

Leseprobe aus:

Taschner

Die Farben der Quadratzahlen



Mehr Informationen zum Buch finden Sie auf
www.hanser-literaturverlage.de

© Carl Hanser Verlag München 2019

HANSER



RUDOLF TASCHNER

XXXX

DIE FARBEN DER QUADRATZAHLEN

Kleine Anleitung
zum mathematischen Staunen

Carl Hanser Verlag

1. Auflage 2019

ISBN 978-3-446-26451-9

© 2019 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München

Umschlag: Anzinger und Rasp, München

Satz: Kösel Media GmbH, Krugzell

Druck und Bindung: GGP Media GmbH, Pößneck

Printed in Germany



MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C014496

INHALT

XXXXX

Vorwort	7
Paradoxien des Zufalls und die Grenzen des Möglichkeitssinns	9
Gabriels Posaune und die Freude an der Erkenntnis	49
Geheimnisvolle Primzahlen und die Frage nach ewiger Gewissheit	89
Die wundersame Anwendbarkeit der Quadratzahlen	151
Die tiefe Kluft zwischen Wahrheit und Korrektheit	201
Danksagung	261
Register	263

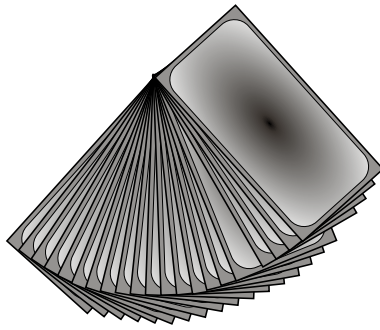
VORWORT

XXXX

»They did what could be done.« So antwortete der Mathematiker Harold Davenport, als man ihn fragte, wie ihm die Vorträge bei einem Kongress gefallen hätten. Ein vernichtendes Urteil. Nur etwas zu erfahren, das nicht überrascht, empfand Davenport als öde. Allein für das Unerwartete, für das Überraschende konnte er sich begeistern.

In diesem Buch soll von Überraschendem und Unerwartetem berichtet werden. Es handelt sich jedoch nicht um bloße Kuriositäten, die man beiläufig kennenlernt, sondern das Erstaunliche, von dem hier die Rede ist, birgt wertvolles Wissen und tiefe Einsichten in sich. In fünf Kapiteln werden eigenartige Phänomene aus der Wahrscheinlichkeitstheorie, der Geometrie, der Zahlentheorie, der angewandten Mathematik und der reinen Mathematik erörtert und philosophisch beleuchtet.

Dieses Buch ist ein Essay. Als solches trägt es den Charakter des Vorläufigen in sich. Zwar ist viel von dem, worüber hier berichtet wird, schon sehr lange bekannt, einiges sogar mehrere hundert, ja tausend Jahre. Aber es lohnt, immer wieder aufs Neue darüber nachzudenken. Denn die Erkenntnisse sind so tiefeschürfend und so weittragend, dass sich bei jeder erneuten Reflexion neue, unvermutete Aspekte zeigen. Den Anspruch, hier Endgültiges zu sagen, will das Buch keinesfalls erheben. Dafür ist es zu sehr dem Feuilletonistischen verpflichtet. Man sollte dies als Vorteil sehen. Bietet es doch damit allen Leserinnen und Lesern die verlockende Gelegenheit, eigene Gedanken weiterzuführen. Man kann sich kein schöneres intellektuelles Vergnügen vorstellen. So ist zu hoffen, dass trotz der vielen Zahlen und Rechnungen, die manche Seiten des Buches füllen, Leichtigkeit und Amüsement im Lesen nicht zu kurz kommen.



Was bedeutet es, dass aus einem Deck von 22 Karten »zufällig« gerade diese gewählt wurde?

PARADOXIEN DES ZUFALLS UND DIE GRENZEN DES MÖGLICHKEITSSINNS

XXXX

Walter Krämer, Mathematiker und Professor an der Fakultät Statistik der Technischen Universität Dortmund, betreibt mit seinen Büchern, vor allem mit seinem Klassiker »So lügt man mit Statistik«, wertvolle Aufklärung. Er beweist, wie wichtig ein kluger Blick auf eine Fülle von Daten ist. Denn erstaunlich schnell kann man in Fallen tappen, die sich hinter schlecht aufbereiteten oder tendenziös gestalteten statistischen Informationen verbergen.

Zusammen mit Gerd Gigerenzer, Psychologe und Direktor des Harding-Zentrums für Risikokompetenz am Max-Planck-Institut für Bildungsforschung in Berlin, und dem am Essener Leibniz-Institut für Wirtschaftsforschung tätigen und an der Ruhr-Universität Bochum lehrenden Ökonomen Thomas Bauer gibt Walter Krämer seit 2012 die »Unstatistik des Monats« heraus. Damit setzen sich die drei Vorkämpfer für ein klares, vorurteilsfreies Denken das Ziel, eine breite Öffentlichkeit zu ermuntern, »mit Daten und Fakten vernünftig umzugehen, in Zahlen gefasste Abbilder der Wirklichkeit korrekt zu interpretieren und eine immer komplexere Welt und Umwelt sinnvoller zu beschreiben«.

Dazu benötigt es weder Spezialwissen, das nur Eingeweihten zugänglich ist, noch besonderes Rechen Talent. Es reichen ein paar Momente nüchternen Erwägens. Wenn zum Beispiel ein aufgewühlter Journalist in den *Tagesthemen* verkündet, ein Vermögen sei nach zweimal aufeinanderfolgenden 50 Prozent Verlust bei null gelandet, weiß ein aufmerksa-

mer Zuseher auch ohne höhere Mathematik, dass sich der Fernsehmann irrt. Es ist bei 25 Prozent gelandet, nicht bei null.

Ein wenig mehr Zahlen kommen bei einem Beispiel zum Tragen, das Bauer, Gigerenzer und Krämer in ihre »Unstatistik« aufnahmen und das einen besonders eigenartigen Effekt in sich birgt. Es lohnt, darüber nachzudenken, weil die dem Beispiel innewohnende Paradoxie nicht allein bei ihm, sondern auch bei vielen anderen, ähnlich gelagerten Fällen verstörend wirkt.

MASSENTESTUNG UND FEHLALARME

Am Bahnhof Südkreuz in Berlin installierte 2018 die Deutsche Bahn auf Anregung der Polizei und des Innenministeriums eine digitale Gesichtserkennungsanlage. Die Betreiber zeigten sich begeistert: Die Anlage, so stellten sie stolz fest, besitzt eine Trefferrate von 80 Prozent und eine Fehlalarmrate von bloß einem Promille, also 0.1 Prozent.

Halten wir zunächst fest, was die beiden Zahlen 80 Prozent und 1 Promille in diesem Kontext bedeuten:

Die Polizei fahndet nach Personen, derer sie wegen des Verdachts der massiven Gefährdung öffentlicher Sicherheit habhaft werden möchte. Eine Trefferrate von 80 Prozent bei einer für diesen Zweck eingerichteten Anlage bedeutet: Wenn sich unter den Passanten 10 von der Polizei gesuchte Verdächtige befinden, werden 8 von ihnen von der Anlage aufgespürt. Die restlichen 2 kommen unentdeckt an der Anlage vorbei.

Eine Rate von 1 Promille Fehlalarme heißt: Wenn 1000 völlig unverdächtige Personen an der Anlage vorbeiziehen und die Anlage deren Gesicht registriert, wird sie bei einem dieser tausend Passanten Alarm auslösen, weil sie ihn fälschlich als einen von der Polizei gesuchten Verdächtigen identifiziert.

Die Errichtung dieser Anlage ist also, so könnte man in gutem Glau-

ben vermuten, eine sinnvolle Investition. Und zwar nicht nur am Bahnhof Südkreuz in Berlin, sondern an allen Bahnhöfen des Landes.

Eine einfache und sehr unscharfe Überschlagsrechnung hingegen lässt daran zweifeln, ob diese Investition wirklich vernünftig ist:

Gehen wir, sehr grob geschätzt, von einer Bevölkerungszahl von 100 Millionen aus und nehmen wir, genauso grob geschätzt, an, dass 10 Prozent der Bevölkerung täglich durch Bahnhöfe schreiten. Dies sind somit rund 10 Millionen Personen. Nehmen wir ferner an, dass die Polizei die Gesichter von 1000 Verdächtigen kennt, welche die öffentliche Sicherheit massiv zu gefährden drohen. Auch bei diesen Verdächtigen nehmen wir an, dass 10 Prozent von ihnen täglich Bahnhöfe passieren: 100 Personen, die pro Tag von der Gesichtserkennung erfasst werden. Bei 80 von ihnen schlägt der Alarm an, und sie können – schnelles Handeln der Polizei vorausgesetzt – ergriffen werden.

Doch es werden auch die restlichen 10 Millionen Unverdächtigen von der Gesichtserkennung registriert, und bei 1 Promille von ihnen – dies sind immerhin 10 000 Personen – schlägt ebenfalls der Alarm an. Somit stehen 80 zielführenden Gefahrensignalen 10 000 Fehlalarme gegenüber. Oder anders formuliert: Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich beim Er tönen der Sirene um einen echten Alarm handelt, beträgt rund $\frac{80}{10000}$, also 8 Promille, nicht einmal ein Prozent.

Nun mag man dagegenhalten, dass die genannten Zahlen allzu groben Schätzungen unterliegen. Das ist richtig. Aber solange sich die Zahl der Verdächtigen im Vergleich zur Zahl der Bevölkerung im Hundertstel-, ja nur im Zehntelpromillebereich befindet und solange die Zahl der Fehlalarme nicht fast exakt mit null übereinstimmt, wird sich das hier beschriebene Phänomen nicht vermeiden lassen.

Damit soll nichts gegen Anlagen zur Gesichtserkennung gesagt sein. Sinnvoll angewendet, mögen sie tatsächlich für mehr Sicherheit im Land sorgen. Aber zur sinnvollen Anwendung gehört auch das Wissen um das Problem der Fehlalarme.

Ganz ähnlich ist es bei der Erkennung sehr seltener Krankheiten. Hier

ist die Spezifität des Tests das entscheidende Merkmal. Unter ihr versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei Nichtvorliegen der Erkrankung auch der Test ein negatives Resultat liefert. Eine Spezifität von 100 Prozent besagt, dass es – in der Sprache des obigen Beispiels – keine »Fehlalarme« geben kann. Doch sollte die Spezifität 99 Prozent betragen und ist die Krankheit wirklich so selten, dass im Durchschnitt ein Kranker 100 000 gesunden Personen gegenübersteht, schlägt der oben beschriebene Effekt ebenfalls zu. Es wird zwar vom Test der eine Kranke erfasst – wenn der Test zu 100 Prozent sensitiv ist, also bei Krankheit immer anspricht –, aber 1 Prozent der 100 000 Gesunden, und dies sind tausend Patienten, sprechen auf den Test positiv an, obwohl sie die Krankheit nicht haben. Das bedeutet: Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem positiven Test an der Krankheit zu leiden, liegt also bei bloß 1 Promille.

GROSSE, KLEINE UND ALLE NIERENSTEINE

Leider handelt es sich beim Nierensteinleiden nicht um eine so seltene Krankheit, dass sie nur bei einer von 100 000 Personen auftritt. 1986 veröffentlichten vier Ärzte im *British Medical Journal* eine von ihnen durchgeführte Untersuchung, die mehrere Behandlungsmethoden unter die Lupe nahm. Der Einfachheit halber wollen wir uns hier auf zwei der Methoden beschränken: auf ein operatives Verfahren und auf das Zertrümmern der Steine durch Stoßwellen, die außerhalb des Körpers erzeugt werden.

Im gleichen Journal wiesen acht Jahre später Stephen Julious und Mark Mullee, zwei medizinische Statistiker der University of Southampton, darauf hin, dass die Ergebnisse der obigen Untersuchung höchst eigenartig sind:

Die Ärzte operierten 87 Patienten mit kleinen Nierensteinen, die einen Durchmesser von weniger als zwei Zentimeter besitzen. Hierbei waren

81 Patienten der insgesamt 87 nach der Operation geheilt. Das entspricht einer Erfolgsquote von $\frac{81}{87}$, also rund 93 Prozent. Bei 270 Patienten mit kleinen Nierensteinen wurde das Verfahren der Zertrümmerung durch äußere Stoßwellen angewendet, und 234 von ihnen konnten danach als geheilt entlassen werden. Das entspricht einer Erfolgsquote von $\frac{234}{270}$, also rund 87 Prozent.

Bei kleinen Nierensteinen schnitt somit die Operation als Therapie besser ab als die Steinzertrümmerung.

263 Patienten mit großen Nierensteinen mit mindestens zwei Zentimeter Durchmesser wurden operiert, und 192 unter ihnen wurden danach gesund. Das entspricht einer Erfolgsquote von $\frac{192}{263}$, also ziemlich genau 73 Prozent. Bei 80 Patienten mit großen Nierensteinen versuchte man sich an der Zertrümmerung durch äußere Stoßwellen und erreichte bei 55 unter ihnen eine Heilung. Das entspricht einer Erfolgsquote von $\frac{55}{80}$, also rund 69 Prozent.

Auch bei den großen Nierensteinen schnitt die Operation als Therapie besser ab als die Steinzertrümmerung.

Nun aber addierten Julious und Mullee die Anzahlen der operierten Patienten: Jene 87 mit den kleinen und jene 263 mit den großen Nierensteinen ergeben insgesamt 350 Personen, die mit dem Skalpell behandelt wurden. Und $81 + 192$, also 273 von ihnen, wurden geheilt. Dies bedeutet, im Ganzen betrachtet, für die Methode der Operation eine Erfolgsquote von $\frac{273}{350}$, also exakt 78 Prozent.

Genauso addierten Julious und Mullee die Anzahlen der Patienten, an denen die Methode der Zertrümmerung durch äußere Stoßwellen angewendet wurde. Es handelte sich ebenfalls um insgesamt $270 + 80 = 350$ Personen, von denen sich $234 + 55 = 289$ von ihrem Nierensteinleiden befreien konnten. Bemerkenswerter ist jetzt die Erfolgsquote der Zertrümmerung: Sie lautet $\frac{289}{350}$, also fast 83 Prozent, und ist größer als die der Operation.

Im Ganzen betrachtet schnitt die Zertrümmerung besser ab als die Operation.