

HANSER



Leseprobe

zu

„Mathe mit dem Känguru“

von Alexander Unger, Monika Noack,
Robert Geretschläger und Meike Akveld

Print-ISBN: 978-3-446-45655-6
E-Book-ISBN: 978-3-446-46156-7

Weitere Informationen und Bestellungen unter
<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-45655-6>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

Vorwort



Als der internationale Känguru-Wettbewerb ins Leben gerufen wurde, war es der Wunsch der Initiatoren, damit einen spürbaren Beitrag zur Popularisierung der Mathematik zu leisten. Die Idee für den Wettbewerb stammt aus Australien – daher auch der Name „Känguru der Mathematik“. In immer mehr Ländern fanden sich Mitstreiter, und heute gehört der Känguru-Wettbewerb zu den teilnehmerstärksten Schülerwettbewerben der Welt. Allein in unseren drei Teilnehmerländern, Deutschland, Österreich und Schweiz, sind jedes Jahr mehr als eine Million Kinder und Jugendliche dabei.

Ziel des Känguru-Wettbewerbs ist es vor allem, für eine lustvolle Beschäftigung mit Mathematik und für ihre positive Wahrnehmung in der Gesellschaft zu werben. Mathematik ist ein wichtiger Teil unserer Kulturgeschichte und spielt gerade heute, in einer Zeit, die von technologischen Entwicklungen in rasantem Tempo geprägt ist, eine herausragende Rolle. Die Schulen dabei zu unterstützen, junge Menschen mit typischen mathematischen Fragestellungen und Werkzeugen vertraut zu machen, und das auch spielerisch, das ist ein wichtiges Anliegen des Känguru-Wettbewerbs.

Die Aufgaben des Känguru-Wettbewerbs sind im Multiple-Choice-Format gestellt. Natürlich ist für die Mathematik das Begründen eines Resultats unverzichtbar und darf keinesfalls vergessen werden. Allerdings gelingt es mit dem Wettbewerb gerade dadurch, dass nicht jede gefundene oder manchmal auch nur erahnte Lösung schriftlich exakt begründet werden muss, Lernende für die Beschäftigung mit mathematischen Fragestellungen aufzuschließen. Und letztlich gehören geschicktes Probieren, ein sicheres Gefühl für Größenordnungen, Vorstellungsvermögen und Intuition sehr wohl zum mathematischen Arbeiten dazu.

Mit den in diesem Buch gesammelten Aufgaben hoffen wir, neben Lust auf Mathematik auch ein wenig das Staunen über die Vielfalt mathematischer Fragestellungen zu befördern. Die Attraktivität der Beispiele rührt zu einem großen Teil daher, dass aus den 80 Teilnehmerländern Ideen einfließen, in denen sich unterschiedliche mathematische und mathematikdidaktische Traditionen widerspiegeln. Beim jährlichen Treffen des internationalen Vereins „Kangourou sans frontières“ werden von den Aufgabenvorschlägen aus den Ländern die schönsten ausgewählt und anschließend mit Liebe und Witz in die jeweilige Landessprache übertragen. Während die Wettbewerbsaufgaben für die deutschen und die deutschschweizerischen Teilnehmerinnen und Teilnehmer gemeinsam erarbeitet werden und folglich identisch sind, übertragen die österreichischen Organisatoren die Beispiele separat. Gemäß Satzung ist es gestattet, je Altersgruppe bis zu fünf der Aufgaben gegen andere zu tauschen, zum Beispiel aufgrund der unterschiedlichen Lehrplaninhalte. Daher finden sich in der Sammlung auch Beispiele, die nur in Deutschland und der Schweiz oder nur in Österreich verwendet wurden.

Beim Känguru-Wettbewerb werden in den Klassenstufen 3/4 und 5/6, die den Kategorien Ecolier und Benjamin entsprechen, jeweils 24 Aufgaben gestellt. In den Kategorien Kadett, Junior und Student, die den Klassenstufen 7/8, 9/10 und 11/13 entsprechen, sind es jeweils 30 Aufgaben. In Österreich kommt die Kategorie Felix für die Klassenstufen 1/2 mit 15 Aufgaben dazu.

Für das vorliegende Buch haben wir die schönsten Aufgaben der Jahre 2015 bis 2019 ausgewählt, sie thematisch sortiert und abschnittsweise nach steigender Schwierigkeit geordnet. Viele der Aufgaben sind nicht nur für diejenige Altersgruppe geeignet, für die sie im Wettbewerb gestellt wurden, da es oft weniger um in der Schule erlernte Fertigkeiten als vielmehr um logisches Schließen, Entdecken von Zusammenhängen und Strukturen oder den Gebrauch des sogenannten gesunden Menschenverstandes geht. So sind viele der Beispiele, die im Wettbewerb für die jüngeren Teilnehmerinnen und Teilnehmer zu lösen waren, auch noch für wesentlich ältere attraktiv. Und umgekehrt können Jüngere oft auch Aufgaben aus höheren Kategorien lösen: durch Probieren, geschickte Überlegungen und etwas mehr Geduld. Als Orientierung steht bei jeder Aufgabe, wie sie im Wettbewerb eingestuft war. So war beispielsweise die Aufgabe mit der Markierung „A-Benjamin (19), D/CH-5/6 (15) 2019“ in Österreich in der Kategorie Benjamin die 19. Aufgabe und in Deutschland sowie der Schweiz in den Klassenstufen 5/6 die 15. Aufgabe im Jahr 2019. Im Lösungsteil sind die Lösungshinweise für Aufgaben, die es für die Jüngeren zu lösen galt, möglichst vollständig aufgeschrieben. Bei den ohnehin oft umfangreicheren Lösungen der Beispiele für die Älteren sind die Hinweise häufig kürzer gefasst.

Am Entstehen der vorliegenden Aufgabensammlung waren viele beteiligt. Das sind zuallererst die Erfinder der Aufgaben aus den 80 Teilnehmerländern. An der Erarbeitung und Korrektur der deutschsprachigen Aufgabenstellungen und der Lösungshinweise haben neben den Herausgebern vor allem mitgewirkt: Martin Altmann, Bertram Hell, Birgit und Ulf Hutschenreiter, Marion Jarmer, Antje Noack, Solveg Schlinske, Peat Schmolke, Dorothea Vigerske aus Deutschland, Lukas Andritsch, Renate Gottlieb, Johannes Grassegger, Gottfried Perz, Gerhard Plattner, Vera Schmidt, Birgit Söllradl, Andrea Windischbacher aus Österreich sowie Katharina Battaglia, Maria Cannizzo, Lukas Fischer, Beat Flückiger, Simon Knellwolf, Franz Meier, Dima Nikolenkov, Angelika Rupflin, Hansjürg Stocker, Josef Züger aus der Schweiz.

Frau Natalia Silakova vom Carl Hanser Verlag hat uns bei der Entstehung des fünften Bandes „Mathe mit dem Känguru“ mit wertvollen Hinweisen begleitet. Für die angenehme Zusammenarbeit möchten wir uns herzlich bedanken.

Inhaltsverzeichnis

	A	L
1 Zahlen und Rechnen	9	110
1.1 Rechenaufgaben bunt gemischt	9	110
Rechengeschichten zum Aufwärmen	9	110
Rechnen mit den Jahreszahlen	12	111
Runden und Schätzen	14	113
1.2 Knobeleien mit Ziffern	16	114
GröÙte und Kleinste gesucht	16	114
Ziffern gesucht: Kryptogramme	17	115
1.3 Teilbarkeit	19	116
1.4 Rechnen mit Brüchen	22	119
Start in die Bruchrechnung	22	119
Bruchrechnung im Text versteckt	24	120
Bruchrechnung pur	25	121
1.5 Rechnen mit negativen Zahlen	26	122
1.6 Anteile vergleichen: Prozentrechnung	27	123
1.7 Mittelwerte	29	124
2 Gleichungen, Ungleichungen und Funktionen	31	127
2.1 Lineare Gleichungen	31	127
Ganz ohne Variablen einfache lineare Gleichungen lösen ..	31	127
Proportionen	35	130
Gleichungen mit Prozenten	38	131
2.2 Gleichungssysteme	39	133
2.3 Einige nichtlineare Gleichungen	41	135
2.4 GröÙer oder kleiner? – Ungleichungen	42	136
2.5 Funktionen und ihre Graphen	44	138
3 Kombinatorik – mit Zahlen und Figuren	47	141
3.1 Reihenfolgen, Vertauschungen und Zugfolgen	47	141
3.2 Kombinatorisches mit Zahlen	49	143
Anordnungen und Umordnungen	49	143
Richtig kombiniert	52	145

	A	L
3.3 Kombinatorisches mit Figuren	55	148
Anordnungen in Ebene und Raum	55	148
Farbkombinationen gesucht	56	149
Bunte Puzzelei	57	150
3.4 Wahrscheinlichkeit	60	152
4 Geometrie	63	155
4.1 Übungen für das Vorstellungsvermögen	63	155
Mit Aufmerksamkeit zur Lösung	63	155
Drehungen, Spiegelungen, Symmetrie	67	157
Faltübungen	69	158
In drei Dimensionen	71	159
4.2 Einfache Figuren in der Ebene	73	161
Punkte und Strecken	73	161
Umfangsberechnungen	75	162
Winkelbestimmungen	76	163
Flächen vergleichen	78	165
Rechnen mit Flächeninhalten	79	166
4.3 Mit dem Satz des Pythagoras	82	169
4.4 Rund um den Kreis	84	170
4.5 Räumliche Geometrie	85	172
Würfelbauwerke	85	172
Körpernetze	88	174
Volumenberechnung	91	176
5 Logisches, Kryptisches, Magisches	93	178
5.1 Logisches mit und ohne Zahlen	93	178
Logikaufgaben aus Schule und Freizeit	93	178
Logik und Sport	97	181
Logik und Zeit	99	182
Logisches an ungewöhnlichen Orten	100	182
5.2 Logisches Lückenfüllen	104	185
Einfache Ausfüllrätsel	104	185
Kompliziertere magische Figuren	106	187

1 Zahlen und Rechnen



Ein gutes Verständnis von Zahlen und ihren Eigenschaften sowie das sichere Beherrschen der Grundrechenarten sind wichtig, um Mathematik verstehen und anwenden zu können. Rechenaufgaben begegnen uns überall im Alltag, und wer – auch ohne technische Hilfsmittel – schnell und sicher rechnen kann, dem wird es leichter gelingen, auch schwierigere Probleme anzupacken.

Im ersten Kapitel wollen wir mit vielgestaltigen Aufgaben die Lust am Lösen wecken und zugleich die Rechenfertigkeiten, das Gefühl für Größenordnungen und vieles mehr trainieren. Und weil Aufgaben mit den Jahreszahlen beim Känguru-Wettbewerb fast schon Tradition haben, sind einige recht unterschiedliche auch hier versammelt – und vielleicht eine Anregung für tägliche Übungen.

1.1 Rechenaufgaben bunt gemischt

Rechengeschichten zum Aufwärmen

A 1.1 Amy, Bert, Carl, Doris und Emil würfeln mit 2 Würfeln:



Amy



Bert



Carl



Doris



Emil

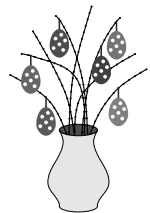
Jedes Kind zählt seine Punkte zusammen. Wer hat die meisten Punkte?

- (A) Amy (B) Bert (C) Carl (D) Doris (E) Emil

A-Ecolier (1), D/CH-3/4 (1) 2016

A 1.2 Max hängt Ostereier an die Zweige in seiner Vase. Die Hälfte der Ostereier hat er schon aufgehängt. Wie viele Ostereier hat Max insgesamt?

- (A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 16



A-Ecolier (2), D/CH-3/4 (2) 2017

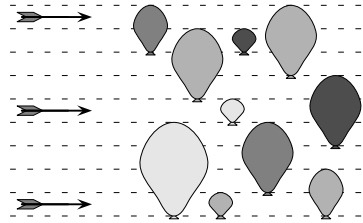
A 1.3 Levi ist 8 Jahre alt. Sein Bruder ist 2 Jahre jünger und seine Schwester ist 2 Jahre älter als Levi. Wie alt sind die drei Geschwister zusammen?

- (A) 16 (B) 21 (C) 24 (D) 27 (E) 36

A-Ecolier (2), D/CH-3/4 (3) 2018

A 1.4 Im Bild sind drei Pfeile zu sehen. Sie fliegen auf zehn Luftballons zu. Trifft ein Pfeil einen Luftballon, so platzt dieser und der Pfeil fliegt in derselben Richtung weiter. Wie viele Luftballons bleiben ganz?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6



A-Ecolier (1), D/CH-3/4 (2) 2018

A 1.5 Jonathan geht mit seinem Großvater in den Zirkus. Sie haben die Plätze 71 und 72. Am Eingang steht ein Wegweiser. Wie müssen sie gehen?

- (A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

	1 bis 20
	21 bis 40
	41 bis 60
	61 bis 80
	81 bis 100

A-Ecolier (5), D/CH-3/4 (5) 2016

A 1.6 Während der Klassenfahrt haben wir in einer Jugendherberge gewohnt. In dem großen Haus gibt es zwei 2-Bett-Zimmer, vier 4-Bett-Zimmer und zwei 10-Bett-Zimmer. Wie viele Personen können dort übernachten?

- (A) 40 (B) 42 (C) 44 (D) 46 (E) 48

D/CH-3/4 (7) 2018

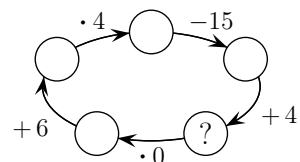
A 1.7 Meine Großeltern haben zwei Sorten Hühner: 5 braune und 5 weiße. In den letzten 10 Tagen hat jedes braune Huhn täglich ein Ei gelegt, jedes weiße aber nur jeden zweiten Tag. Wie viele Eier haben die 10 Hühner in den 10 Tagen insgesamt gelegt?

- (A) 75 (B) 72 (C) 70 (D) 65 (E) 60

A-Benjamin (4), D/CH-5/6 (6) 2015

A 1.8 Welche Zahl muss in den Kreis mit dem Fragezeichen geschrieben werden, damit die Rechnung korrekt ist?

- (A) 0 (B) 10 (C) 12 (D) 13 (E) 15



A-Ecolier (16), D/CH-3/4 (18) 2017

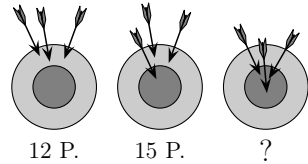
A 1.9 Das Maya-Volk hat Zahlen mit Punkten und Strichen geschrieben. Ein Punkt steht für die Ziffer 1, ein Strich für die Ziffer 5. Rechts steht die Maya-Zahl 8. Wie sieht die Maya-Zahl 12 aus?



- (A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

A-Ecolier (2), D/CH-3/4 (3) 2019

A 1.10 Mit Pfeil und Bogen schießt Skadi auf die Zielscheibe. Bei ihrem ersten Versuch erreicht sie 12 Punkte, beim zweiten Versuch sogar 15 Punkte. Wie viele Punkte sind es beim dritten Versuch?



- (A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22

A-Benjamin (3), D/CH-5/6 (7) 2018

A 1.11 Auf dem Tisch liegt ein Spielwürfel mit 6 Seiten, die wie gewöhnlich mit 1 bis 6 Punkten beschriftet sind. Auf den fünf sichtbaren Seitenflächen sind insgesamt 17 Punkte. Wie viele Punkte sind auf der sechsten Seitenfläche, die auf dem Tisch liegt?

- (A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 (E) 1

D/CH-7/8 (5) 2019

A 1.12 Kalle weiß, dass $111 \cdot 111 = 12321$ ist. Wie viel ist $111 \cdot 222$?

- (A) 34543 (B) 23432 (C) 22222 (D) 24642 (E) 25852

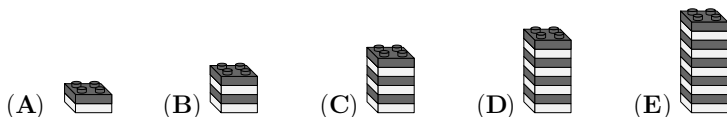
A-Benjamin (4), D/CH-5/6 (3) 2017

A 1.13 Der Zug von Bonn nach Mainz fährt durch Bingen. Insgesamt fährt er ungefähr 1 Stunde und 25 Minuten. Von Bingen nach Mainz braucht er etwa 15 Minuten. Wie lange etwa braucht er von Bonn bis Bingen?

- (A) 55 Minuten (B) 60 Minuten (C) 65 Minuten
(D) 70 Minuten (E) 75 Minuten

A-Kadett (6), D/CH-7/8 (5) 2015

A 1.14 Sofie hat aus 27 Bausteinen einen Turm gebaut. Sie zerlegt den Turm so in zwei Teile, dass ein Teil doppelt so hoch wie das andere ist. Eines der zwei Teile zerlegt sie wieder so in zwei Teile, dass ein Teil doppelt so hoch wie das andere ist. Das wiederholt sie mit einem der beiden Teile noch einmal. Jetzt hat Sofie vier Teile. Welches Teil kann nicht dabei sein?



A-Ecolier (23), D/CH-3/4 (22) 2016

Rechnen mit den Jahreszahlen

A 1.15 Josef hat für jede der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 einen Stempel. Er stempelt das Datum des Känguru-Wettbewerbs: **15 03 2018**. Wie viele seiner Stempel hat Josef benutzt?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

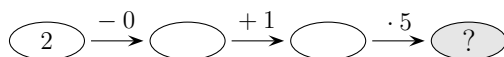
A-Ecolier (4), D/CH-3/4 (1) 2018

A 1.16 Vor Amelie liegen vier Karten mit den Ziffern der Jahreszahl: **2 0 1 7**. Sie vertauscht zwei der Karten. Welche Reihenfolge der vier Karten kann dabei entstehen?

- (A) **0 1 2 7** (B) **2 7 1 0** (C) **0 2 7 1** (D) **7 2 0 1** (E) **7 1 0 2**

A-Benjamin (1), D/CH-5/6 (2) 2017

A 1.17 Was ist das Ergebnis der Rechenaufgabe mit den Ziffern der Jahreszahl?



- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 15

A-Ecolier (1), D/CH-3/4 (1) 2015

A 1.18 $2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 =$

- (A) 25 (B) 30 (C) 56 (D) 205 (E) 2015

D/CH-5/6 (1) 2015

A 1.19 Wie viele natürliche Zahlen liegen zwischen 3,17 und 20,16?

- (A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

A-Kadett (1), D/CH-7/8 (1) 2016

A 1.20 $\frac{2017 + 2018 + 2019}{2018} =$

- (A) 2 (B) 6026 (C) $\frac{6025}{2018}$ (D) 3 (E) 6054

D/CH-9/10 (1) 2018

A 1.21 $\frac{20 - 19 \cdot 20 + 19}{19 - 20 \cdot 19 + 20} =$

- (A) -419 (B) -39 (C) 1 (D) 39 (E) 381

D/CH-9/10 (4) 2019

A 1.22 Wie groß ist die Summe von 25 % von 2018 und 2018 % von 25?

- (A) 1009 (B) 2016 (C) 2018 (D) 3027 (E) 5045

A-Junior (9) 2018

A 1.23 Wie viele natürliche Zahlen sind gleichzeitig größer als $2015 \cdot 2017$ und kleiner als $2016 \cdot 2016$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2015 (D) 2016 (E) 2017

A-Student (4), D/CH-11/13 (7) 2016

A 1.24 Dass unser Mathelehrer und sein Vater am selben Tag Geburtstag haben, wussten wir schon. Er hat ausgerechnet, dass in diesem Jahr das Produkt aus seinem Alter und dem seines Vaters gleich der Jahreszahl 2015 ist. Wie viele Jahre ist unser Mathelehrer jünger als sein Vater?

- (A) 26 Jahre (B) 29 Jahre (C) 31 Jahre
(D) 34 Jahre (E) 36 Jahre

A-Junior (16), D/CH-9/10 (19) 2015

A 1.25 Was ist, von links gelesen, die erste Ziffer der kleinsten positiven ganzen Zahl mit der Ziffernsumme 2019?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

A-Student (7) 2019

A 1.26 $\sqrt{(2015 + 2015) + (2015 - 2015) + (2015 \cdot 2015) + (2015 : 2015)} =$

- (A) $\sqrt{2015}$ (B) 2015 (C) 2016 (D) 2017 (E) 4030

A-Student (9), D/CH-11/13 (12) 2015

A 1.27 Wie oft erscheint der Summand 2018^2 unter der Wurzel, wenn folgende Aussage richtig ist?

$$\sqrt{2018^2 + 2018^2 + \dots + 2018^2} = 2018^{10}$$

- (A) 5 (B) 8 (C) 18 (D) 2018^8 (E) 2018^{18}

A-Junior (18), D/CH-9/10 (18) 2018

Runden und Schätzen

A 1.28 Welche der folgenden Zahlen liegt am nächsten am Ergebnis der Rechnung $510,2 \cdot 2,015$?

- (A) 1 (B) 10 (C) 100 (D) 1000 (E) 10000

A-Kadett (3), D/CH-7/8 (1) 2015

A 1.29 Welche der folgenden Zahlen liegt am nächsten am Ergebnis der Rechnung $20,15 \cdot 51,02$?

- (A) 100 (B) 1000 (C) 10000 (D) 100000 (E) 1000000

A-Junior (1), D/CH-9/10 (1) 2015

A 1.30 Welche der folgenden Zahlen liegt am nächsten am Ergebnis der Rechnung $0,2015 \cdot 0,5012$?

- (A) 0,0001 (B) 0,001 (C) 0,01 (D) 0,1 (E) 1

D/CH-11/13 (1) 2016

A 1.31 Welche der folgenden Zahlen ist am nächsten zu $\frac{17 \cdot 0,3 \cdot 20,16}{999}$?

- (A) 0,01 (B) 0,1 (C) 1 (D) 10 (E) 100

A-Junior (2), D/CH-9/10 (6) 2016

A 1.32 Im 99-Cent-Laden an der Ecke kostet jeder Artikel tatsächlich genau 99 Cent. Welches könnte der Preis für einen etwas größeren Einkauf dort sein?

- (A) 16,92 € (B) 36,90 € (C) 22,44 €
(D) 15,51 € (E) 28,71 €

D/CH-9/10 (5) 2018

A 1.33 Welche der folgenden Zahlen liegt am nächsten am Ergebnis der Rechnung $0,435 : 0,0821$?

- (A) 0,2 (B) 0,5 (C) 5 (D) 20 (E) 50

D/CH-11/13 (5) 2018

A 1.34 Welcher der folgenden Brüche liegt am nächsten bei $\frac{1}{2}$?

- (A) $\frac{29}{57}$ (B) $\frac{25}{79}$ (C) $\frac{57}{92}$ (D) $\frac{27}{59}$ (E) $\frac{52}{97}$

A-Kadett (13), D/CH-7/8 (17) 2016

1.2 Knocheien mit Ziffern

Größte und Kleinste gesucht

A 1.35 Maya vertauscht in der Zahl 512 zwei Ziffern, sodass sie eine möglichst kleine Zahl erhält. Frieder vertauscht in derselben Zahl 512 zwei Ziffern, sodass er eine möglichst große Zahl erhält. Wie groß ist die Differenz aus Frieders und Mayas Zahl?

- (A) 369 (B) 387 (C) 360 (D) 306 (E) 396

D/CH-3/4 (11) 2015

A 1.36 Tag für Tag addiert Axel die vier Zahlen, die im Tagesdatum vorkommen. Zum Beispiel addiert er am 19. März, also dem 19.03., $1 + 9 + 0 + 3 = 13$, und trägt die 13 in seine am Jahresanfang begonnene Tabelle ein. Welches ist die größte Zahl, die am Jahresende in seiner Tabelle stehen wird?

- (A) 13 (B) 15 (C) 18 (D) 20 (E) 22

A-Benjamin (12), D/CH-5/6 (11) 2015

A 1.37 Karim schreibt alle Zahlen von 1 bis 20 hintereinander und erhält die 31-stellige Zahl:

1234567891011121314151617181920

Er streicht 24 Ziffern, sodass die größtmögliche Zahl übrig bleibt. Welche ist das?

- (A) 9781920 (B) 9671819 (C) 9567892
(D) 9912345 (E) 9818192

A-Benjamin (12), D/CH-5/6 (10) 2017

A 1.38 Auf einem Papierstreifen steht die Zahl 2581953764. Marwin schneidet den Streifen so in 3 Teile, dass er dabei die Zahl 2581953764 in 3 Zahlen zerlegt, deren Summe so klein wie möglich ist. Wie groß ist diese Summe?

- (A) 2975 (B) 3775 (C) 4298 (D) 4217 (E) 2878

A-Benjamin (14), D/CH-5/6 (15) 2016