mit $x = 0.4$ m einen akzeptablen, nicht allzu großen, Durchhang und hätte zur Folge, dass die halbe Länge des Drahtseils gemäß (1.2) dann mit $\ell = 4 * \sqrt{1 + 0.1^2} = 4.02$ m nur geringfügig größer als die Fahrspurbreite wäre. Da die maximale Durchfahrtshöhe in der Regel mit $d = 4$ m angesetzt wird und die Höhe der Verkehrsampel mit $a = 1$ m abgeschätzt werden kann, ergäbe das nach (1.1) mit $h = 4 + 1 + 0.4 = 5.4$ m auch eine akzeptable Mastenhöhe.



Damit haben wir am Beispiel der Verkehrsampel die am Anfang dieses Kapitels aufgeführten Schritte durchlaufen und sind zu einer praktikablen Auslegung gekommen, können uns aber noch nicht bequem zurücklehnen, da bisher ja nur das Teilsystem Knoten betrachtet wurde.

Das Drahtseil ist an beiden Seiten an den Masten befestigt und belastet diese. Um die Teilsysteme Masten zu generieren, müssen jeweils das Drahtseil und die Verankerung der Masten am Boden durchtrennt bzw. geschnitten werden, Abbildung 1.5.

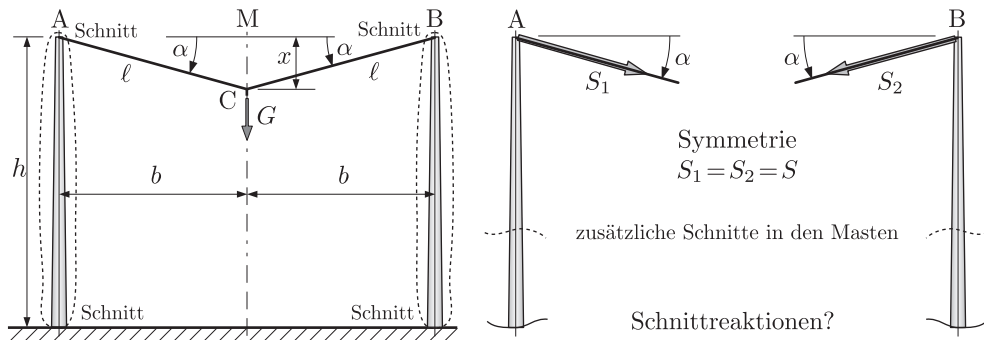


Abbildung 1.5: Freihängende Verkehrsampel mit freigeschnittenen Masten

Die Schnitte in den Drahtseilen legen wieder die in Seilrichtung wirkenden Kräfte S_1 und S_2 frei. Wobei aufgrund der Symmetrie $S_1 = S_2 = S$ gilt und die Seilkraft S jetzt eine bekannte Größe ist, die wir zur Festlegung des Durchhangs mit $S = S_{tot} = 5G$ vorgegeben haben.

Eine präzise Festlegung der Schnittreaktionen, die an den Verankerungen zwischen den Masten und dem Boden auftreten, erfordert tiefere Kenntnisse aus der Technischen Mechanik, die hier nicht so einfach vorweggenommen werden können. Weitere Schnitte, die die Masten an beliebiger Stelle durchtrennen, liefern dann auch Informationen über die Belastungen der Masten im Inneren.



Erst eine intensive Beschäftigung mit der Technischen Mechanik wird uns in die Lage versetzen, diese und natürlich auch noch weitere Probleme aus der Praxis zu lösen.

Dieses Lehrbuch ist auf die Statik, ein wichtiges Teilgebiet der Mechanik, beschränkt. Selbst bei diesem relativ einfachen Beispiel sind jedoch auch noch weitere Teilgebiete der Mechanik von Bedeutung.

Um die Auslegung der freien Aufhängung einer Verkehrsampel abzuschließen, müssen das Drahtseil und die Masten so dimensioniert werden, dass auch bei einem »Worst-Case-Scenario«, das Drahtseil nicht abreißt oder die Masten abknicken, bzw. sich aus der Verankerung am Boden lösen. Dazu wird die aus der Berechnung folgende Belastung, hier die Seilkraft S_{tot} , mit einem geeigneten Faktor ν multipliziert, der mögliche Zusatzbelastungen zumindest näherungsweise berücksichtigt. So könnte beispielsweise eine Schneelast

durch ein erhöhtes Eigengewicht berücksichtigt werden. Dynamische Effekte, wie das Pendeln der Ampel, das durch stürmische Windböen angeregt wird, sind allerdings in einer rein statischen Auslegung nicht so einfach zu berücksichtigen. Hier ist dann die Dynamik gefragt, ein weiteres sehr interessantes und wichtiges Teilgebiet der Mechanik. Da eine herunterfallende Verkehrsampel auch Personen in Gefahr bringen könnte, wird man den »Sicherheitsbeiwert« ν entsprechend groß ansetzen, oder besser die zugrunde gelegte Modellvorstellung durch weitere Einflussgrößen erweitern.

Das Ersatzmodell der Statik, der starre Körper, beinhaltet keine Verformungen. Bei Belastung kommt es jedoch bei Drahtseilen zu einer Längenänderung und bei Masten zu einer Biegung. Diese Verformungen verändern den Durchhang x und gemäß (1.7) auch die Seilkraft S . Ein größerer Durchhang reduziert die Durchfahrthöhe und kann so die Funktionalität der Aufhängung infrage stellen. Größere Seilkräfte erfordern unter Umständen ein stärkeres Seil und dickere Masten. Bei technischen Systemen sind die Verformungen im Vergleich zu den Bauteilabmessungen in der Regel sehr klein. Dann kann ein sehr effizientes zweistufiges Verfahren eingesetzt werden. Im ersten Schritt werden, so wie hier zum Teil geschehen, mit dem Ersatzmodell der Statik (starrer Körper) alle Belastungen ermittelt. Im zweiten Schritt kommt dann die Elasto-Statik oder Festigkeitslehre zum Zuge, die gemäß Tabelle 1.1 das Ersatzmodell elastischer Körper verwendet. Die aus der Statik folgenden Belastungen werden nun dem elastischen Körper eingeprägt und ermöglichen so die Ermittlung resultierender Verformungen. Dabei kommt vor allem dem letzten Schritt, der Interpretation und der kritischen Überprüfung der Ergebnisse, große Bedeutung zu. Denn mathematische Lösungen können nur dann verlässliche Aussagen liefern, wenn die Voraussetzungen (hier kleine Bauteilverformungen) auch tatsächlich erfüllt sind.

Dieses Beispiel hat gezeigt, dass die Statik eine Basis für Auslegungsberechnungen bildet und auch als Grundlage für weiterführende Berechnungen dient. Deshalb ist es unabdingbar, sich intensiv mit den Methoden der Statik auseinanderzusetzen. Dies wollen wir im Folgenden auch tun.