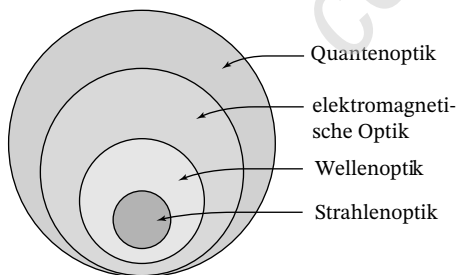


## 1

## Strahlenoptik

Licht kann als elektromagnetische Welle beschrieben werden, die denselben theoretischen Prinzipien folgt wie alle anderen Formen elektromagnetischer Strahlung, beispielsweise Radiowellen oder Röntgenstrahlen. Diese Beschreibung von Licht führt zur sogenannten **elektromagnetischen Optik**. Elektromagnetische Strahlung besteht aus zwei gekoppelten *Vektorwellen* für das elektrische und das magnetische Feld. Viele optische Erscheinungen können aber auch im Rahmen einer vereinfachten *skalaren* Wellentheorie behandelt werden, in der Licht durch eine skalare Wellenfunktion beschrieben wird. Diese genäherte Methode zur Beschreibung von Licht heißt skalare Wellenoptik oder einfach **Wellenoptik**.

Wenn sich Lichtwellen um und durch Objekte bewegen, deren Abmessungen viel größer sind als die Wellenlänge des Lichts, tritt die Wellennatur des Lichts nicht unmittelbar in Erscheinung und sein Verhalten kann durch die Annahme erklärt werden, dass sich einzelne Strahlen nach bestimmten geometrischen Regeln ausbreiten. Dieses Modell wird als **Strahlenoptik** bezeichnet. Mathematisch betrachtet ist die Strahlenoptik der Grenzfall der Wellenoptik für unendlich kleine Wellenlängen.



**Abb. 1.1** Die Quantenoptik beschreibt praktisch alle optischen Erscheinungen. Die elektromagnetische Theorie des Lichts (elektromagnetische Optik) gibt die umfassendste Beschreibung von Licht im Rahmen der klassischen Optik. Die Wellenoptik ist wiederum eine skalare Näherung für die elektromagnetische Optik. Strahlenoptik ist schließlich der Grenzfall der Wellenoptik für sehr kleine Wellenlängen.

Die elektromagnetische Optik umfasst somit die Wellenoptik und diese die Strahlenoptik, wie Abb. 1.1 illustriert. Strahlenoptik und Wellenoptik sind Näherungen; ihre Berechtigung beruht darauf, dass sie in ihrem jeweiligen Gültigkeitsbereich Ergebnisse liefern, die eine gute bis sehr gute Annäherung an die Ergebnisse der exakteren elektromagnetischen Theorie bieten.

Die elektromagnetische Optik gibt die umfassendste Beschreibung des Lichts im Rahmen der **klassischen Optik**; manche optische Erscheinungen sind aber grundsätzlich quantenmechanischer Natur und können nicht klassisch erklärt werden. Zu ihrer Beschreibung ist eine Quantenversion der elektromagnetischen Theorie nötig, die sogenannte **Quantenelektrodynamik**. Soweit nur auf optische Erscheinungen Bezug genommen wird, wird diese Theorie auch als **Quantenoptik** bezeichnet.

Die verschiedenen optischen Theorien entwickelten sich historisch mehr oder weniger sukzessiv in der Reihenfolge Strahlenoptik → Wellenoptik → elektromagnetische Optik → Quantenoptik. Diese Folge ordnet die Theorien gleichzeitig nach steigender Komplexität und Vollkommenheit; ihre Entwicklung wurde nötig, um immer raffiniertere und genauere optische Experimente theoretisch zu erklären. In der Praxis ist die Theorie der Wahl stets die einfachste, die eine bestimmte Erscheinung erklären kann – allerdings ist es nicht immer einfach, *a priori* zu entscheiden, welches Modell dafür das richtige ist. Glücklicherweise hilft Erfahrung hier oft weiter.

Aus pädagogischen Gründen folgen die ersten Kapitel in diesem Buch der angegebenen historischen Entwicklung. Jede Theorie des Lichts startet mit einem Satz von Postulaten (die ohne Beweis angegeben werden), aus denen eine Vielzahl von Ergebnissen entwickelt werden. Die Postulate einer Theorie tauchen in der Theorie der nächsten Ebene jeweils in Spezialfällen wieder auf. In diesem Kapitel beginnen wir mit der Strahlenoptik.

### In diesem Kapitel ...

Strahlenoptik ist die einfachste Theorie des Lichts. Dabei wird Licht durch einzelne Strahlen beschrieben, die sich nach bestimmten geometrischen Regeln durch optische Medien bewegen. Aus diesem Grund wird die Strahlenoptik auch als **geometrische Optik** bezeichnet. Strahlenoptik ist eine Näherung. Obwohl sie die meisten alltäglichen Erscheinungen im Zusammenhang mit Licht gut beschreibt, gibt es auch viele Phänomene, die sie nicht erklären kann (wie die restlichen Kapitel dieses Buches eindrucksvoll belegen).

Die Strahlenoptik beschreibt den *Ort* und die *Richtung* von Lichtstrahlen. Sie ist gerade bei der Beschreibung der *Bildentstehung* nützlich, der Sammlung aller von einem gegebenen Punkt eines Gegenstands ausgehenden Lichtstrahlen durch ein optisches Element und ihre Zusammenführung auf den entsprechenden Punkt eines Bilds. Mithilfe der Strahlenoptik können wir Bedingungen angeben, die erfüllt sein müssen, damit Licht in einem bestimmten Medium wie beispielsweise einer Glasfaser geführt wird. In isotropen Medien zeigen die Lichtstrahlen stets in die Ausbreitungsrichtung der *optischen Energie*. Wir können Strahlenbündel konstruieren, in denen die Dichte der Strahlen proportional zur Energiedichte des Lichts ist. Wenn Licht beispielsweise von einer Punktquelle isotrop ausgestrahlt wird, dann ist die Energie der Lichtstrahlen in einem ausgewählten Kegel proportional zum Raumwinkel dieses Kegels. Lichtstrahlen können auf ihrem Weg durch ein optisches System verfolgt werden, um die optische Energie zu bestimmen, die durch einen gegebenen Querschnitt hindurchtritt.

Dieses Kapitel beginnt mit einem Satz von Postulaten, aus denen wir die einfachen Regeln ableiten werden, die die Ausbreitung von Lichtstrahlen durch optische Medien bestimmen. In Abschnitt 1.2 wenden wir diese Regeln auf einfache optische Elemente wie Spiegel oder ebene und sphärische Grenzflächen zwischen verschiedenen optischen Medien an. Die Ausbreitung von Strahlen in inhomogenen optischen Medien (mit variablem Brechungsindex) wird in Abschnitt 1.3 untersucht. Optische Elemente mit variablem Brechungsindex sind die Grundlage einer ganzen Technologie, die einen wichtigen Zweig der modernen Optik bildet.

Optische Komponenten sind oft entlang einer optischen Achse angeordnet, die mittig durch sie hindurchläuft. Strahlen, die nahe der optischen Achse und nahezu parallel zu ihr verlaufen, bezeichnet

man als **paraxiale Strahlen**. Wenn nur solche Strahlen Berücksichtigung finden, spricht man auch von **paraxialer Optik**. Die Veränderung des Ortes und des Winkels eines paraxialen Strahls auf seinem Weg durch ein optisches System kann mithilfe einer  $2 \times 2$ -Matrixalgebra sehr effizient beschrieben werden. Abschnitt 1.4 ist diesem algebraischen Werkzeug gewidmet, der sogenannten **Matrizenoptik**.

## 1.1 Postulate der Strahlenoptik

- Licht breitet sich in Form von Strahlen aus. Die Strahlen werden von Lichtquellen emittiert und können beobachtet werden, wenn sie einen optischen Detektor erreichen.
- Ein optisches Medium wird durch eine Größe  $n \geq 1$  charakterisiert, den **Brechungsindex**. Für den Brechungsindex gilt  $n = c_0/c$ , wobei  $c_0$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im betrachteten Medium. Die Zeit, die das Licht benötigt, um eine Strecke  $d$  zurückzulegen, ist daher  $d/c = nd/c_0$ . Sie ist proportional zu dem Produkt  $nd$ , das auch als **optische Weglänge** bezeichnet wird.
- In einem inhomogenen Medium ist der Brechungsindex  $n(\mathbf{r})$  eine Funktion des Ortes  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Die optische Weglänge für einen gegebenen Weg zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  ist daher

$$\text{optische Weglänge} = \int_A^B n(\mathbf{r}) ds, \quad (1.1)$$

wenn  $ds$  das differentielle Längenelement entlang des gewählten Weges ist. Die Zeit, die das Licht von  $A$  nach  $B$  benötigt, ist proportional zur optischen Weglänge.

- **Fermatsches Prinzip.** Zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  bewegen sich Lichtstrahlen so, dass die benötigte Zeit (bzw. die optische Weglänge) im Vergleich zu benachbarten Wegen ein Extremum annimmt. Mathematisch heißt das

$$\delta \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0, \quad (1.2)$$

wobei das Symbol  $\delta$  als „Variation von“ zu lesen ist. Das bedeutet, dass die optische Weglänge als Funktion der Streckenführung entweder minimal oder maximal (oder ein Wendepunkt) sein muss. In der Regel entspricht sie einem Minimum, sodass folgende Aussage gilt:

Lichtstrahlen breiten sich entlang des Weges aus, der die kürzeste Zeit in Anspruch nimmt. ■

Manchmal wird diese Bedingung von mehr als einem Weg erfüllt; in diesen Fällen folgen die Lichtstrahlen allen Wegen gleichzeitig. Ein Beispiel für einen Fall, in dem die optische Weglänge maximal ist, ist in Aufgabe 1-1 gezeigt.

In diesem Kapitel nutzen wir die Postulate der Strahlenoptik, um die Regeln zu bestimmen, die für die Ausbreitung von Lichtstrahlen, ihre Reflexion oder Brechung an der Grenzfläche verschiedener Medien und ihre Transmission durch optische Komponenten gelten. Auf dieser Grundlage können wir ohne weitere Annahmen über die Natur des Lichts viele Ergebnisse für zahlreiche optische Systeme ableiten.

### 1.1.1 Ausbreitung in einem homogenen Medium

In einem homogenen Medium ist der Brechungsindex überall gleich, und folglich gilt dasselbe für die Lichtgeschwindigkeit. Der von Fermats Prinzip geforderte Weg der kürzesten Zeit ist folglich gleich der kleinsten optischen Weglänge. Fermats Prinzip reduziert sich in diesem Fall auf das seit dem Altertum bekannte **Prinzip von Hero**: Lichtstrahlen bewegen sich entlang des kürzesten Weges. Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist eine Gerade; also folgt: *Lichtstrahlen breiten sich in einem homogenen Medium geradlinig aus* (Abb. 1.2).

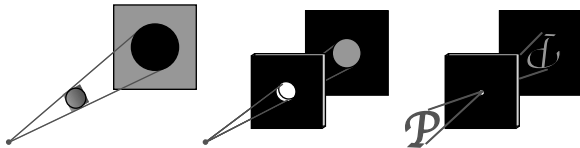


Abb. 1.2 Geradlinige Ausbreitung von Lichtstrahlen. Schatten sind ideale Projektionen von Hindernissen.

#### Reflexion an einem Spiegel

Spiegel werden meist aus sorgfältig polierten metallischen Oberflächen oder dielektrischen Schichten auf einer Unterlage wie z. B. Glas hergestellt. Licht wird an Spiegeln gemäß dem Reflexionsgesetz reflektiert:

*Der reflektierte Strahl liegt in der Einfallsebene; der Ausfallswinkel ist gleich dem Einfallswinkel.* ■

Die Einfallsebene wird durch den einfallenden Lichtstrahl und die Flächennormale des Spiegels am Einfallspunkt festgelegt. Der Einfallswinkel  $\theta$  und der Ausfallswinkel  $\theta'$  sind in Abb. 1.3(a) definiert. Das Reflexionsgesetz lässt sich leicht aus dem Prinzip von Hero herleiten. Dazu betrachten wir einen Strahl, der sich nach Refle-

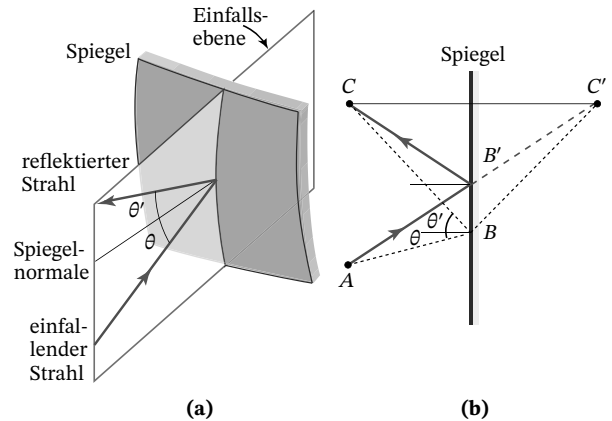


Abb. 1.3 (a) Reflexion an der Oberfläche eines gekrümmten Spiegels. (b) Geometrische Konstruktion zum Beweis des Reflexionsgesetzes.

xion an dem ebenen Spiegel in Abb. 1.3(b) von Punkt A nach Punkt C ausbreitet. Nach dem Prinzip von Hero muss die Strecke  $\overline{AB} + \overline{BC}$  für einen unendlich dünnen Spiegel minimal sein. Wenn  $C'$  ein Spiegelbild von C ist, gilt  $\overline{BC} = \overline{BC'}$ , sodass  $\overline{AB} + \overline{BC'}$  minimal sein muss. Das ist genau dann der Fall, wenn  $\overline{ABC'}$  eine gerade Linie ist, wenn also B mit  $B'$  zusammenfällt und  $\theta = \theta'$  ist.

#### Reflexion und Brechung an Grenzflächen

An der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  wird ein einfallender Lichtstrahl in zwei Strahlen aufgespalten, einen reflektierten und einen gebrochenen (oder transmittierten) Strahl (Abb. 1.4). Für den reflektierten Strahl gilt das Reflexionsgesetz; der gebrochene Strahl gehorcht entsprechend dem Brechungsgesetz:

*Der gebrochene Strahl liegt in der Einfallsebene; der Beugungswinkel  $\theta_2$  hängt mit dem Einfallswinkel  $\theta_1$  gemäß dem Snelliusschen Gesetz zusammen,*

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 . \quad (1.3)$$

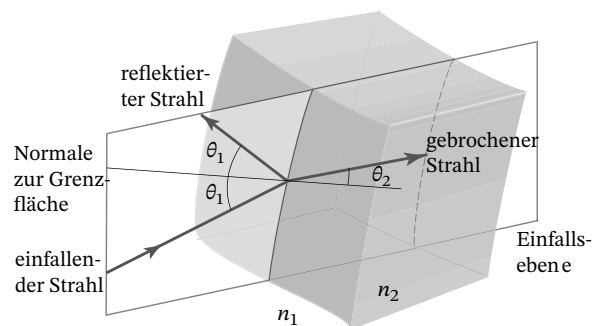


Abb. 1.4 Reflexion und Brechung an der Grenzfläche zwischen zwei Medien.

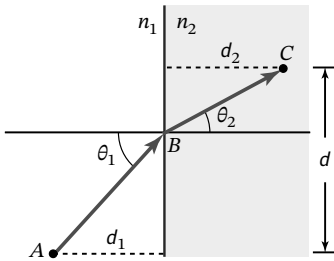


Abb. 1.5 Konstruktion zum Beweis des snelliusschen Gesetzes.

Die Strahlenoptik macht keine Aussage darüber, welche Anteile eines Strahls reflektiert bzw. gebrochen werden.

### Übung 1-1: Das snelliussche Gesetz

Der Beweis des snelliusschen Gesetzes ist eine gute Übung für die Anwendung von Fermats Prinzip. Wir müssen den optischen Lichtweg  $n_1 \overline{AB} + n_2 \overline{BC}$  zwischen den Punkten  $A$  und  $C$  in Abb. 1.5 minimieren. Dazu müssen wir  $n_1 d_1 \sec \theta_1 + n_2 d_2 \sec \theta_2$  als Funktion der Winkel  $\theta_1$  und  $\theta_2$  unter der Nebenbedingung  $d_1 \tan \theta_1 + d_2 \tan \theta_2 = d$  minimieren. Zeigen Sie, dass die Lösung dieser Minimierung unter der angegebenen Randbedingung zum snelliusschen Gesetz führt.

Die drei einfachen besprochenen Regeln – geradlinige Ausbreitung, Reflexionsgesetz und Brechungsgesetz – werden wir in Abschnitt 1.2 auf verschiedene Anordnungen von Spiegeln und transparenten optischen Komponenten anwenden, ohne nochmals auf Fermats Prinzip zurückgreifen zu müssen.

## 1.2 Einfache optische Komponenten

### 1.2.1 Spiegel

#### Ebene Spiegel

Ein ebener Spiegel reflektiert die von einem Punkt  $P_1$  ausgehenden Strahlen so, dass die reflektierten Strahlen von einem Punkt  $P_2$  hinter dem Spiegel auszugehen scheinen, der als Bildpunkt bezeichnet wird (Abb. 1.6).

#### Parabolspiegel

Die Oberfläche eines Parabolspiegels ist ein reflektierendes Rotationsparaboloid. Sie hat die nützliche Eigenschaft, dass sie alle parallel zu ihrer Achse einfallenden Strahlen in einem einzigen Punkt bündelt, dem **Brennpunkt**. Die in Abb. 1.7 definierte Entfernung  $\overline{PF} = f$  heißt **Brennweite**. Parabolspiegel werden häufig als Sammelelemente in Teleskopen verwendet. Sie wandeln außerdem die Lichtstrahlen einer in ihrem Brennpunkt positionierten Punktquelle wie beispielsweise einem Ta-

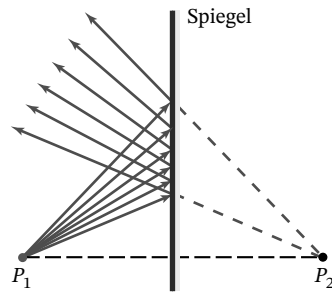


Abb. 1.6 Reflexion an einem ebenen Spiegel.

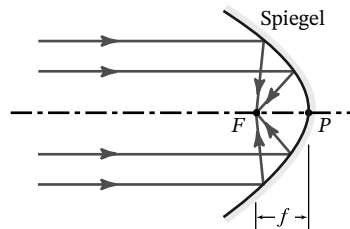


Abb. 1.7 Fokussierung von Lichtstrahlen an einem Parabolspiegel.

schlampenbirnchen in ein paralleles Strahlenbündel um. Wenn ein Parabolspiegel auf diese Weise eingesetzt wird, bezeichnet man ihn auch als **Kollimator**.

#### Elliptische Spiegel

Ein elliptischer Spiegel reflektiert alle von einem seiner beiden Brennpunkte (z. B.  $P_1$ ) ausgehenden Strahlen in den anderen Brennpunkt  $P_2$  (Abb. 1.8). Entsprechend dem Prinzip von Hero sind die von den Strahlen zwischen  $P_1$  und  $P_2$  zurückgelegten Wege alle gleich lang.

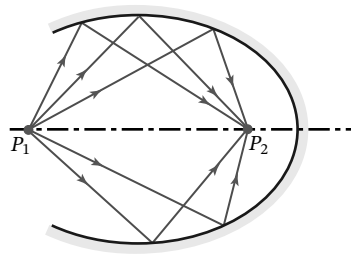
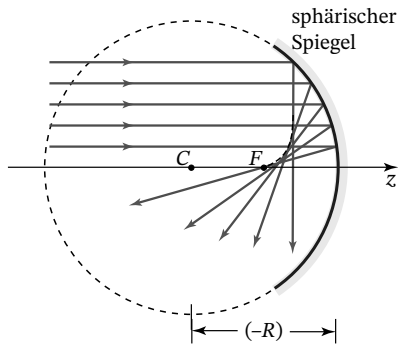


Abb. 1.8 Reflexion an einem elliptischen Spiegel.

#### Sphärische Spiegel

Sphärische Spiegel (Kugelspiegel) sind leichter herzustellen als parabolische oder elliptische. Allerdings besitzen sie weder die fokussierenden Eigenschaften von Parabolspiegeln noch die Abbildungseigenschaften elliptischer Spiegel. Wie Abb. 1.9 zeigt, treffen parallele Strahlen an unterschiedlichen Punkten auf die Spiegelachse; ihre Einhüllende (die gepunktete Kurve) wird *kaustische Fläche* genannt. Immerhin werden paraxiale Strahlen annähernd auf einen Punkt  $F$  in einer Ent-



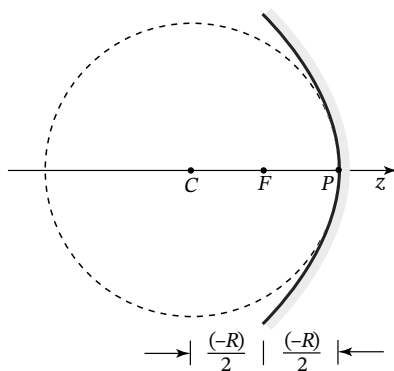
**Abb. 1.9** Reflexion von parallelen Strahlen an einem konkaven Kugelspiegel.

fernung  $(-R)/2$  vom Zentrum  $C$  des Spiegels abgebildet. Per Konvention wird der **Krümmungsradius**  $R$  für Konkavspiegel negativ und für Konvexspiegel positiv gezählt.

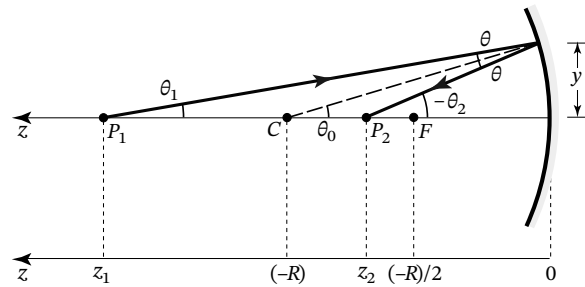
#### Reflexion von paraxialen Strahlen an Kugelspiegeln

Strahlen, die nahe der Spiegelachse und in einem kleinen Winkel zu ihr verlaufen (sodass  $\sin \theta \approx \theta$  gesetzt werden kann), heißen **paraxiale Strahlen**. In der **paraxialen Näherung** werden nur paraxiale Strahlen berücksichtigt; in diesem Fall fokussieren sphärische Spiegel wie Parabolspiegel und besitzen Abbildungseigenschaften wie elliptische Spiegel. Der aus dieser Näherung entstehende Satz von Regeln wird als **paraxiale Optik** bezeichnet, manchmal auch als **Optik erster Ordnung** oder **gaußsche Optik**.

Ein sphärischer Spiegel mit Radius  $R$  verhält sich in dieser Näherung wie ein Parabolspiegel mit der Brennweite  $f = R/2$ . Das ist nicht weiter überraschend, da eine Parabel in der Nähe der Achse durch einen Kreis angenähert werden kann, dessen Radius gleich dem Krümmungsradius der Parabel ist (Abb. 1.10).



**Abb. 1.10** Für paraxiale Strahlen entspricht ein Kugelspiegel einem Parabolspiegel.



**Abb. 1.11** Reflexion paraxialer Strahlen an einem konkaven Kugelspiegel mit Radius  $R < 0$ .

Alle von einem gegebenen Punkt auf der Achse eines sphärischen Spiegels ausgehenden paraxialen Strahlen werden auf einen einzigen Bildpunkt auf der Achse reflektiert. Um das zu verstehen, betrachten wir einen Strahl, der in einem Winkel  $\theta_1$  zur Achse von einem Punkt  $P_1$  in einer Entfernung  $z_1$  von einem Konkavspiegel mit Radius  $R$  ausgeht (Abb. 1.11). Er wird in einem Winkel  $-\theta_2$  reflektiert und trifft an einem Punkt  $P_2$  in einer Entfernung  $z_2$  vom Spiegel auf die Achse. Der Winkel  $\theta_2$  ist negativ, da der Strahl nach unten gerichtet ist. Da sich die Winkel in einem Dreieck zu  $180^\circ$  addieren, gilt  $\theta_1 = \theta_0 - \theta$  und  $-\theta_2 = \theta_0 + \theta$  und daher  $-\theta_2 + \theta_1 = 2\theta_0$ . Wenn  $\theta_0$  hinreichend klein ist, können wir die Näherung  $\tan \theta_0 \approx \theta_0$  verwenden, sodass  $\theta_0 \approx y/(-R)$  ist und wir

$$-\theta_2 + \theta_1 \approx \frac{2y}{-R} \quad (1.4)$$

erhalten, wobei  $y$  die Höhe des Punktes ist, an dem die Reflexion stattfindet. Da der Spiegel konkav ist, ist  $R$  negativ. Wenn sowohl  $\theta_1$  als auch  $\theta_2$  klein sind, ist  $\theta_1 \approx y/z_1$  und  $-\theta_2 = y/z_2$ , sodass wir aus Gl. (1.4)  $y/z_1 + y/z_2 \approx 2y/(-R)$  erhalten; daraus folgt

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \approx \frac{2}{-R}. \quad (1.5)$$

Diese Beziehung gilt für beliebige  $y$  (d. h. unabhängig von  $\theta_1$ ), so lange die paraxiale Näherung gilt. Mit anderen Worten, alle Strahlen, die von  $P_1$  ausgehen, treffen sich in  $P_2$ . Die Entfernungen  $z_1$  und  $z_2$  werden in einem Koordinatensystem gemessen, dessen  $z$ -Achse nach links zeigt. Alle Punkte mit negativen Werten von  $z$  liegen daher rechts des Spiegels.

Nach Gl. (1.5) werden Strahlen, die von einem weit entfernt auf der  $z$ -Achse liegenden Punkt ausgehen ( $z_1 = \infty$ ), auf einen Punkt  $F$  in einer Entfernung  $z_2 = (-R)/2$  abgebildet. Das bedeutet, dass alle aus dem Unendlichen (parallel zur Spiegelachse) einfallenden Strahlen in der paraxialen Näherung in einem Punkt in einer Entfernung  $f$  vom Spiegel gebündelt werden, der

Brennweite des Spiegels:

$$f = \frac{-R}{2}, \quad (1.6)$$

Meist wird Gl. (1.5) in der Form

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f}, \quad (1.7)$$

geschrieben, die als **Abbildungsgleichung** bezeichnet wird. Sie gilt nur, wenn sowohl der einfallende als auch der reflektierte Strahl paraxial sind.

**Übung 1-2: Bildentstehung an einem Kugelspiegel**

Zeigen Sie, dass von einem Punkt  $P_1 = (y_1, z_1)$  ausgehende Strahlen im Rahmen der paraxialen Näherung auf einen Punkt  $P_2 = (y_2, z_2)$  reflektiert werden, wobei  $z_1$  und  $z_2$  die Gl. (1.7) erfüllen und  $y_2 = -y_1 z_2 / z_1$  ist (Abb. 1.12). Das bedeutet, dass Strahlen von allen Punkten der Ebene  $z = z_1$  sich in einem einzigen Bildpunkt in der Ebene  $z = z_2$  treffen, sodass der Spiegel als abbildendes System mit der Vergrößerung  $-z_2 / z_1$  wirkt. Eine negative Vergrößerung bedeutet, dass das Bild invertiert wird.

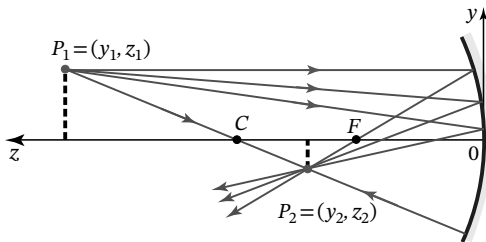


Abb. 1.12 Bildentstehung an einem Kugelspiegel; vier ausgewählte Strahlen sind gezeigt.

**1.2.2 Ebene Grenzflächen**

Das snelliussche Gesetz Gl. (1.3) beschreibt die Beziehung zwischen dem Einfallswinkel  $\theta_1$  und dem Brechungswinkel  $\theta_2$  an einer ebenen Grenzfläche zwischen

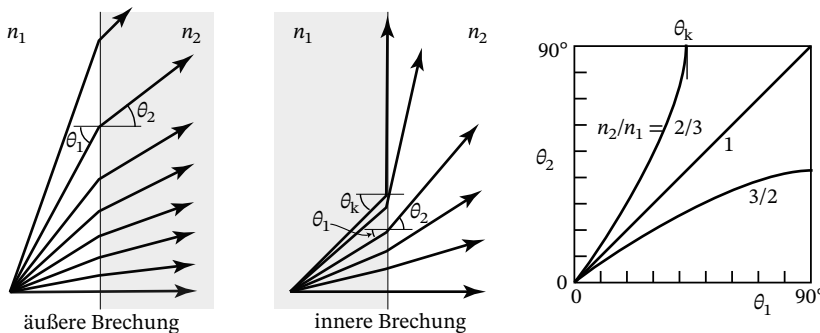


Abb. 1.13 Die Beziehung zwischen Einfalls- und Brechungswinkel.

zwei Medien mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$ . In Abb. 1.13 ist diese Beziehung für zwei Fälle aufgetragen:

- 1) *Äußere Brechung* ( $n_1 < n_2$ ): Wenn der Lichtstrahl aus dem Medium mit dem kleineren Brechungsindex kommt, ist  $\theta_2 < \theta_1$  und der gebrochene Strahl wird von der Grenzfläche weg gebrochen.
- 2) *Innere Brechung* ( $n_1 > n_2$ ): Wenn der Lichtstrahl aus dem Medium mit dem größeren Brechungsindex kommt, ist  $\theta_2 > \theta_1$  und der gebrochene Strahl wird in Richtung der Grenzfläche gebrochen.

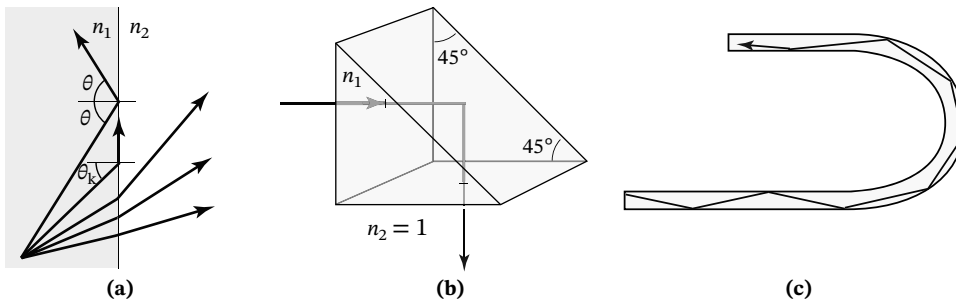
In beiden Fällen wird der Lichtstrahl so gebrochen, dass die optische Weglänge minimiert, d. h. die Wegstrecke im optisch dünneren Medium zulasten der Wegstrecke im optisch dichteren Medium vergrößert wird. In beiden Fällen ist die Beziehung zwischen  $\theta_2$  und  $\theta_1$  für kleine Winkel (also paraxiale Strahlen) näherungsweise linear,  $n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2$  oder  $\theta_2 \approx (n_1 / n_2) \theta_1$ .

**Totalreflexion**

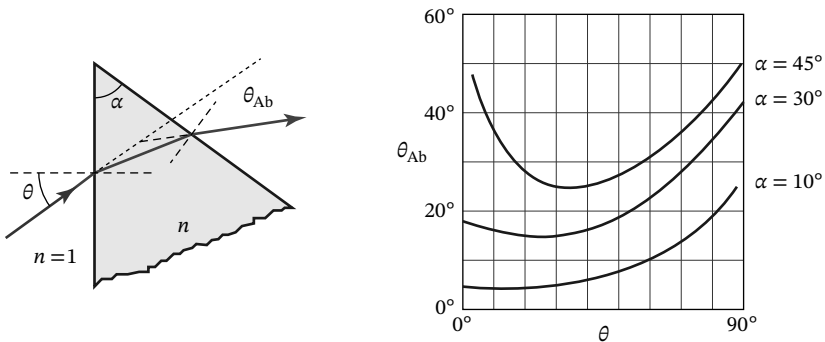
Bei der inneren Brechung ( $n_1 > n_2$ ) ist der Brechungswinkel größer als der Einfallswinkel ( $\theta_2 > \theta_1$ ), sodass mit steigendem  $\theta_1$  irgendwann  $\theta_2 = 90^\circ$  wird (siehe Abb. 1.13). Diese Situation tritt für  $\theta_1 = \theta_k$  (**kritischer Winkel** oder **Grenzwinkel**) ein, wobei  $n_1 \sin \theta_k = n_2 \sin(\pi/2) = n_2$  ist, sodass

$$\theta_k = \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1}. \quad (1.8)$$

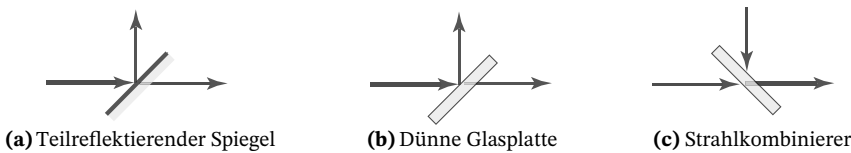
Für  $\theta_1 > \theta_k$  kann das snelliussche Gesetz Gl. (1.3) nicht erfüllt werden und es tritt keine Brechung ein. Der einfallende Strahl wird nun vollständig reflektiert, als ob die Grenzfläche ein idealer Spiegel sei [Abb. 1.14(a)]. Diese sogenannte **Totalreflexion** ist die Grundlage vieler optischer Elemente und Systeme wie beispielsweise reflektierender Prismen [siehe Abb. 1.14(b)], LED-Kollimatoren oder optischer Fasern (siehe Abschnitt 1.2.4). Mithilfe der elektromagnetischen Optik (Fresnelsche Gleichungen in Kapitel 6) kann gezeigt werden, dass der reflektierte Strahl auch die gesamte Energie enthält; die Totalreflexion ist somit ein äußerst effizienter Prozess.



**Abb. 1.14** (a) Totalreflexion an einer ebenen Grenzfläche. (b) Ein reflektierendes Prisma. Für  $n_1 > \sqrt{2}$  und  $n_2 = 1$  (Luft) ist  $\theta_k < 45^\circ$ ; wegen  $\theta_1 = 45^\circ$  wird der Strahl dann vollständig reflektiert. (c) Lichtstrahlen werden durch Totalreflexion an den inneren Grenzflächen eines Lichtleiters geführt.



**Abb. 1.15** Ablenkung eines Lichtstrahls an einem Prisma. Der Ablenkungswinkel  $\theta_{Ab}$  ist für einen gegebenen Öffnungswinkel  $\alpha$  des Prismas und  $n = 1.5$  eine Funktion des Einfallswinkels  $\theta$ . Wenn  $\alpha$  und  $\theta$  klein sind, gilt  $\theta_{Ab} \approx (n - 1)\alpha$ ; die Ablenkung ist dann in erster Näherung unabhängig von  $\theta$  wie in der Kurve für  $\alpha = 10^\circ$  zu erkennen. Für  $\alpha = 45^\circ$  und  $\theta = 0^\circ$  tritt Totalreflexion ein, wie in Abb. 1.14(b) gezeigt.



**Abb. 1.16** Strahlteiler und -kombinierer.

**Prismen**

Ein Prisma mit einem Öffnungswinkel  $\alpha$  und dem Brechungsindex  $n$  (Abb. 1.15) lenkt einen in einem Winkel  $\theta$  einfallenden Strahl um einen Winkel

$$\theta_{Ab} = \theta - \alpha + \sin^{-1} \left[ \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \sin \alpha - \sin \theta \cos \alpha \right] \quad (1.9)$$

ab. Um diese Beziehung herzuleiten, muss das Snelliussche Gesetz auf jede der beiden brechenden Oberflächen des Prismas angewendet werden. Wenn  $\alpha$  sehr klein ist (dünnes Prisma) und  $\theta$  ebenfalls (paraxiale Näherung), können wir Gl. (1.9) näherungsweise als

$$\theta_{Ab} \approx (n - 1)\alpha \quad (1.10)$$

schreiben.

**Strahlteiler**

Ein Strahlteiler ist ein optisches Element, das den einfallenden Strahl in einen reflektierten und einen transmittierten Strahl aufspaltet (Abb. 1.16). Die relativen Anteile des transmittierten bzw. reflektierten Lichts werden im Rahmen der elektromagnetischen Optik (Kapitel 6)

durch die Fresnelschen Gleichungen bestimmt. Oft werden Strahlteiler auch eingesetzt, um zwei Lichtstrahlen zu einem einzigen zu kombinieren [Abb. 1.16(c)]. Sie bestehen häufig aus einer dünnen, teildurchlässigen metallischen oder dielektrischen Schicht auf einem Glassubstrat. Auch eine dünne Glasplatte wie z. B. der Objektträger eines Mikroskops kann als Strahlteiler wirken, obwohl hier der Anteil des reflektierten Lichts in der Regel klein ist. In der Praxis werden oft transparente Kunststoffe anstelle von Glas eingesetzt.

**Strahlformer**

Mithilfe von einfachen optischen Komponenten können Strahlen in bestimmte Richtungen gelenkt oder in eine bestimmte Form gebracht werden. Die in Abb. 1.17 dargestellten Bauteile lenken einfallende Strahlen um definierte Winkel ab. Das in Abb. 1.17(a) dargestellte **Biprisma** entspricht einer Kombination eines Prismas mit einem identischen, aber umgedrehten Prisma. Das in Abb. 1.17(b) gezeigte **Fresnel-Biprisma** besteht aus Reihen nebeneinander angeordneter kleiner Prismen. Es entspricht in der Wirkung einem Biprisma, ist jedoch dünner und leichter. Die in Abb. 1.17(c) dargestellte ke-

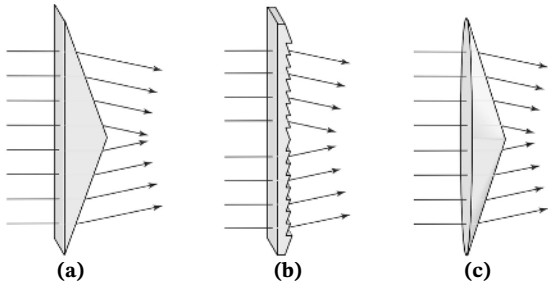


Abb. 1.17 (a) Biprisma. (b) Fresnel-Biprisma. (c) Plankonvexes Axicon.

gelförmige Optik ist unter der Bezeichnung **Axicon** bekannt. Sie wandelt einfallende Strahlen in eine zylindersymmetrische Anordnung von Strahlen um, die kegelförmig auf die zentrale Achse zulaufen. Genau wie das Biprisma hat es einen Querschnitt in Form eines gleichschenkligen Dreiecks.

### 1.2.3 Sphärische Grenzflächen und Linsen

Wir untersuchen nun die Brechung von Lichtstrahlen an einer sphärischen Grenzfläche mit dem Radius  $R$  zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$ . Per Konvention wird  $R$  für konvexe Grenzflächen positiv und für konkave Grenzflächen negativ gezählt. Wir verwenden dazu das Snelliussche Gesetz für den Zusammenhang zwischen dem Einfallswinkel und dem Brechungswinkel relativ zur Oberflächennormalen, die durch den Radiusvektor  $\mathcal{C}$  vom Zentrum der Fläche gegeben ist. Die Winkel bezüglich der Normalen müssen von den Winkeln  $\theta_1$  und  $\theta_2$  bezüglich der  $z$ -Achse unterschieden werden. Wenn wir nur paraxiale Strahlen betrachten, deren Winkel zur optischen Achse des Systems klein

sind, sodass  $\sin \theta \approx \theta$  und  $\tan \theta \approx \theta$  gilt, können wir die folgenden Eigenschaften herleiten:

- Ein in einem Winkel  $\theta_1$  zur  $z$ -Achse verlaufender Strahl, der die Grenzfläche an einem Punkt in der Höhe  $y$  trifft und dort einen Winkel  $\theta_0$  mit der Oberflächennormalen einschließt [siehe Abb. 1.18(a)], ändert an der Oberfläche seine Richtung, sodass der reflektierte Strahl in einem Winkel  $\theta_2$  zur  $z$ -Achse bzw.  $\theta_3$  zur Oberflächennormalen verläuft. Mithilfe von Übung 1-3 erhalten wir

$$\theta_2 \approx \frac{n_1}{n_2} \theta_1 - \frac{n_2 - n_1}{n_2} \frac{y}{R}. \quad (1.11)$$

- Alle von einem Punkt  $P_1 = (y_1, z_1)$  in der Ebene  $z = z_1$  ausgehenden paraxialen Strahlen treffen sich in einem Punkt  $P_2 = (y_2, z_2)$  in der Ebene  $z = z_2$  (siehe Übung 1-3); es gilt

$$\frac{n_1}{z_1} + \frac{n_2}{z_2} \approx \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (1.12)$$

und

$$y_2 = -\frac{n_1 z_2}{n_2 z_1} y_1. \quad (1.13)$$

Die Ebenen  $z = z_1$  und  $z = z_2$  heißen *konjugierte Ebenen*. Zu jedem Punkt in der ersten Ebene existiert ein entsprechender Punkt (Bildpunkt) in der zweiten Ebene; die Vergrößerung beträgt  $-(n_1/n_2)(z_2/z_1)$ . Eine negative Vergrößerung bedeutet wieder, dass das Bild invertiert ist. Per Konvention wird  $P_1$  in einem nach links zeigenden und  $P_2$  in einem nach rechts zeigenden Koordinatensystem gemessen (d. h. wenn  $P_2$  links der Grenzfläche liegt, ist  $z_2$  negativ).

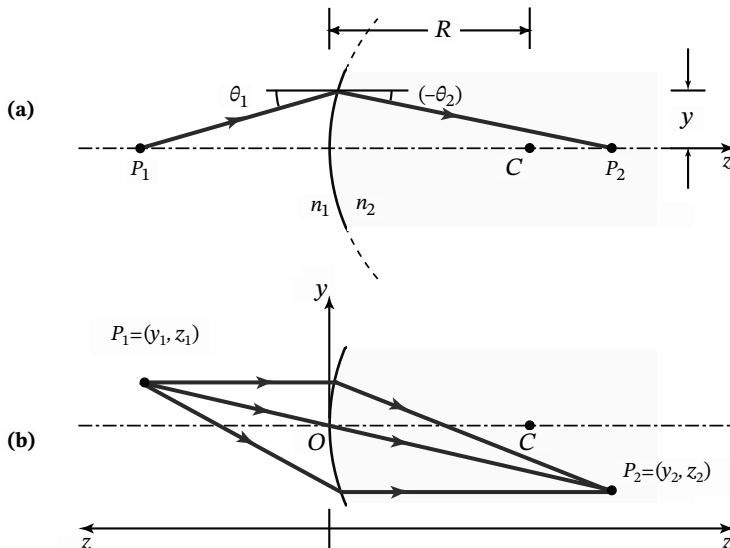


Abb. 1.18 Brechung an einer konvexen sphärischen Grenzfläche ( $R > 0$ ).

Die Ähnlichkeiten zwischen diesen Eigenschaften und denen eines sphärischen Spiegels sind offensichtlich. Allerdings gelten die beschriebenen Abbildungseigenschaften nur näherungsweise – nämlich nur für paraxiale Strahlen. Strahlen, die in einem größeren Winkel zur optischen Achse verlaufen, befolgen diese Regeln nicht; die Abweichungen führen zu Bildfehlern, die unter dem Begriff **Aberration** zusammengefasst werden.

### Übung 1-3: Bildentstehung

Leiten Sie Gl. (1.11) her. Zeigen Sie, dass paraxiale Strahlen, die von einem Punkt  $P_1$  ausgehen, durch  $P_2$  verlaufen, wenn die Gln. (1.12) und (1.13) erfüllt sind.

### Übung 1-4: Aberrationsfreie abbildende Oberfläche

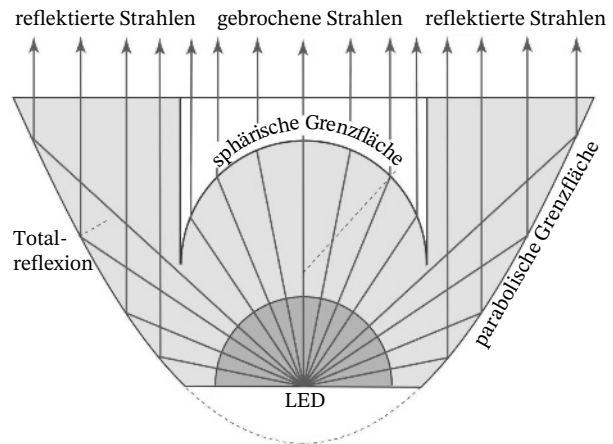
Bestimmen Sie die Gleichung einer konvexen asphärischen (nicht sphärischen) Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  mit der Eigenschaft, dass alle von einem Punkt  $P_1$  auf der optischen Achse in einer Entfernung  $z_1$  links der Grenzfläche ausgehenden (nicht unbedingt paraxialen) Strahlen auf einen Punkt  $P_2$  auf der optischen Achse in einer Entfernung  $z_2$  rechts der Grenzfläche abgebildet werden [Abb. 1.18(a)]. *Hinweis:* Nach dem fermatschen Prinzip müssen die optischen Weglängen zwischen den beiden Punkten für alle Wege identisch sein.

### Beispiel 1-1: Kollimator für LED-Licht

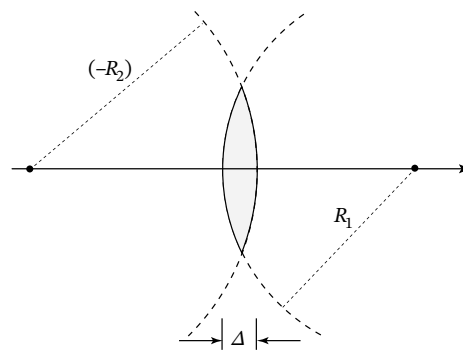
Das von einer LED emittierte Licht (Abschnitt 18.1) wird häufig mithilfe eines optischen Elements kollimiert, dessen Oberfläche die Form eines Rotationsparaboloids hat (Abb. 1.19). Die LED wird dabei im Brennpunkt des Paraboloids platziert, indem ihre halbkugelförmige Kuppel (dunkleres Grau) vom unteren Ende her in eine Aussparung des Kunststoff-Paraboloids eingeführt wird. Strahlen, die durch die Seiten der LED-Kuppel austreten, treffen unter Einfallswinkeln größer als der kritische Winkel auf das Paraboloid und werden daher durch Totalreflexion aus dem Kollimator reflektiert. Strahlen, die durch den zentralen Teil der LED-Kuppel austreten, werden an der sphärischen Oberfläche gebrochen. Optische Systeme, die Reflexion und Brechung kombinieren, werden allgemein als **katadioptrische Systeme** bezeichnet.

### Sphärische Linsen

Eine **sphärische Linse** wird durch zwei sphärische Oberflächen begrenzt. Sie ist folglich durch die Angabe der beiden Radien  $R_1$  und  $R_2$  der Oberflächen, ihrer Dicke  $\Delta$  und ihres Brechungsindex  $n$  vollständig be-



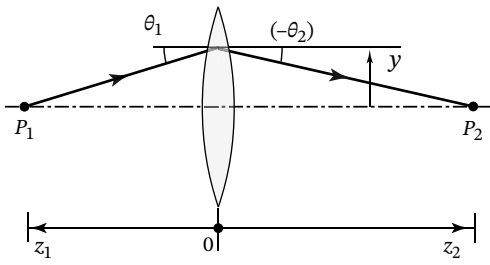
**Abb. 1.19** Querschnitt eines LED-Kollimators. LED-Kollimatoren sind in vielen Ausführungen erhältlich, die in der Regel eine Kombination von Totalreflexion und Brechung ausnutzen, um an ihrem Ausgang annähernd parallele Lichtstrahlen zu erzeugen. Sie werden häufig aus formgepresstem Acrylat oder Polycarbonat hergestellt, die ähnliche Brechungsindizes wie Glas ( $n \approx 1.5$ ) besitzen. Das dargestellte Element hat an seinem unteren Ende einen Durchmesser von  $\approx 1$  cm.



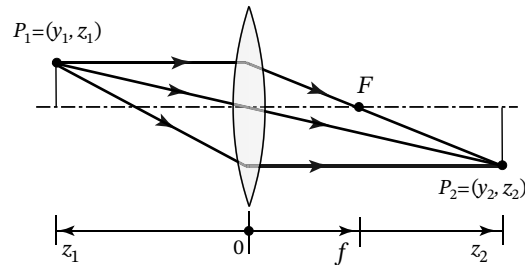
**Abb. 1.20** Eine bikonvexe sphärische Linse.

schrieben (Abb. 1.20). Eine gläserne Linse in Luft kann als Kombination zweier sphärischer Grenzflächen Luft/Glas und Glas/Luft betrachtet werden.

Ein Strahl, der die erste Grenzfläche in einer Höhe  $y$  und in einem Winkel  $\theta_1$  zur  $z$ -Achse trifft [Abb. 1.21(a)], wird dort gemäß Gl. (1.11) in einem Winkel  $\theta$  gebrochen. Den gebrochenen Strahl können wir verlängern, bis er auf die zweite Oberfläche trifft. Dort verwenden wir wieder Gl. (1.11), wobei wir für  $\theta_1$  nun  $\theta$  einsetzen, um den Winkel  $\theta_2$  des Strahls nach der Brechung an der zweiten Oberfläche zu erhalten. Das Ergebnis ist im Allgemeinen kompliziert. Wenn die Linse aber hinreichend dünn ist, können wir annehmen, dass der Strahl die Linse in ungefähr derselben Höhe  $y$  verlässt, in der er eingetreten war. Mit dieser Annahme erhalten wir:



(a)



(b)

**Abb. 1.21**  
(a) Strahlenverlauf in einer dünnen Linse.  
(b) Bildentstehung in einer dünnen Linse.

- Die Winkel des einfallenden und des gebrochenen Strahls hängen gemäß

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{y}{f} \quad (1.14)$$

zusammen, wobei die **Brennweite**  $f$  durch

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.15)$$

gegeben ist.

- Alle von einem Punkt  $P_1 = (y_1, z_1)$  ausgehenden Strahlen treffen sich in einem Punkt  $P_2 = (y_2, z_2)$  [Abb. 1.21(b) und Übung 1-5] mit

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f} \quad (1.16)$$

und

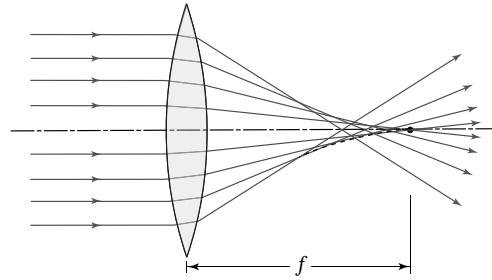
$$y_2 = -\frac{z_2}{z_1} y_1. \quad (1.17)$$

Diese Ergebnisse sind identisch mit denen für einen sphärischen Spiegel [siehe Gl. (1.7) und Übung 1-2].

Die Gleichungen zeigen, dass jeder Punkt in der Ebene  $z = z_1$  auf einen entsprechenden Punkt in der Ebene  $z = z_2$  abgebildet wird; die Vergrößerung ist  $-z_2/z_1$ . Für  $z_1 = z_2 = 2f$  ist die Vergrößerung gleich eins. Die Brennweite  $f$  einer Linse beschreibt daher ihre Wirkung auf paraxiale Strahlen vollständig. Wie bereits zuvor erwähnt, werden  $P_1$  und  $P_2$  in nach links bzw. rechts zeigenden Koordinatensystemen gemessen, und die Krümmungsradien  $R_1$  und  $R_2$  sind für konvexe Oberflächen positiv und für konkave Oberflächen negativ. Für die in Abb. 1.20 gezeigt bikonvexe Linse ist  $R_1$  positiv und  $R_2$  negativ, sodass die beiden Terme in Gl. (1.15) sich addieren und zu einem positiven  $f$  führen.

#### Übung 1-5: Die Gleichungen für dünne Linsen

Gehen Sie von Gl. (1.11) aus und verwenden Sie die Definition der Brennweite aus Gl. (1.15), um die Gln. (1.14) und (1.16) zu beweisen.



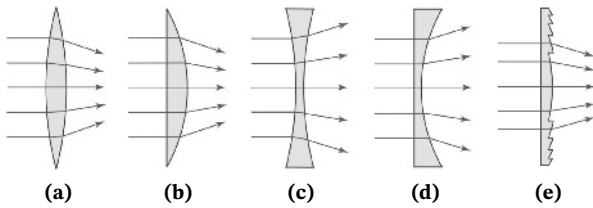
**Abb. 1.22** Nicht paraxiale Strahlen treffen sich nicht im paraxialen Brennpunkt. Die gepunktete Einhüllende der gebrochenen Strahlen wird als kaustische Linie bezeichnet.

Es muss noch einmal betont werden, dass die hier diskutierten Beziehungen nur für paraxiale Strahlen gelten. Nicht paraxiale Strahlen führen zu Aberrationen wie in Abb. 1.22 gezeigt.

#### Konvexe und konkave Linsen

Linsen sind transparente optische Elemente, die Lichtstrahlen je nach der Form ihrer Oberflächen auf definierte Weise brechen. Die gebräuchlichsten Linsen sind wie die zuvor betrachtete bikonvexe Linse sphärische Linsen. Linsen aus einem einzigen Material (im Sichtbaren meist Glas oder Kunststoff) werden als einfache Linsen bezeichnet; Linsen, die aus mehreren solchen einfachen Linsen bestehen, die dabei üblicherweise entlang einer gemeinsamen Achse angeordnet sind, nennt man zusammengesetzte Linsen.

Die Oberfläche einer Linse kann konvex oder konkav sein, je nachdem, ob sie aus der Linse heraus- oder in diese zurückragt, oder sie kann plan sein, also eine flache Oberfläche besitzen. Eine **Zylinderlinse** ist nur in einer Richtung gekrümmt, besitzt also eine Brennweite  $f$  für Strahlen in der  $yz$ -Ebene, aber keine fokussierende Wirkung auf Strahlen in der  $xz$ -Ebene. Eine Linse, bei der eine Oberfläche konvex und die andere konkav ist, wird als Meniskuslinse bezeichnet (solche Linsen werden häufig für Brillen verwendet). Eine Linse, bei der eine oder beide Oberflächen eine Form haben, die weder sphärisch noch zylindrisch ist, wird als **asphärische Linse** bezeichnet.



**Abb. 1.23** Linsen: (a) Bikonvex, (b) plankonvex, (c) bikonkav, (d) plankonkav. (e) Eine Fresnellinse, die der in (b) dargestellten plankonvexen Linse entspricht; die Krümmungen sind auf beiden Oberflächen überall gleich.

Abbildung 1.23 zeigt verschiedene Arten von Linsen. Bikonvexe und plankonvexe Linsen bewirken eine Konvergenz der Strahlen und sind daher für die Bildzeugung nützlich, wie Abb. 1.21 zeigt. Bikonkave und plankonkave Linsen bewirken eine Divergenz der Strahlen; sie werden bei der Projektion und in Elementen zur Brennweitenverlängerung (Telekonverter) verwendet. Eine Fresnellinse wird konstruiert, indem alle nichtbrechenden Teile einer herkömmlichen Linse entfernt werden. Daher ist das in Abb. 1.23(e) gezeigte Fresnel-Äquivalent der plankonvexen Linse aus Abb. 1.23(b) ein abgeflachter Satz von konzentrischen Flächen mit identischer Krümmung an allen Stellen der Fläche (außer an den Stufen-Diskontinuitäten). Die Fresnelkonstruktion ermöglicht die Konstruktion dünner, leichter und kostengünstiger Kunststofflinsen mit Größen von Metern bis hinunter zu Mikrometern und kurzen Brennweiten. Fresnellinsen können konvergierend, divergierend oder zylindrisch sein.

### 1.2.4 Lichtleiter

Durch Linsen oder Spiegel kann Licht von einem Ort zu einem anderen geführt werden, wie Abb. 1.24 illustriert. Da brechende Elemente (wie Linsen) aber immer auch einen Teil des Lichts reflektieren und Spiegel einen Teil des Lichts absorbieren, ist der kumulierte Verlust

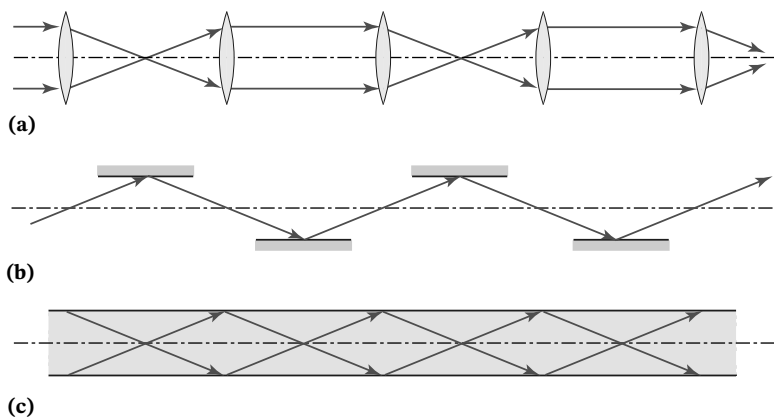
an optischer Leistung signifikant, wenn viele optische Elemente eingesetzt werden. Zwar können diese Effekte minimiert werden (z. B. durch antireflexbeschichtete Linsen), aber ein derartiges System ist umständlich und teuer.

Im Vergleich dazu ist die Totalreflexion an einer Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes ein idealer Mechanismus, um Licht zu führen. Hierbei werden die Strahlen immer wieder verlustfrei reflektiert, ohne Brechung zu erfahren. Mithilfe hochreiner Glasfasern kann Licht mit vergleichsweise geringen Verlusten über Strecken von vielen Kilometern geleitet werden.

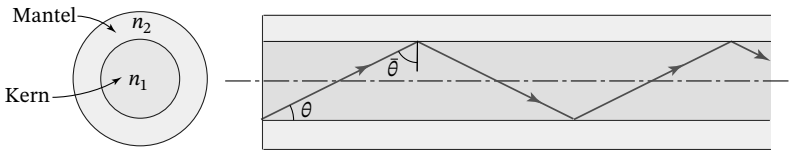
Ein Lichtleiter besteht aus zwei konzentrischen Glas- oder Kunststoffzylindern (Abb. 1.25). Der innere, auch als Kern bezeichnet, besitzt den Brechungsindex  $n_1$  und der äußere, der Mantel, einen etwas kleineren Brechungsindex  $n_2 < n_1$ ; man bezeichnet eine solche Anordnung als **Stufenindexfaser**. Lichtstrahlen, die sich im Kern ausbreiten, werden an der Grenzfläche zum Mantel totalreflektiert, wenn ihr Einfallswinkel größer als der Grenzwinkel ist,  $\bar{\theta} > \theta_k = \sin^{-1}(n_2/n_1)$ . Alle Strahlen mit einem Winkel  $\theta = 90^\circ - \bar{\theta}$  zur optischen Achse sind daher im Kern des Lichtleiters eingesperrt, sofern die Bedingung  $\theta < \theta_k$  erfüllt ist, wobei  $\bar{\theta}_k = 90^\circ - \theta_k = \cos^{-1}(n_2/n_1)$  ist. Lichtleiter werden in der optischen Nachrichtentechnik eingesetzt (siehe Kapitel 10 und 25). Einige wichtige Eigenschaften werden in Übung 1-6 hergeleitet.

#### Übung 1-6: Numerische Apertur und Akzeptanzwinkel eines Lichtleiters

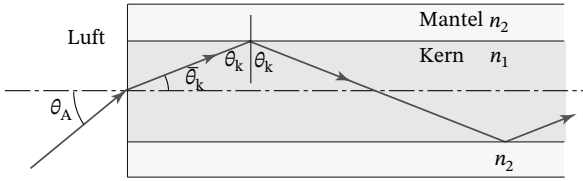
Ein Lichtleiter wird von einer Lichtquelle (z. B. einer Leuchtdiode, LED) bestrahlt. Die Brechungsindizes von Kern und Mantel des Leiters sind  $n_1$  und  $n_2$ ; der Brechungsindex der Luft ist 1 (Abb. 1.26). Zeigen Sie, dass der halbe Öffnungswinkel  $\theta_A$  des Strahlkegels, den der Lichtleiter aufnehmen (d. h. ohne Brechung



**Abb. 1.24** Lichtführung: (a) Linsen; (b) Spiegel; (c) Totalreflexion.



**Abb. 1.25** Ein Lichtleiter. Er leitet das Licht durch wiederholte Totalreflexion.  $\theta$  ist der Winkel des Strahls zur Achse des Lichtleiters, sein Komplement  $\bar{\theta} = 90^\circ - \theta$  ist der Einfallswinkel auf die dielektrische Grenzfläche.



**Abb. 1.26** Akzeptanzwinkel eines Lichtleiters.

am Mantel weiterleiten) kann, die Beziehung

$$NA = \sin \theta_A = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (1.18)$$

erfüllt. Der Winkel  $\theta_A$  wird als **Akzeptanzwinkel** bezeichnet, und der Parameter  $NA \equiv \sin \theta_A$  ist die **numerische Apertur** des Leiters. Berechnen Sie die numerische Apertur und den Akzeptanzwinkel einer Quarzglasfaser mit  $n_1 = 1.475$  und  $n_2 = 1.460$ . Quarzglas besteht aus amorphem Siliciumdioxid ( $\text{SiO}_2$ ). Es ist wegen seiner ausgezeichneten optischen und mechanischen Eigenschaften weit verbreitet; unter anderem hat es den Vorteil, dass sein Brechungsindex durch Dotierung (z. B. mit  $\text{GeO}_2$ ) sehr bequem verändert werden kann.

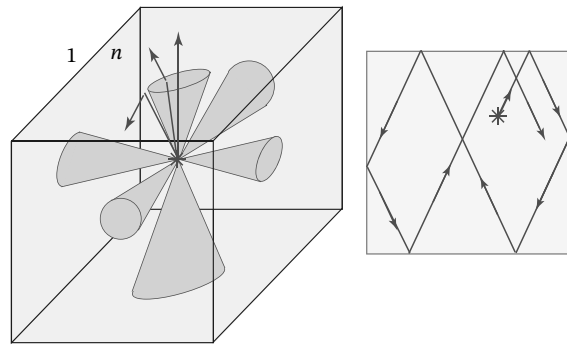
**Eingrenzung von Licht in Medien mit großem Brechungsindex**

Es ist oft schwierig, Licht aus einem Medium mit großem Brechungsindex in ein Medium mit kleinem Brechungsindex wie z. B. Luft auszukoppeln, vor allem, wenn das Medium mit großem Brechungsindex durch parallele Oberflächen begrenzt ist. In solchen Fällen erfahren manche Strahlen andauernde Totalreflexion, ohne jemals ins Freie gebrochen zu werden; das Prinzip wird in Übung 1-7 untersucht.

**Übung 1-7: In einer Leuchtdiode eingegrenztes Licht**

(a) Nehmen Sie an, dass in einem Parallelepiped mit dem Brechungsindex  $n$  (Abb. 1.27) Licht erzeugt wird und sich isotrop ausbreitet. Das System soll von Luft (Brechungsindex 1) umgeben sein, ähnlich wie es z. B. in Leuchtdioden der Fall ist (siehe Kapitel 18). Welchen Öffnungswinkel hat der Strahlkegel (in dem Parallelepiped), der aus den Seitenflächen austritt? Was passiert mit den restlichen Strahlen? Wie groß ist der Winkel für GaAs ( $n = 3.6$ )?

(b) Nehmen Sie an, dass bei isotroper Lichterzeugung die optische Leistung der Strahlung in einem gegebenen Kegel proportional zum Öffnungswinkel des Kegels ist. Zeigen Sie dann, dass das Verhältnis der aus dem Parallelepiped entnommenen zur insgesamt erzeugten optischen Leistung gleich  $3(1 - \sqrt{1 - 1/n^2})$  ist, sofern  $n > \sqrt{2}$  gilt. Welchen Zahlenwert hat dieses Verhältnis für GaAs?



**Abb. 1.27** Eingrenzung von Licht in einem Parallelepiped mit großem Brechungsindex.

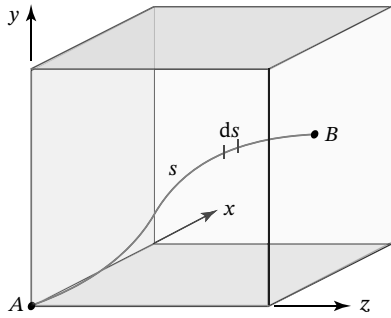
**1.3 Gradientenindexoptik**

In vielen Medien ist der Brechungsindex eine stetige Funktion  $n(\mathbf{r})$  des Ortes. Dies kann z. B. durch kontrolliertes Hinzufügen von Verunreinigungen (Dotierung) während der Herstellung erreicht werden. In einem solchen Medium verlaufen Lichtstrahlen nicht geradlinig, sondern entlang gekrümmter Wege. Wenn  $n(\mathbf{r})$  geeignet gewählt wird, kann eine einfache Platte aus einem solchen Medium dieselbe Wirkung auf einen Lichtstrahl zeigen wie ein konventionelles optisches Element, beispielsweise ein Prisma oder eine Linse.

**1.3.1 Die Strahlengleichung**

Um die Wege von Lichtstrahlen in einem inhomogenen Medium mit dem Brechungsindex  $n(\mathbf{r})$  zu bestimmen, verwenden wir Fermats Prinzip,

$$\delta \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0, \quad (1.19)$$



**Abb. 1.28** Die Bahn des Lichtstrahls wird parametrisch durch drei Funktionen  $x(s)$ ,  $y(s)$  und  $z(s)$  oder durch zwei Funktionen  $x(z)$  und  $y(z)$  beschrieben.

wobei  $ds$  eine differentielle Wegstrecke entlang der Trajektorie des Strahls zwischen  $A$  und  $B$  ist. Wenn der Lichtweg durch die Funktionen  $x(s)$ ,  $y(s)$  und  $z(s)$  beschrieben wird, wobei  $s$  die Position entlang der Trajektorie ist (Abb. 1.28), dann kann man mithilfe der Variationsrechnung zeigen<sup>1)</sup>, dass  $x(s)$ ,  $y(s)$  und  $z(s)$  drei partielle Differentialgleichungen erfüllen müssen:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \frac{d}{ds} \left( n \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial y}, \quad \frac{d}{ds} \left( n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}. \quad (1.20)$$

Wenn wir nun den Vektor  $\mathbf{r}(s)$  mit den Komponenten  $x(s)$ ,  $y(s)$  und  $z(s)$  definieren, können wir Gl. (1.20) als Vektorgleichung und somit kompakter formulieren:

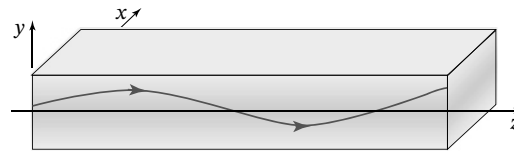
$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n, \quad (1.21)$$

wobei  $\nabla n$ , der Gradient von  $n$ , ein Vektor mit den kartesischen Komponenten  $\partial n / \partial x$ ,  $\partial n / \partial y$  und  $\partial n / \partial z$  ist. Gleichung (1.21) wird als **Strahlengleichung** bezeichnet.

Zur Lösung der Strahlengleichung kann man die Trajektorie durch zwei Funktionen  $x(z)$  und  $y(z)$  ausdrücken,  $ds = dz \sqrt{1 + (dx/dz)^2 + (dy/dz)^2}$  schreiben und diesen Ansatz in Gl. (1.21) einsetzen, um zwei partielle Differentialgleichungen für  $x(z)$  und  $y(z)$  zu erhalten. Dieser Weg ist im Allgemeinen rechnerisch aufwendig; bei Verwendung der paraxialen Näherung wird er aber deutlich einfacher.

### Die paraxiale Strahlengleichung

In der paraxialen Näherung verläuft der Strahl nahezu parallel zur  $z$ -Achse, sodass  $ds \approx dz$  gilt (Abb. 1.29). Die



**Abb. 1.29** Der Weg eines paraxialen Strahls in einem Medium mit variablem Brechungsindex.

Strahlengleichung (1.20) vereinfacht sich dann zu

$$\frac{d}{dz} \left( n \frac{dx}{dz} \right) \approx \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \frac{d}{dz} \left( n \frac{dy}{dz} \right) \approx \frac{\partial n}{\partial y}. \quad (1.22)$$

Wenn die Funktion  $n = n(x, y, z)$  bekannt ist, können diese beiden partiellen Differentialgleichungen gelöst werden, um den Lichtweg  $x(z)$  und  $y(z)$  zu berechnen.

Im Grenzfall eines homogenen Mediums, in dem  $n$  nicht von  $x$ ,  $y$  und  $z$  abhängt, liefert Gl. (1.22)  $d^2x/dz^2 = 0$  und  $d^2y/dz^2 = 0$ , woraus folgt, dass  $x$  und  $y$  lineare Funktionen von  $z$  sind, die Strahlen sich also geradlinig ausbreiten. Interessante Fälle werden wir in Kürze untersuchen.

### 1.3.2 Optische Komponenten mit variablem Brechungsindex

#### Platte mit variablem Brechungsindex

Wir betrachten eine Platte, deren Brechungsindex  $n = n(y)$  in  $x$ - und  $z$ -Richtung konstant ist, aber in  $y$ -Richtung stetig variiert (Gradientenindexplatte, Abb. 1.30). Die Trajektorien von paraxialen Strahlen in der  $yz$ -Ebene werden dann durch die paraxiale Strahlengleichung beschrieben,

$$\frac{d}{dz} \left( n \frac{dy}{dz} \right) = \frac{dn}{dy}, \quad (1.23)$$

woraus

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{n(y)} \frac{dn(y)}{dy} \quad (1.24)$$

folgt. Wenn  $n(y)$  bekannt und die Randbedingungen ( $y$  und  $dy/dz$  für  $z = 0$ ) festgelegt sind, kann Gl. (1.24) gelöst und die Funktion  $y(z)$  bestimmt werden, die die Trajektorien der Strahlen beschreibt.

#### Herleitung: Die paraxiale Strahlengleichung in einer Platte mit variablem Brechungsindex

Gleichung (1.24) kann auch direkt aus dem Snelliusschen Gesetz hergeleitet werden (Abb. 1.30).  $\theta(y) \approx dy/dz$  sei der Winkel des Strahls zur  $z$ -Achse am Ort  $(y, z)$ . Nach Durchtritt durch eine Schicht der Dicke  $\Delta y$

<sup>1)</sup> Der Beweis sprengt den Rahmen dieses Buches; siehe z. B. R. Weinstock, *Calculus of Variations: With Applications to Physics and Engineering*, Dover 1974.