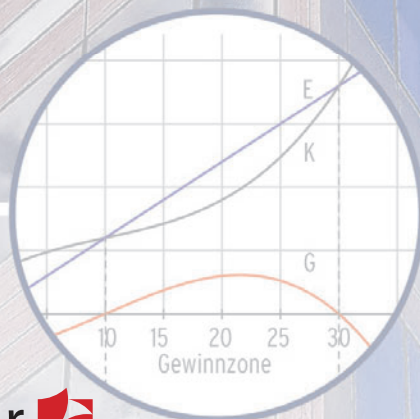


Bohner  
Ott  
Deutsch

# Formelsammlung

für das berufliche Gymnasium  
Niedersachsen  
Mathematik



Merkur   
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis  
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

---

Die Verfasser:

**Kurt Bohner**

Lehrauftrag Mathematik am Beruflichen Schulzentrum Wangen (BSW)  
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

**Roland Ott**

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

**Ronald Deusch**

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen  
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Umschlag: Kreis oben: Syda Productions - [www.colourbox.de](http://www.colourbox.de)

\* \* \* \* \*

2. Auflage 2019

© 2018 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung:

MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: [info@merkur-verlag.de](mailto:info@merkur-verlag.de)

Internet: [www.merkur-verlag.de](http://www.merkur-verlag.de)

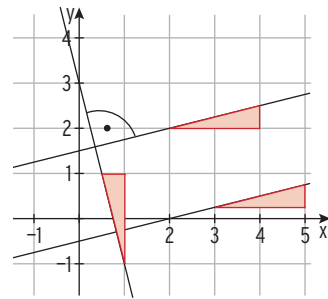
ISBN 978-3-8120-1695-7

Die Geraden mit den **Steigungen**  $m_1$  und  $m_2$

- sind **parallel** zueinander:  $m_1 = m_2$
- stehen aufeinander **senkrecht**

(orthogonal zueinander):

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}; m_1 \neq 0$$



Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen für zwei Unbekannte

Gleichsetzungsverfahren

Einsetzungsverfahren

Additionsverfahren

## Quadratische Funktion – Parabel

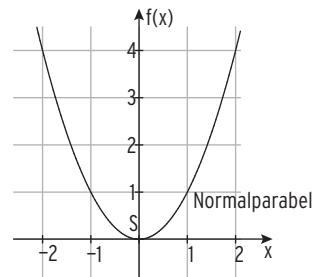
Ganzrationale Funktion  $f$  2. Grades

mit  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ;  $a \neq 0$ ;  $x \in \mathbb{R}$

(quadratische Funktion)

**Normalparabel:**  $y = x^2$

mit Scheitel  $S(0 | 0)$



**Funktionsterm  $f(x)$  in**

**Hauptform:**  $f(x) = ax^2 + bx + c$

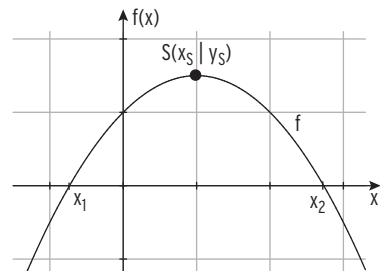
(Normalform)

**Scheitelform:**  $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$

$S(x_S | y_S)$  Scheitelpunkt

**Produktform:**  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$x_1, x_2$  sind die Nullstellen von  $f$ .

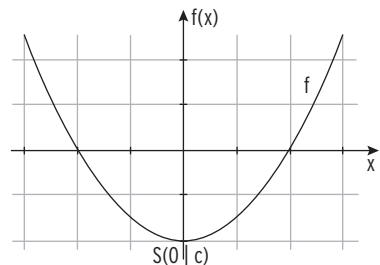


**Symmetrie**

zur Ordinatenachse:  $f(x) = ax^2 + c$

mit Scheitel  $S(0 | c)$

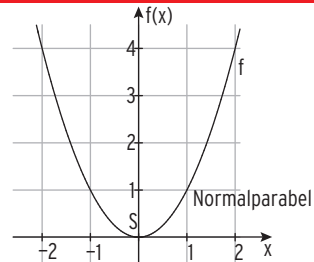
Bedingung:  $f(x) = f(-x)$



## Schaubilder von quadratischen Funktionen

Grundfunktion  $f$  mit  $f(x) = x^2$ ;  $x \in \mathbb{R}$

Graph von  $f$ : Normalparabel



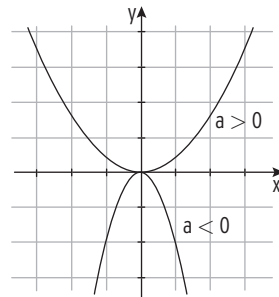
Parametervariationen:

- $f$  mit  $f(x) = a \cdot x^2$ ;  $a \neq 0$

Für  $a > 0$ : Streckung in Ordinateenrichtung

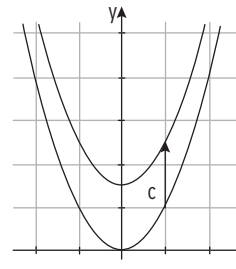
Für  $a < 0$ : Streckung in Ordinateenrichtung

mit Faktor  $|a|$  und Spiegelung  
an der Abszissenachse



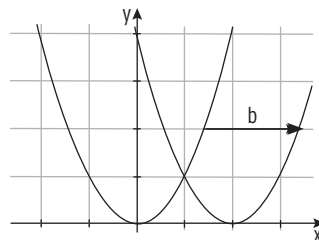
- $f$  mit  $f(x) = x^2 + c$

Verschiebung in Ordinateenrichtung um  $c$



- $f$  mit  $f(x) = (x - b)^2$

Verschiebung in Abszissenrichtung um  $b$



$$f \text{ mit } f(x) = a \cdot (x - b)^2 + c$$

Streckung in Ordinateenrichtung  
mit Faktor  $|a|$

Verschiebung in Abszissen-  
richtung um  $b$

Verschiebung in Ordinateen-  
richtung um  $c$

Hinweis: Betrag einer Zahl  $a$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

## Quadratische Gleichung

Quadratische Gleichung der Form:  $x^2 + px + q = 0$

pq-Lösungsformel:  $x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$   
 mit Diskriminante  $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

Quadratische Gleichung der Form:  $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

abc-Lösungsformel:  $x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

mit Diskriminante  $D = b^2 - 4ac$

Die Anzahl der Lösungen hängt von der Diskriminante D ab.

|                      |                               |                     |
|----------------------|-------------------------------|---------------------|
| $D > 0$              | $D = 0$                       | $D < 0$             |
| <b>zwei Lösungen</b> | <b>eine (doppelte) Lösung</b> | <b>keine Lösung</b> |
| $x_1 \neq x_2$       | $x_1 = x_2$                   |                     |

Produktform:  $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Lösungen  $x = x_1 \vee x = x_2$

**Satz vom Nullprodukt:** Ein Produkt ist null, wenn mindestens ein Faktor null ist:

$$u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee v = 0 \quad („\vee“ \text{ bedeutet „oder“})$$

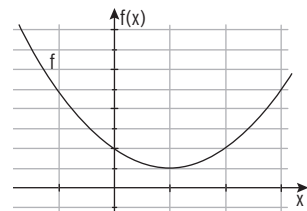
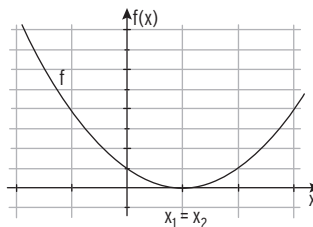
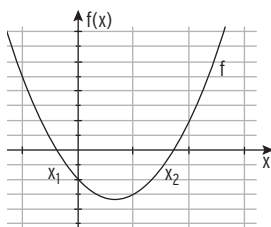
Grafische Interpretation einer quadratischen Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$   
 bzw.  $x^2 + px + q = 0$

Die Gleichung hat

|                      |                               |                     |
|----------------------|-------------------------------|---------------------|
| <b>zwei Lösungen</b> | <b>eine (doppelte) Lösung</b> | <b>keine Lösung</b> |
| $x_1; x_2$           | $x_{1 2}$                     |                     |

Die Funktion f mit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  bzw.  $f(x) = x^2 + px + q$  hat

**zwei Nullstellen**                      **eine (doppelte) Nullstelle**                      **keine Nullstelle**



Bed. für die Nullstellen:  $f(x) = 0$

## Wachstum

### • Exponentielles Wachstum

$$f(t) = a \cdot b^t \text{ bzw. } f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}; t \geq 0$$

Wachstumsfaktor:  $b > 1$

Zerfallsfaktor:  $0 < b < 1$

Wachstumskonstante:  $k > 0$

Zerfallskonstante:  $k < 0$

Anfangsbestand:  $a = f(0)$

**Differenzialgleichung:**  $f'(t) = k \cdot f(t)$

**Halbwertszeit**  $t_H$  (für  $k < 0$ ):

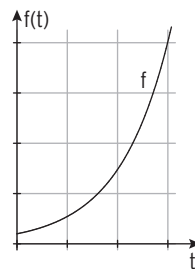
$$t_H = -\frac{\ln(2)}{k}$$

**Verdoppelungszeit**  $t_V$  (für  $k > 0$ ):

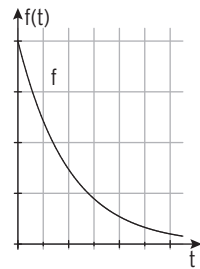
$$t_V = \frac{\ln(2)}{k}$$

$t_H$  und  $t_V$  sind unabhängig vom Anfangsbestand  $f(0)$ .

Wachstum



Zerfall



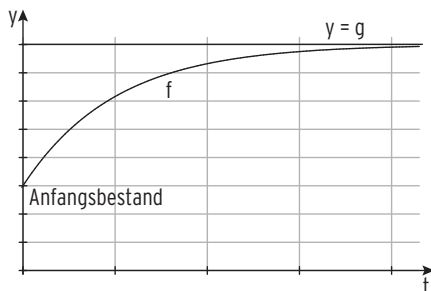
### • Beschränktes Wachstum

$$f(t) = g - a e^{k \cdot t}; a > 0, k < 0, t \geq 0$$

$g$ : Sättigungsgrenze

$f(0) = g - a$ : Anfangsbestand

**Differenzialgleichung:**  $f'(t) = k \cdot (g - f(t))$

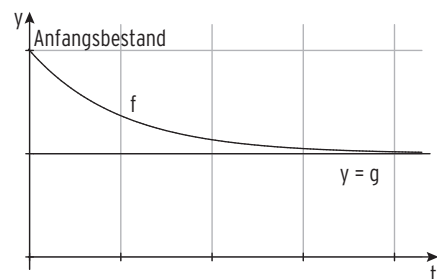


### Beschränkter Zerfall

$$f(t) = g + a e^{k \cdot t}; a > 0, k < 0, t \geq 0$$

$g$ : Sättigungsgrenze

$f(0) = g + a$ : Anfangsbestand



### • Logistisches Wachstum

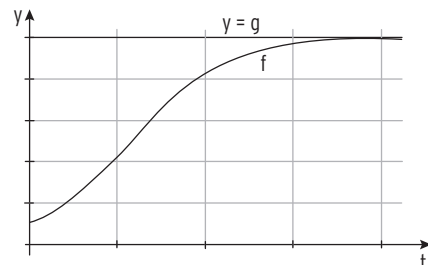
$$f(t) = \frac{g}{1 + a \cdot e^{-b \cdot t}} \text{ mit } a = \frac{g}{f(0)} - 1; b = k \cdot g$$

$g$ : Sättigungsgrenze;

$k$ : Wachstumskonstante

**Differenzialgleichung:**

$$f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (g - f(t))$$



## Flächenberechnung

### • Fläche zwischen dem Graphen von $f$ und der Abszissenachse

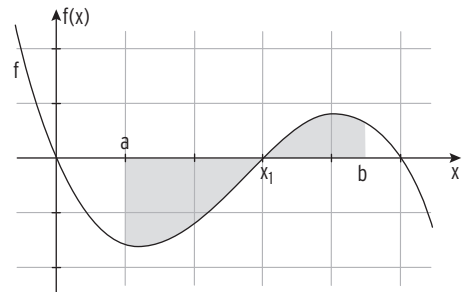
Nullstelle von  $f$  auf  $[a; b]$ :  $x_1$

**Gesamter Flächeninhalt:**

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^b f(x) dx \right|$$

**orientierter Flächeninhalt**

**(Flächenbilanz):**  $\int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^b f(x) dx$



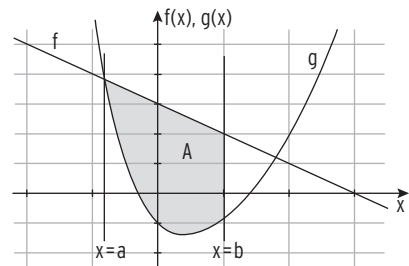
### • Fläche zwischen den Graphen von $f$ und $g$

Für  $f(x) \geq g(x)$  auf  $[a; b]$  gilt:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx,$$

Für  $f(x) \leq g(x)$  auf  $[a; b]$  gilt:

$$A = - \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



## Integralfunktion

$$I_a(x) = \int_a^x f(t) dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$$

Die **Integralfunktion** zur unteren Grenze  $a$  ist eine Stammfunktion von  $f$  mit  $I_a(a) = 0$ .

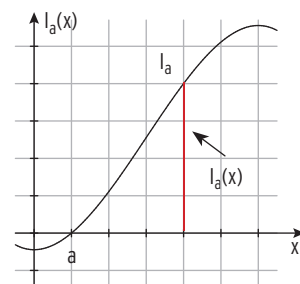
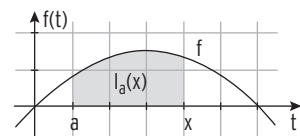
**Begriffe:**

**Unbestimmtes Integral:**  $\int f(x) dx = F(x) + C$

**(Menge von Funktionen)**

**Bestimmtes Integral:**  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  (reelle Zahl)

**Integralfunktion**  $I_a$  mit  $I_a(x) = \int_a^x f(t) dt$  (Funktion)

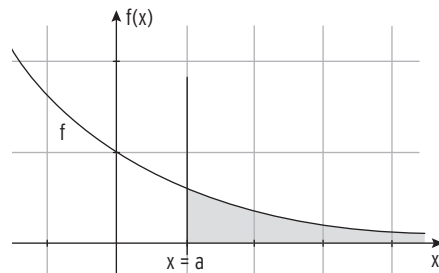


## Uneigentliches Integral

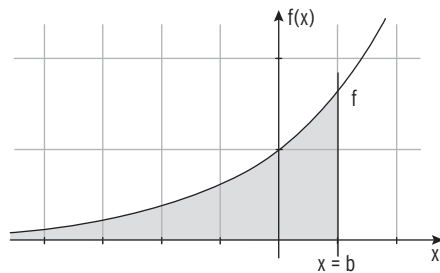
### Flächenberechnung mithilfe einer Grenzwertbetrachtung

#### • Integration über ein unbeschränktes Intervall

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$



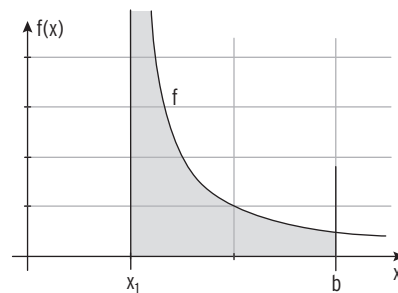
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$



#### • Integration einer unbeschränkten Funktion

$x_1$  ist Polstelle von  $f$ .

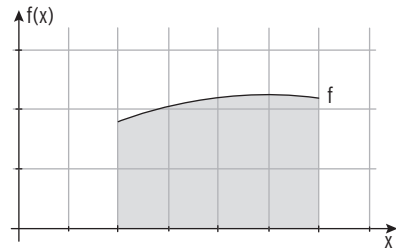
$$\int_{x_1}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow x_1} \int_a^b f(x) dx$$





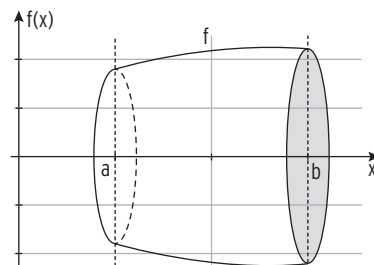
## Rotation um die Abszissenachse

Die Fläche zwischen dem Graphen von  $f$  und der Abszissenachse rotiert um die Abszissenachse.

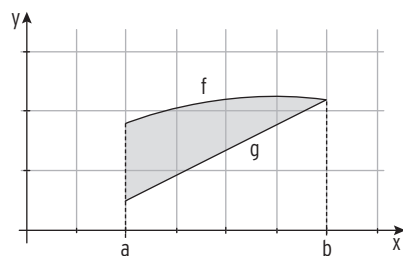


Volumen des Rotationskörpers:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$



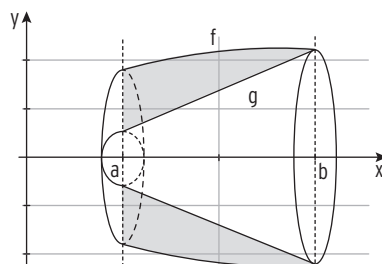
Die Fläche zwischen den Graphen von  $f$  und von  $g$  rotiert um die Abszissenachse.

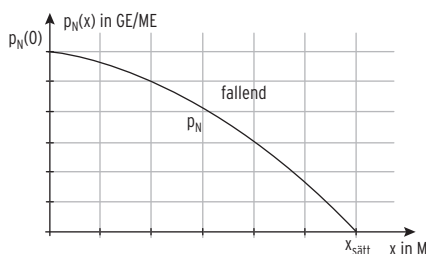
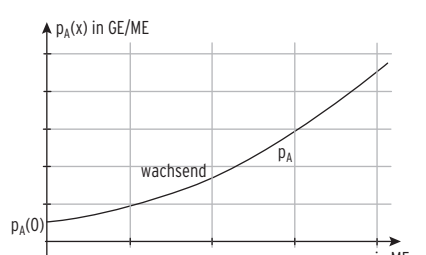
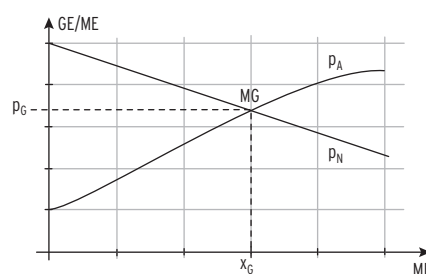
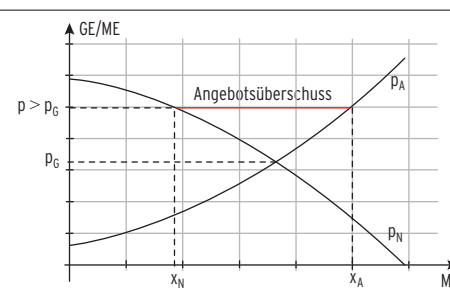


Volumen des Rotationskörpers:

$$V = V_{\text{außen}} - V_{\text{innen}}$$

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx - \pi \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx$$



| Bezeichnung                                                           | Symbol; Formel                                          | Schaubild                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Nachfragefunktion<br>Sättigungsmenge $x_{\text{sätt}}$<br>Höchstpreis | $p_N(x)$<br>$p_N(x) = 0$<br>$p_N(0)$                    |    |
| Angebotsfunktion<br>Mindestangebotspreis                              | $p_A(x)$<br>$p_A(0)$                                    |    |
| Gleichgewichtsmenge<br>Gleichgewichtspreis<br>Marktgleichgewicht      | $x_G$<br>$p_G = p_N(x_G) = p_A(x_G)$<br>$MG(x_G   p_G)$ |   |
| Angebotsüberschuss                                                    | $x_A - x_N$                                             |  |

| Bezeichnung         | Symbol; Formel                                                                              | Schaubild |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Nachfrageüberschuss | $x_N - x_A$                                                                                 |           |
| Konsumentenrente    | $KR = \int_0^{x_G} (p_N(x) - p_G) dx$ bzw.<br>$KR = \int_0^{x_G} p_N(x) dx - x_G \cdot p_G$ |           |
| Produzentenrente    | $PR = \int_0^{x_G} (p_G - p_A(x)) dx$ bzw.<br>$PR = x_G \cdot p_G - \int_0^{x_G} p_A(x) dx$ |           |

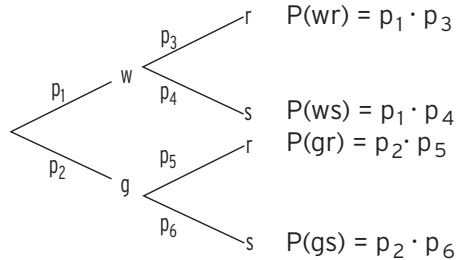
## Degressive Abschreibung

|                                                            |                                                                            |
|------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| Anschaffungskosten                                         | $B_0$                                                                      |
| Abschreibungssatz                                          | $p \%$                                                                     |
| Buchwert<br>nach n Jahren                                  | $B_n = B_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$                         |
| Abschreibungsbetrag<br>nach n Jahren                       | $a_n = \frac{p}{100} \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{n-1} \cdot B_0$ |
| Wechselzeitpunkt n bei einer<br>Nutzungsdauer von m Jahren | $n = m + 1 - \frac{1}{p\%} = m + 1 - \frac{100}{p}$                        |

## Mehrstufige Zufallsexperimente

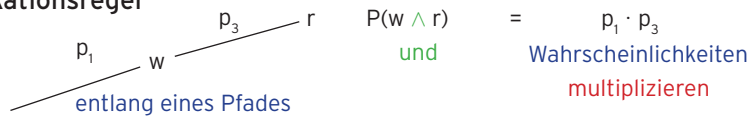
### Baumdiagramm

mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten:

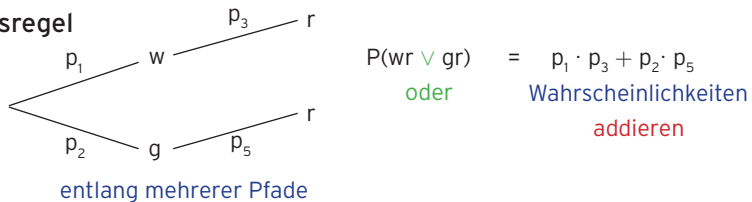


### Pfadregeln:

#### Pfadmultiplikationsregel



#### Pfadadditionsregel

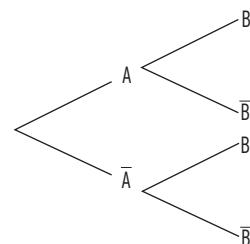


## Vierfeldertafel für Wahrscheinlichkeiten

Zwei Merkmale mit jeweils zwei Ausprägungen

|           | B                   | $\bar{B}$                 | Summe        |
|-----------|---------------------|---------------------------|--------------|
| A         | $P(A \cap B)$       | $P(A \cap \bar{B})$       | $P(A)$       |
| $\bar{A}$ | $P(\bar{A} \cap B)$ | $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | $P(\bar{A})$ |
| Summe     | $P(B)$              | $P(\bar{B})$              | 1            |

zugehöriges Baumdiagramm

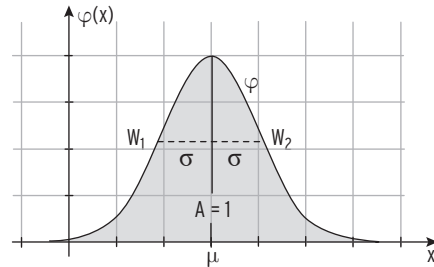


## Normalverteilung

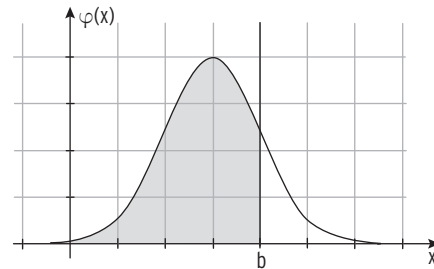
Dichtefunktion  $\varphi$  mit

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}; x \in \mathbb{R}$$

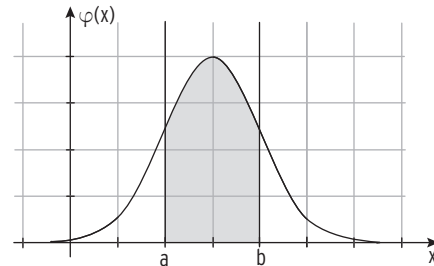
Die Dichtefunktion beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer **stetig** verteilten Zufallsvariablen (Normalverteilung).



$$P(X \leq b) = \int_{-\infty}^b \varphi(x) dx$$



$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x) dx$$



## Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Laplace-Bedingung  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} > 3$

Näherungsformel von Moivre-Laplace

- Mit der Dichtefunktion  $\varphi$ :  $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx$

mit Stetigkeitskorrektur 0,5:  $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1 - 0,5}^{x_2 + 0,5} \varphi(x) dx$
- Mit der Summenfunktion  $\Phi$ :  $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$

mit Stetigkeitskorrektur 0,5:  $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 + 0,5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - 0,5 - \mu}{\sigma}\right)$

## Leontief-Modell

### Input-Output-Tabelle

|       | $S_1$    | $S_2$    | $S_3$    | Marktabgabe | Produktion |
|-------|----------|----------|----------|-------------|------------|
| $S_1$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $y_1$       | $x_1$      |
| $S_2$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $y_2$       | $x_2$      |
| $S_3$ | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | $y_3$       | $x_3$      |

Dabei ist  $x_{ij}$  die Lieferung des Sektors  $S_i$  an den Sektor  $S_j$  (in geeigneten Einheiten).

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{Produktion, auch Bruttooutput, ...}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{Marktabgabe, auch Konsum, Endverbrauch, ...}$$

Inputmatrix oder Technologiematrix  $A$ :  $A = \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{23}}{x_3} \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{32}}{x_2} & \frac{x_{33}}{x_3} \end{pmatrix}$

Innerbetrieblicher Absatz:

$$A \cdot \vec{x}$$

Zusammenhang:

$$A \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x}$$

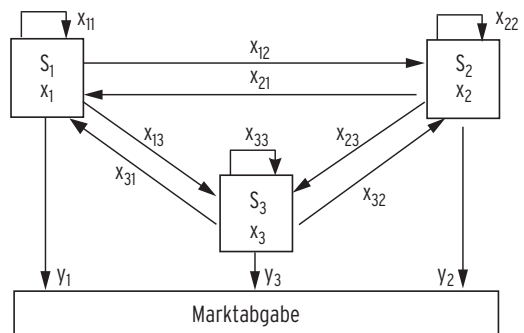
$$\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x}$$

$$\vec{x} = (E - A)^{-1} \vec{y}$$

$(E - A)^{-1}$  Leontief-Inverse

Gozintograph

(Verflechtungsdiagramm)



## Vektorgeometrie

### Vektoren im Anschauungsraum

Für  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  (Ortsvektoren der Punkte A:  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$  und B:  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ) gilt:

**Skalare Multiplikation:**  $r \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

**Kollinearität:**

$r \cdot \vec{a}$  und  $\vec{a}$  sind **kollinear** (parallel).

$\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind **kollinear**, wenn es ein  $r \neq 0$  gibt, sodass  $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$  gilt.

**Addition bzw.**

**Subtraktion von Vektoren:**  $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$

**Linearkombination:**  $\vec{x} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$

**Betrag des Vektors  $\vec{a}$ :**  $|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

**Betrag des Vektors  $\overrightarrow{AB}$ :**  $|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

$|\overrightarrow{AB}|$  ist der **Abstand** der Punkte A und B.

**Mittelpunkt M der Strecke AB:**  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$   
 $= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

**Skalarprodukt:**  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

**Geometrische Form:**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$

**Koordinatenform:**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  stehen **senkrecht aufeinander**, wenn  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$   
 ( $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind zueinander orthogonal:  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ).

**Winkel zwischen den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ :**  $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

