

Abb. 1.30 Brechung in einer Platte mit variablem Brechungsindex.

ändert sich der Winkel des Strahls zu $\theta(y + \Delta y)$. Diese beiden Winkel hängen über das Snelliussche Gesetz zusammen, wobei θ nach der Definition aus Abb. 1.30 das Komplement des Einfallswinkels (Brechungswinkels) ist:

$$\begin{aligned} n(y) \cos \theta(y) &= n(y + \Delta y) \cos \theta(y + \Delta y) \\ &= \left[n(y) + \frac{dn}{dy} \Delta y \right] \left[\cos \theta(y) - \frac{d\theta}{dy} \Delta y \sin \theta(y) \right]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Dabei haben wir die Entwicklung $f(y + \Delta y) = f(y) + (df/dy)\Delta y$ auf die Funktionen $f(y) = n(y)$ und $f(y) = \cos \theta(y)$ angewendet. Im Grenzfall $\Delta y \rightarrow 0$ erhalten wir durch Vernachlässigen des Terms in $(\Delta y)^2$ die Differentialgleichung

$$\frac{dn}{dy} = n \frac{d\theta}{dy} \tan \theta. \quad (1.26)$$

Für paraxiale Strahlen ist θ sehr klein, sodass $\tan \theta \approx \theta$ gilt. Wenn wir $\theta = dy/dz$ in Gl. (1.26) einsetzen, erhalten wir Gl. (1.24).

Beispiel 1-2: Platte mit parabolischem Indexprofil

Eine wichtige spezielle Verteilung des Brechungsindex ist

$$n^2(y) = n_0^2 (1 - \alpha^2 y^2). \quad (1.27)$$

Diese Funktion ist symmetrisch in y und besitzt ein Maximum bei $y = 0$ (Abb. 1.31). Glasplatten mit einem derartigen Indexprofil werden unter dem Handelsnamen SELFOC vertrieben. Meist wird α so klein gewählt, dass für alle interessierenden y die Beziehung $\alpha^2 y^2 \ll 1$ erfüllt ist. Dann ist $n(y) = n_0 \sqrt{1 - \alpha^2 y^2} \approx n_0 (1 - \frac{1}{2} \alpha^2 y^2)$; d. h. $n(y)$ ist eine parabolische Verteilung. Wegen $n(y) - n_0 \ll n_0$ ist auch die relative Änderung des Brechungsindex sehr klein. Wenn wir die Ableitung von Gl. (1.27) bilden, liefert die rechte Seite von Gl. (1.24) $(1/n) dn/dy = -(n_0/n)^2 \alpha^2 y \approx -\alpha^2 y$, sodass Gl. (1.24) die Form

$$\frac{d^2 y}{dz^2} \approx -\alpha^2 y \quad (1.28)$$

annimmt. Die Lösungen dieser Gleichung sind harmonische Funktionen mit der Periode $2\pi/\alpha$. Wenn wir $y(0) = y_0$ und $dy/dz = \theta_0$ bei $z = 0$ im Inneren des Mediums ansetzen, erhalten wir

$$y(z) = y_0 \cos \alpha z + \frac{\theta_0}{\alpha} \sin \alpha z, \quad (1.29)$$

woraus sich für die Steigung des Lichtwegs

$$\theta(z) = \frac{dy}{dz} = -y_0 \alpha \sin \alpha z + \theta_0 \cos \alpha z \quad (1.30)$$

ergibt. Der Strahl oszilliert mit einer (räumlichen) Periode $2\pi/\alpha$ um das Zentrum der Platte, wie in Abb. 1.31 gezeigt. Die maximale Auslenkung des Strahls ist $y_{\max} = [y_0^2 + (\theta_0/\alpha)^2]^{1/2}$ und der maximale Winkel des Lichtwegs ist $\theta_{\max} = \alpha y_{\max}$. Diese genäherte Analyse gilt, solange $\theta_{\max} \ll 1$ ist. Wenn $2y_{\max}$ kleiner wird als die Dicke der Platte, ist der Strahl in der Platte gefangen; sie wirkt dann als Lichtleiter. Abbildung 1.32 zeigt die Lichtwege einiger Strahlen in einer SELFOC-Platte – alle Strahlen haben dieselbe Periode. Eine solche Platte mit variablem Brechungsindex kann als Linse eingesetzt werden, wie Übung 1-8 zeigt.

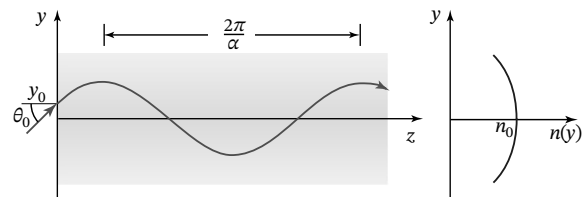


Abb. 1.31 Lichtweg in einer Platte mit parabolischem Indexprofil (SELFOC-Platte).

Übung 1-8: Platten mit variablem Brechungsindex als Linsen

Zeigen Sie, dass eine SELFOC-Platte mit der Länge $d < \pi/2\alpha$ und einem Brechungsindex gemäß Gl. (1.27) als Zylinderlinse (sammelnd in der yz -Ebene) mit der Brennweite

$$f \approx \frac{1}{n_0 d \alpha \sin \alpha} \quad (1.31)$$

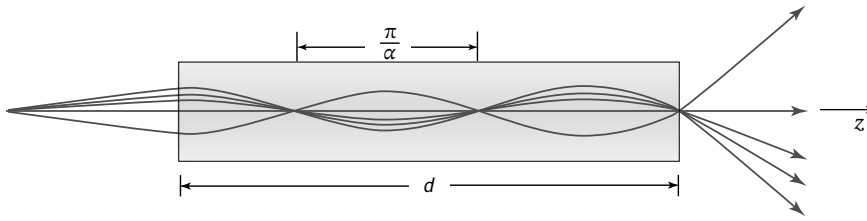


Abb. 1.32 Lichtwege von Strahlen aus einer externen Punktlichtquelle in einer SELFOC-Platte.

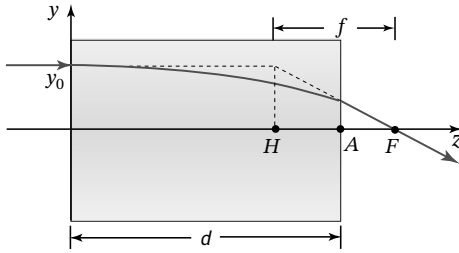


Abb. 1.33 Eine SELFOC-Platte als Linse; F ist der Brennpunkt, H der Hauptpunkt.

wirkt. Zeigen Sie, dass der Hauptpunkt (wie in Abb. 1.33 definiert) in einer Entfernung $\overline{AH} \approx (1/n_0\alpha) \cdot \tan(\alpha d/2)$ vom Rand der Platte liegt. Skizzieren Sie die Lichtwege von Strahlen für die Spezialfälle $d = \pi/\alpha$ und $\pi/2\alpha$.

Fasern mit variablem Brechungsindex

Eine Faser mit variablem Brechungsindex (Gradientenindexfaser) ist ein Glaszylinder mit einem Brechungsindex n , der mit dem radialen Abstand von der Achse variiert. In der paraxialen Näherung sind die Lichtwege durch die paraxiale Strahlengleichung gegeben, Gl. (1.22). Wir betrachten nun das Indexprofil

$$n^2 = n_0^2 [1 - \alpha^2 (x^2 + y^2)] . \quad (1.32)$$

Wenn wir Gl. (1.32) in Gl. (1.22) einsetzen und annehmen, dass für alle interessierenden x und y die Beziehung $\alpha^2(x^2 + y^2) \ll 1$ erfüllt ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dz^2} &\approx -\alpha^2 x , \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &\approx -\alpha^2 y . \end{aligned} \quad (1.33)$$

Sowohl x als auch y sind folglich harmonische Funktionen von z mit der Periode $2\pi/\alpha$. Die Anfangswerte (x_0, y_0) , $\theta_{x0} = dx/dz$ und $\theta_{y0} = dy/dz$ für $z = 0$ bestimmen die Amplituden und Phasen dieser harmonischen Funktionen. Wegen der Zylindersymmetrie können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $x_0 = 0$ setzen.

Die Lösung von Gl. (1.33) ist dann

$$x(z) = \frac{\theta_{x0}}{\alpha} \sin \alpha z \quad (1.34)$$

$$y(z) = \frac{\theta_{y0}}{\alpha} \sin \alpha z + y_0 \cos \alpha z .$$

Wenn $\theta_{x0} = 0$ ist, d. h. der einfallende Strahl in einer meridionalen Ebene liegt (einer Ebene, die die Zylinderachse enthält, in diesem Fall die yz -Ebene), dann bleibt der Strahl in dieser Ebene und folgt dort einem sinusförmigen Weg ähnlich dem in einer Gradientenindexplatte [Abb. 1.34(a)].

Wenn andererseits $\theta_{y0} = 0$ und $\theta_{x0} = \alpha y_0$ ist, dann folgt

$$\begin{aligned} x(z) &= y_0 \sin \alpha z \\ y(z) &= y_0 \cos \alpha z , \end{aligned} \quad (1.35)$$

und der Strahl folgt einem helikalen (schraubenförmigen) Weg auf der Oberfläche eines Zylinders mit dem Radius y_0 [Abb. 1.34(b)]. In beiden Fällen ist der Strahl in der Faser gefangen, die somit als Lichtleiter wirkt. Für andere einfallende Strahlen entstehen unterschiedliche helikale Lichtwege.

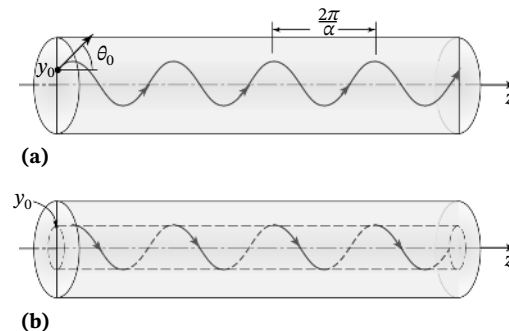


Abb. 1.34 (a) Meridionale und (b) helikale Strahlen in einer Faser mit parabolischem Indexprofil.

Gradientenindexfasern und ihre Anwendungen in der optischen Kommunikationstechnik werden in den Kapiteln 10 und 25 ausführlicher diskutiert.

Übung 1-9: Numerische Apertur eines Lichtleiters mit variablem Brechungsindex

Wir betrachten eine Gradientenindexfaser mit einem Radius a und einem Indexprofil gemäß Gl. (1.32). Ein

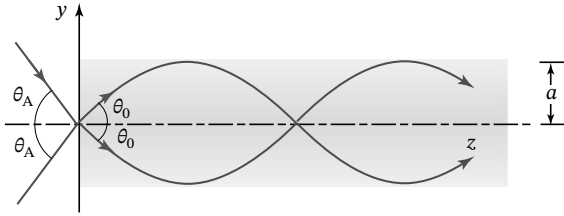


Abb. 1.35 Akzeptanzwinkel eines Lichtleiters mit variablem Brechungsindex.

Strahl fällt aus der umgebenden Luft zentral in die Faser ein, sodass er im Fasermedium einen Winkel θ_0 zur Faserachse einschließt (siehe Abb. 1.35). Zeigen Sie, dass die numerische Apertur der Faser in der paraxialen Näherung durch

$$NA \equiv \sin \theta_A \approx n_0 \alpha \quad (1.36)$$

gegeben ist, wobei θ_A der maximale Akzeptanzwinkel ist, für den der Strahl in der Faser eingeschlossen bleibt. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem für eine Stufenindexfaser wie der in Übung 1-6 untersuchten. Verwenden Sie für die Brechungsindizes von Kern und Mantel der Stufenindexfaser $n_1 = n_0$ bzw. $n_2 = n_0 \sqrt{1 - \alpha^2 a^2} \approx n_0(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 a^2)$, um den Vergleich fair zu gestalten.

1.3.3 Die Eikonalgleichung

Die Wege der Strahlen werden oft durch Oberflächen beschrieben, zu denen sie normal verlaufen. $S(\mathbf{r})$ sei eine skalare Funktion, deren Flächen gleicher Funktionswerte ($S(\mathbf{r}) = \text{const.}$) überall normal auf den Lichtstrahlen stehen (Abb. 1.36). Wenn $S(\mathbf{r})$ bekannt ist, können daraus die Lichtwege konstruiert werden, da die Normale der Fläche gleicher Funktionswerte am Ort $\mathbf{r}$ gerade in die Richtung des Gradienten $\nabla S(\mathbf{r})$ zeigt. Die Funktion $S(\mathbf{r})$ wird als **Eikonal** bezeichnet; sie entspricht der Potentialfunktion $V(\mathbf{r})$ in der Elektrostatik, wobei die Lichtstrahlen die Rolle der elektrischen Feldlinien übernehmen, $\mathbf{E} = -\nabla V$.

Um Fermats Prinzip (das Hauptpostulat der Strahlenoptik) zu erfüllen, muss das Eikonal $S(\mathbf{r})$ eine Differen-

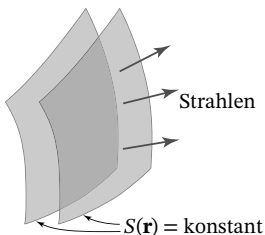


Abb. 1.36 Die Lichtwege stehen normal auf den Flächen mit konstantem $S(\mathbf{r})$.

tialgleichung erfüllen, die **Eikonalgleichung**

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2, \quad (1.37)$$

die meist in Vektorschreibweise angegeben wird,

$$|\nabla S|^2 = n^2, \quad (1.38)$$

wobei $|\nabla S|^2 = \nabla S \cdot \nabla S$ ist. Der Beweis der Eikonalgleichung aus Fermats Prinzip sprengt den Rahmen dieses Buches²⁾. Umgekehrt kann auch Fermats Prinzip (sowie die Strahlengleichung) aus der Eikonalgleichung hergeleitet werden. Die Eikonalgleichung kann daher ebenso wie Fermats Prinzip als das Hauptpostulat der Strahlenoptik angesehen werden.

Die Integration der Eikonalgleichung (1.38) entlang eines Lichtwegs zwischen den Punkten A und B ergibt

$$\begin{aligned} S(\mathbf{r}_B) - S(\mathbf{r}_A) &= \int_A^B |\nabla S| ds \\ &= \int_A^B n ds = \text{opt. Weglänge zw. } A \text{ und } B. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Mit anderen Worten, die Differenz $S(\mathbf{r}_B) - S(\mathbf{r}_A)$ ist die optische Weglänge zwischen A und B . In der Analogie zur Elektrostatik übernimmt die optische Weglänge die Rolle der Potentialdifferenz.

Um die Lichtwege in einem inhomogenen Medium mit dem Brechungsindex $n(\mathbf{r})$ zu bestimmen, können wir entweder die Strahlengleichung (1.21) – was wir bereits durchgeführt haben – oder die Eikonalgleichung lösen und dann aus $S(\mathbf{r})$ den Gradienten ∇S berechnen.

Wenn das Medium homogen, d. h. $n(\mathbf{r})$ konstant ist, ist auch der Betrag von ∇S konstant, sodass die Normalen zur Wellenfront (die Strahlen) gerade Linien sein müssen. Die Flächen $S(\mathbf{r}) = \text{const.}$ können entweder parallele Ebenen oder konzentrische Kugelflächen sein (Abb. 1.37).

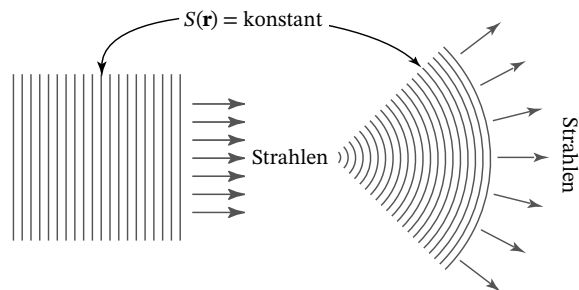


Abb. 1.37 Strahlen und Flächen für konstantes $S(\mathbf{r})$ in einem homogenen Medium.

²⁾ Siehe z. B. M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, 7. Aufl. 2002.

In Abschnitt 2.3 werden wir die Eikonalgleichung nochmals untersuchen; dann im Hinblick auf die Beziehung zwischen der Strahlenoptik und der Wellenoptik.

1.4 Matrizenoptik

Die Matrizenoptik ist eine Methode zur Verfolgung paraxialer Strahlen. Dabei wird angenommen, dass die Strahlen sich nur in einer Ebene bewegen; die Methode ist daher auf planare Systeme oder meridionale Strahlen in zylindersymmetrischen Systemen anwendbar.

Ein Strahl wird durch seine Position und seinen Winkel zur optischen Achse charakterisiert; diese Parameter ändern sich während seiner Reise durch das System. In der paraxialen Näherung sind die Einfalls- und Ausfallsebene eines optischen Systems durch zwei *lineare* algebraische Gleichungen verknüpft. Das optische System wird daher durch eine 2×2 -Matrix beschrieben, die sogenannte **Strahltransfermatrix** (oder kürzer Transfermatrix).

Der Vorteil bei der Verwendung von Matrizen liegt darin, dass die Strahltransfermatrix von mehreren hintereinander geschalteten optischen Elementen (oder Systemen) das Produkt der Strahltransfermatrizen der einzelnen Elemente (Systeme) ist. Daher bietet die Matrixoptik eine formale Methode zur Beschreibung komplexer optischer Systeme in der paraxialen Näherung.

1.4.1 Die Strahltransfermatrix

Wir betrachten ein zylindersymmetrisches System aus mehreren brechenden und reflektierenden Grenzflächen, die entlang derselben Achse (optische Achse) angeordnet sind. Die optische Achse soll entlang der z -Achse liegen, die auch der ungefähren Ausbreitungsrichtung der Strahlen entspricht. Wir betrachten nur Strahlen in einer Ebene, die die optische Achse enthält, beispielsweise der yz -Ebene. Dann verfolgen wir den Strahl während seiner Ausbreitung durch das System und beobachten, wie er verschiedene Grenzflächen entlang der optischen Achse durchschreitet. Ein Strahl, der an der Position z eine transversale Fläche schneidet, ist durch die Angabe der y -Koordinate (Höhe) seines Auftreffpunkts auf die Fläche und seinen Winkel θ vollständig charakterisiert (Abb. 1.38).

Ein optisches System besteht aus einer Zahl von optischen Elementen zwischen zwei transversalen Ebenen bei z_1 und z_2 , die wir als Eingangs- und Ausgangsebene bezeichnen. Das System ist durch seine Wirkung auf einen in beliebiger Höhe y_1 und in beliebigen Winkeln θ_1 einfallenden Strahl gekennzeichnet. Es verändert den

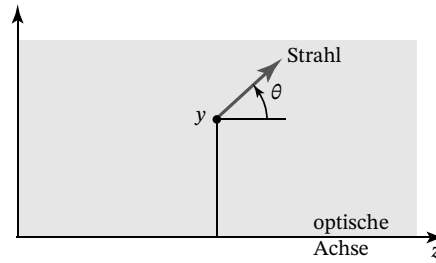


Abb. 1.38 Ein Strahl ist durch seine Höhe (y -Koordinate) und seinen Winkel θ charakterisiert.

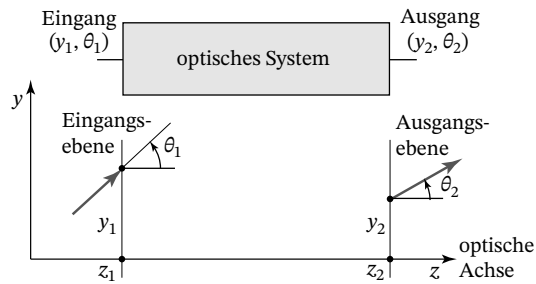


Abb. 1.39 Ein Strahl tritt an der Stelle z_1 am Ort y_1 im Winkel θ_1 in das System ein und verlässt es an der Stelle z_2 am Ort y_2 im Winkel θ_2 .

Strahl, sodass er auf der Ausgangsebene in der Höhe y_2 im Winkel θ_2 aus dem System austritt (Abb. 1.39).

In der paraxialen Näherung, wenn alle Winkel so klein sind, dass $\sin \theta \approx \theta$ gesetzt werden kann, ist die Beziehung zwischen (y_2, θ_2) und (y_1, θ_1) linear und kann allgemein in der Form

$$y_2 = Ay_1 + B\theta_1 \quad (1.40)$$

$$\theta_2 = Cy_1 + D\theta_1 \quad (1.41)$$

geschrieben werden, wobei A , B , C und D reelle Zahlen sind. Die Gln. (1.40) und (1.41) lauten in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}. \quad (1.42)$$

Die Matrix $\mathbf{M}$ mit den Elementen A , B , C und D charakterisiert das optische System vollständig, da sie die Berechnung von (y_2, θ_2) für jedes beliebige (y_1, θ_1) ermöglicht. Diese Matrix wird als **Strahltransfermatrix** bezeichnet. Negative Winkel zeigen in Ausbreitungsrichtung des Strahls von der z -Achse nach unten; negative Radien bezeichnen konkave Flächen, positive Radien beschreiben konvexe Flächen.

Übung 1-10: Spezielle Fälle von Strahltransfermatrizen
Betrachten Sie die folgenden Situationen, in denen jeweils eines der vier Elemente der Strahltransfermatrix null ist:

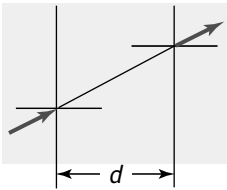
- (a) Zeigen Sie, dass der Fall $A = 0$ ein *fokussierendes System* beschreibt, in welchem alle Strahlen, die an einer beliebigen Position, aber unter demselben Winkel in das System eintreten, in derselben Höhe austreten.
- (b) Zeigen Sie, dass der Fall $B = 0$ ein *abbildendes System* beschreibt, in welchem alle Strahlen, die unter beliebigen Winkeln in derselben Höhe in das System eintreten, in derselben Höhe austreten.
- (c) Welche besonderen Eigenschaften haben Systeme, für die $C = 0$ oder $D = 0$ ist?

1.4.2 Matrizen einfacher optischer Komponenten

Ausbreitung im Vakuum

Da sich die Strahlen in einem Medium mit konstantem Brechungsindex wie z. B. dem Vakuum geradlinig ausbreiten, ist die Veränderung eines Strahls nach Durchlaufen einer Wegstrecke d durch $y_2 = y_1 + \theta_1 d$ und $\theta_2 = \theta_1$ gegeben. Die Strahltransfermatrix ist folglich

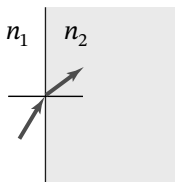
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.43)$$



Brechung an einer ebenen Grenzfläche

An einer ebenen Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 ist die Veränderung des Strahlwinkels durch das Snelliussche Gesetz gegeben, $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$. In der paraxialen Näherung ist $n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2$. Die Höhe des Strahls verändert sich nicht, $y_2 = y_1$. Folglich ist die Strahltransfermatrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

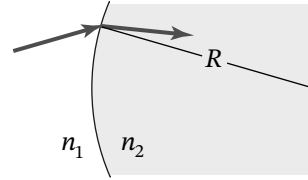


Brechung an einer sphärischen Grenzfläche

Die Beziehung zwischen θ_1 und θ_2 für paraxiale Strahlen, die an einer sphärischen Grenzfläche gebrochen werden, ist in Gl. (1.11) angegeben. Die Höhe des Strahls

wird nicht verändert, $y_2 \approx y_1$. Die Strahltransfermatrix ist daher

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(n_2 - n_1)}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}. \quad (1.45)$$

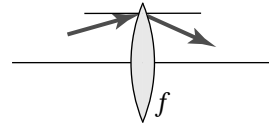


konvex: $R > 0$; konkav: $R < 0$

Durchgang durch eine dünne Linse

Die Beziehung zwischen θ_1 und θ_2 für paraxiale Strahlen beim Durchgang durch eine dünne Linse der Brennweite f ist in Gl. (1.14) angegeben. Da die Höhe des Strahls unverändert bleibt ($y_2 = y_1$), gilt für die Strahltransfermatrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.46)$$

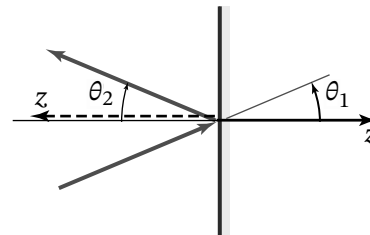


konvex: $f > 0$; konkav: $f < 0$

Reflexion an einem ebenen Spiegel

Die Position des Strahls wird bei Reflexion an einem ebenen Spiegel nicht verändert, $y_2 = y_1$. Wenn wir die übliche Konvention verwenden, die z-Achse in Ausbreitungsrichtung positiv zu zählen (also für den einfallenden Strahl in Richtung des Spiegels und für den reflektierten Strahl vom Spiegel weg), dann ist offensichtlich $\theta_2 = -\theta_1$. Die Strahltransfermatrix ist daher die Einheitsmatrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.47)$$

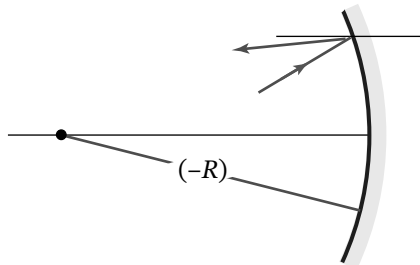


Reflexion an einem Kugelspiegel

Mithilfe von Gl. (1.4) und der Konvention, dass die z-Achse in Ausbreitungsrichtung der Strahlen zeigt, er-

halten wir analog

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.48)$$



konkav: $R < 0$; konvex: $R > 0$

Die Strahltransfermatrizen eines sphärischen Spiegels, Gl. (1.48), und einer dünnen Linse, Gl. (1.46), ähneln sich. Ein Spiegel mit dem Krümmungsradius R bricht Strahlen genau wie eine dünne Linse mit der Brennweite $f = -R/2$.

1.4.3 Matrizen von hintereinander geschalteten optischen Komponenten

Eine Folge von N optischen Komponenten oder Systemen mit den Strahltransfermatrizen $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_N$ ist äquivalent zu einem einzigen optischen System mit der Strahltransfermatrix

$$\rightarrow \boxed{\mathbf{M}_1} \rightarrow \boxed{\mathbf{M}_2} \rightarrow \dots \rightarrow \boxed{\mathbf{M}_N} \rightarrow \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_N \cdots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1. \quad (1.49)$$

Die Reihenfolge der Multiplikation ist dabei entscheidend: Die Matrix des Systems, das der Strahl zuerst passiert, muss ganz rechts stehen, sodass sie als erste auf die Spaltenmatrix des einfallenden Strahls wirkt. Die Matrizenmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ (wohl aber assoziativ).

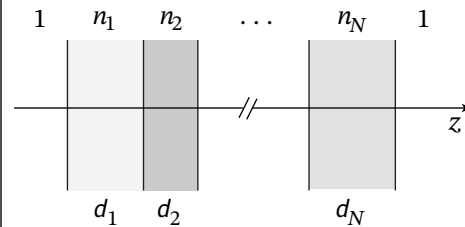
Übung 1-11: Parallele transparente Platten

Betrachten Sie einen Satz von N parallelen ebenen transparenten Platten mit den Brechungsindizes $n_1, n_2, \dots, n_N$ und den Dicken $d_1, d_2, \dots, d_N$, die in Luft ($n = 1$) senkrecht zur z -Achse liegen. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass die Strahltransfermatrix des Gesamtsystems durch

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \sum_{i=1}^N \frac{d_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

gegeben ist.

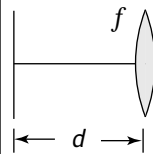
In diesem Fall hat die Reihenfolge der Platten keinen Einfluss auf die Strahltransfermatrix des Gesamtsystems. Wie lautet die Strahltransfermatrix einer inhomogenen transparenten Platte mit der Dicke d_0 und dem Brechungsindex $n(z)$?



Übung 1-12: Luftspalt und dünne Linse

Zeigen Sie, dass für die Strahltransfermatrix eines Luftspalts der Breite d gefolgt von einer dünnen Linse der Brennweite f gilt

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{bmatrix}. \quad (1.51)$$



Übung 1-13: Abbildung mit einer dünnen Linse

Leiten Sie einen Ausdruck für die Strahltransfermatrix eines Systems Luft/dünne Linse/Luft her (siehe Skizze). Zeigen Sie, dass alle von einem einzelnen Punkt in der Eingangsebene ausgehenden Strahlen unabhängig von ihren Winkeln auch in der Ausgangsebene auf einem einzigen Punkt y_2 eintreffen, sofern die Abbildungsbedingung ($1/d_1 + 1/d_2 = 1/f$) erfüllt ist. Zeigen Sie weiter, dass für $d_2 = f$ alle parallel einfallenden Strahlen von der Linse auf einen einzigen Punkt in der Ausgangsebene gebündelt werden.

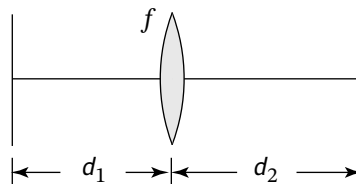


Abb. 1.40 Einlinsen-Bildgebungssystem

Bildgebung mit einem beliebigen paraxialen optischen System

Ein paraxiales System aus einem beliebigen Satz von hintereinander geschalteten optischen Elementen ist durch die vier Elemente A , B , C und D seiner Strahl-

transfermatrix $\mathbf{M}$ vollständig charakterisiert. Alternativ kann das System auch durch die Positionen seiner vier **Kardinalpunkte** beschrieben werden, zweier Brenn- und zweier Hauptpunkte, die den Durchtritt der Strahlen zwischen seiner Eingangs- und Ausgangsebene bestimmen. Gemäß Gl. (1.42) verlässt ein parallel zur optischen Achse ($\theta_1 = 0$) in der Höhe y_1 einfallender Strahl das System in der Höhe $y_2 = Ay_1$ unter dem Winkel $\theta_2 = Cy_1$. Dieser Strahl kreuzt die optische Achse an einem Punkt F , der als **hinterer Brennpunkt** bezeichnet wird und sich in einem Abstand $y_2/\theta_2 = A/C$ vom hinteren Scheitelpunkt V des Systems befindet, wie in Abb. 1.41(a) gezeigt. Der Schnittpunkt der Verlängerungen der einfallenden und ausgehenden Strahlen definiert den **hinteren Hauptpunkt** H , der in einem Abstand $f = y_1/\theta_2 = -1/C$ links von F liegt, welcher als **hintere Brennweite** bezeichnet wird. Der hintere Hauptpunkt H befindet sich also in einem Abstand $h = -1/C + A/C$ links vom hinteren Scheitelpunkt V . Solange die paraxiale Näherung gilt, hängen die Positionen der Brenn- und Hauptpunkte nicht von y_1 ab.

In ähnlicher Weise werden Strahlen parallel zur optischen Achse, die in entgegengesetzter Richtung (von rechts nach links) in das System eintreten, auf den **vorderen Brennpunkt** F' fokussiert und definieren so den **vorderen Hauptpunkt** H' , der in einem Abstand h' vom vorderen Scheitelpunkt V' liegt. Der vordere Brennpunkt befindet sich in einem Abstand f' links von H' , wobei f' die **vordere Brennweite** ist. Diese Abstände können über die Beziehungen $-f' = -1/C'$ und $-h' = -1/C' + A'/C'$ als Elemente der inversen Strahltransfermatrix ausgedrückt werden:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{M}]} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & DA \end{bmatrix}. \quad (1.52)$$

Die Determinante $\det[\mathbf{M}]$ von $\mathbf{M}$ ist durch $AD - BC$ gegeben.

Zusammengefasst können die Brennweiten und Positionen der Hauptpunkte mithilfe der folgenden Bezie-

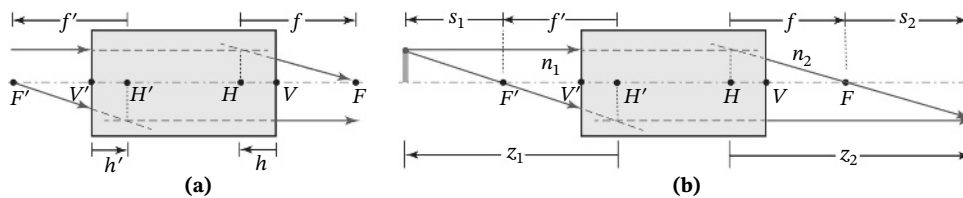


Abb. 1.41 (a) Paraxiales System als Darstellung eines beliebigen Satzes von kaskadierten optischen Elementen. F , V und H bezeichnen den Brennpunkt, den Scheitelpunkt und die Hauptpunkte; f und h sind die Brennweite und der Abstand zwischen Haupt- und Scheitelpunkt. Gestrichene Größen

beziehungen aus den Parametern $ABCD$ bestimmt werden:

$$f = -1/C, \quad h = (1 - A)f \quad (1.53)$$

$$f' = \det[\mathbf{M}]f, \quad h' = -f' + Df. \quad (1.54)$$

Negative Vorzeichen bezeichnen Richtungen entgegen den durch die Pfeile in Abb. 1.41(a) angegebenen Richtungen. Alternativ können die vier Abstände auch festgelegt werden, indem man zwei zur optischen Achse parallele Strahlen, die jedoch in entgegengesetzte Richtungen verlaufen, durch das System verfolgt. Die Parameter $ABCD$ können durch Invertieren der Gln. (1.53) und (1.54) aus f , f' , h und h' bestimmt werden.

Die Abbildungsbedingung wird unter Berücksichtigung der in Abb. 1.41(b) dargestellten Geometrie bestimmt. Da $s_2/f = f'/s_1$ ist, ist die Abbildungsbedingung einfach $s_1 s_2 = f f'$ oder äquivalent $(z_1 - F')(z_2 - f) = f f'$ oder

$$\frac{f'}{z_1} + \frac{f}{z_2} = 1. \quad (1.55)$$

Wenn die Brechungsindizes der Medien, in die das System eingebettet ist, identisch sind, ist $\det[\mathbf{M}] = 1$ und im Einklang mit Gl. (1.54) folgt $f' = f$. Die Abbildungsbedingung aus Gl. (1.55) reduziert sich dann auf die bekannte Abbildungsgleichung $1/z_1 + 1/z_2 = 1/f$ [siehe Gl. (1.7)]; es sei jedoch bemerkt, dass hier die Abstände z_1 und z_2 von den Hauptpunkten H' bzw. H aus gemessen werden.

Übung 1-14: Abbildung mit einer dicken Linse

Betrachten Sie eine Glaslinse mit dem Brechungsindex n , der Dicke d und zwei sphärischen Oberflächen mit dem Radius R . Bestimmen Sie die Strahltransfermatrix der Linse unter der Annahme, dass sie sich in Luft befindet (Brechungsindex = 1). Zeigen Sie, dass die vordere und hintere Brennweite gleich ist ($f = f'$) und dass sich die Hauptpunkte in identischen Entfernungen von den Scheitelpunkten befinden ($h = h'$),

ßen beziehen sich auf die Eingangsebene, nicht gestrichene auf die Ausgangsebene. (b) Bildgebung mit einem solchen System. Die Brechungsindizes der Medien, in die das optische System eingebettet ist, sind n_1 und n_2 .

wobei

$$\frac{1}{f} = \frac{(n-1)}{R} \left[2 - \frac{n-1}{n} \frac{d}{R} \right] \quad (1.56)$$

$$h = \frac{(n-1)fd}{nR}. \quad (1.57)$$

Zeigen Sie, dass für die Transfermatrix des Systems zwischen zwei konjugierten Ebenen in den Abständen z_1 und z_2 von den Hauptpunkten der Linse (d. h. in den Abständen $d_1 = z_1 - h'$ und $d_2 = z_2 - h$ von den Scheitelpunkten), die die Abbildungsgleichung erfüllt, $B = 0$ gilt, was zeigt, dass sie tatsächlich die Abbildungsbedingung erfüllt [siehe Übung 1-10(b)].

1.4.4 Periodische optische Systeme

Unter einem periodischen optischen System versteht man eine Folge von identischen Einheiten. Ein Beispiel ist etwa die in Abb. 1.24(a) gezeigte Folge von Linsen in gleichen Abständen zur Lichtführung. Ein weiteres Beispiel ist die Reflexion von Licht zwischen zwei Spiegeln in einem optischen Resonator (siehe Abschnitt 11.2.1); in diesem Fall durchläuft ein Strahl immer wieder dasselbe System. Selbst ein homogenes Medium wie z. B. eine Glasfaser kann als periodisches System angesehen werden, wenn man es formal in gleichlange identische Segmente unterteilt. Wir wollen im Folgenden mithilfe von Matrizenmethoden eine allgemeine Theorie der Strahlausbreitung in periodischen optischen Systemen entwickeln.

Die Differenzgleichung für die Strahlposition

Ein periodisches System besteht aus einer Folge von identischen Einheiten (Abschnitten) mit der Strahltransfermatrix (A, B, C, D) , wie in Abb. 1.42 gezeigt. Ein Strahl tritt in einer Höhe y_0 in einem Winkel θ_0 in das System ein. Um die Höhe und den Winkel (y_m, θ_m) des Strahls am Ausgang des m ten Abschnitts zu bestimmen, wenden wir die Matrix $ABCD$ m mal an,

$$\begin{bmatrix} y_m \\ \theta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^m \begin{bmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}. \quad (1.58)$$

Genauso können wir die Beziehungen

$$y_{m+1} = Ay_m + B\theta_m \quad (1.59)$$

$$\theta_{m+1} = Cy_m + D\theta_m \quad (1.60)$$

iterativ anwenden, um (y_1, θ_1) aus (y_0, θ_0) , (y_2, θ_2) aus (y_1, θ_1) usw. zu bestimmen, am einfachsten mithilfe einer geeigneten Software.

Es wird sich als nützlich erweisen, Gleichungen herzuleiten, die die Dynamik der Höhe y_m , $m = 0, 1, \dots$, unabhängig von den Winkeln θ_m beschreiben. Das können wir erreichen, indem wir θ_m aus den Gln. (1.59) und (1.60) eliminieren. Aus Gl. (1.59) erhalten wir

$$\theta_m = \frac{y_{m+1} - Ay_m}{B}. \quad (1.61)$$

Nun ersetzen wir in Gl. (1.61) m durch $m+1$ und finden

$$\theta_{m+1} = \frac{y_{m+2} - Ay_{m+1}}{B}. \quad (1.62)$$

Durch Einsetzen der Gln. (1.61) und (1.62) in Gl. (1.60) bekommen wir

$$y_{m+2} = 2By_{m+1} - F^2y_m, \quad (1.63)$$

wobei

$$b = \frac{A+D}{2}, \quad (1.64)$$

$$F^2 = AD - BC = \det[\mathbf{M}] \quad (1.65)$$

ist und $\det[\mathbf{M}]$ die Determinante von $\mathbf{M}$ bedeutet.

Gleichung (1.63) ist eine lineare Differenzgleichung für die Strahlhöhe y_m . Sie kann iterativ gelöst werden, indem man y_2 aus y_0 und y_1 berechnet, danach y_3 aus y_1 und y_2 und so weiter. Die Größe y_1 kann mithilfe von Gl. (1.59) mit $m = 0$ aus y_0 und θ_0 berechnet werden.

Es ist jedoch hilfreich, durch Lösung der Differenzgleichung (1.63) einen expliziten Ausdruck für y_m anzugeben. Genau wie bei Differentialgleichungen ist auch bei Differenzgleichungen eine Lösung eindeutig, wenn sie die Differenzgleichung löst und die Anfangsbedingungen erfüllt. Wir können daher einen sinnvollen Ansatz für die Lösung von Gl. (1.63) wählen. Wir verwenden eine Probefunktion der geometrischen Form

$$y_m = y_0 h^m \quad (1.66)$$

mit einer Konstante h . Einsetzen von Gl. (1.66) in Gl. (1.63) zeigt sofort, dass die Probefunktion geeignet ist, sofern h die quadratische algebraische Gleichung

$$h^2 - 2bh + F^2 = 0 \quad (1.67)$$

erfüllt, woraus

$$h = b \pm i\sqrt{F^2 - b^2} \quad (1.68)$$

folgt.

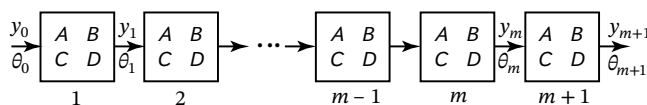


Abb. 1.42 Eine Folge von identischen optischen Systemen.

Wir können das Ergebnis in einer kompakteren Form angeben, indem wir die Variable

$$\varphi = \cos^{-1}(b/F) \quad (1.69)$$

definieren, sodass $b = F \cos \varphi$, $\sqrt{F^2 - b^2} = F \sin \varphi$ und daher $h = F(\cos \varphi \pm i \sin \varphi) = F \exp(\pm i\varphi)$ ist. Damit wird Gl. (1.66) zu $y_m = y_0 F^m \exp(\pm im\varphi)$.

Eine allgemeine Lösung erhalten wir aus den beiden Lösungen mit positivem und negativem Vorzeichen, indem wir eine passende Linearkombination bilden. Die Summe der beiden Exponentialfunktionen kann als harmonische (Kreis-) Funktion geschrieben werden, sodass

$$y_m = y_{\max} F^m \sin(m\varphi + \varphi_0), \quad (1.70)$$

wobei $y_{\max}$ und φ_0 Konstanten sind, die aus den Anfangsbedingungen y_0 und y_1 bestimmt werden müssen. Für $m = 0$ erhalten wir insbesondere $y_{\max} = y_0 / \sin \varphi_0$.

Der Parameter F hängt mit der Determinante der Strahltransfermatrix der einzelnen Einheiten durch $F = \sqrt{\det[\mathbf{M}]}$ zusammen. Man kann zeigen, dass unabhängig von der Art der einzelnen Einheiten $\det[\mathbf{M}] = n_1/n_2$ gilt, wobei n_1 und n_2 die Brechungsindizes am Beginn und am Ende der Einheit sind. Dieses allgemeine Ergebnis kann für die Strahltransfermatrizen aller in diesem Abschnitt diskutierten optischen Komponenten verifiziert werden. Da die Determinante des Produkts zweier Matrizen gleich dem Produkt ihrer Determinanten ist, muss die Beziehung $\det[\mathbf{M}] = n_1/n_2$ für jede beliebige Folge dieser optischen Komponenten gelten. Wenn zum Beispiel $\det[\mathbf{M}_1] = n_1/n_2$ und $\det[\mathbf{M}_2] = n_2/n_3$ ist, dann folgt sofort $\det[\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1] = (n_2/n_3)(n_1/n_2) = n_1/n_3$. In den meisten Anwendungen bestehen Anfang und Ende der Einheiten einfach aus Luft ($n = 1$) und es gilt $n_1 = n_2$, sodass $\det[\mathbf{M}] = 1$ und $F = 1$ ist. In diesem Fall ist die Lösung für die Strahlhöhe

$$y_m = y_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_0). \quad (1.71)$$

Wir werden im Folgenden $F = 1$ annehmen. Die entsprechende Lösung für den Strahlwinkel erhalten wir mithilfe der Beziehung $\theta_m = (y_{m+1} - A y_m)/B$, die aus Gl. (1.59) folgt.

Bedingungen für einen harmonischen Strahlverlauf

Damit y_m eine harmonische (anstatt hyperbolische) Funktion ist, muss $\varphi = \cos^{-1} b$ reell sein. Dazu muss

$$|b| \leq 1 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}|A + D| \leq 1 \quad (1.72)$$

gelten. Wenn stattdessen $|b| > 1$ ist, ist φ imaginär und wir erhalten eine hyperbolische Funktion ($\cosh$ oder $\sinh$) als Lösung, die unbegrenzt ansteigt wie in Abb. 1.43(a). Eine harmonische Lösung stellt sicher, dass y_m für alle Werte von m beschränkt ist und einen Maximalwert $y_{\max}$ besitzt. Die Schranke $|b| \leq 1$ liefert daher eine **Stabilitätsbedingung** für den Strahlweg.

Da sowohl y_m als auch y_{m+1} harmonische Funktionen sind, gilt dies auch für den Strahlwinkel gemäß Gl. (1.71), wie aus Gl. (1.61) und trigonometrischen Identitäten folgt. Folglich ist $\theta_m = \theta_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_1)$, wobei die Konstanten $\theta_{\max}$ und φ_1 aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Der maximale Winkel $\theta_{\max}$ muss hinreichend klein sein, damit die paraxiale Näherung, die unserer Analyse zugrunde liegt, anwendbar ist.

Bedingungen für einen periodischen Strahlverlauf

Die harmonische Funktion (1.71) ist periodisch in m , sofern eine ganze Zahl s existiert, sodass $y_{m+s} = y_m$ für alle m . Die kleinste solche ganze Zahl ist die Periode. In diesem Fall kehrt der Strahl nach s Abschnitten auf seine eigene Bahn zurück. Die Bedingung ist erfüllt, wenn $s\varphi = 2\pi q$ ist, wobei q eine ganze Zahl ist. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine periodische Bahn ist somit, dass $\varphi/2\pi$ eine rationale Zahl q/s sein

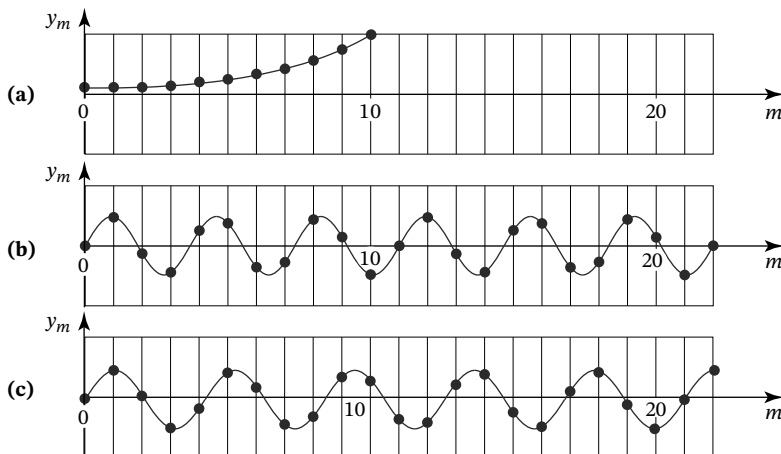


Abb. 1.43 Beispiele für Strahlverläufe in optischen Systemen: (a) instabile Bahn ($b > 1$); (b) stabile periodische Bahn ($\varphi = 6\pi/11$; Periode 11 Abschnitte); (c) stabile nichtperiodische Bahn ($\varphi = 1.5$).

muss. Wenn z. B. $\varphi = 6\pi/11$ ist, ist $\varphi/2\pi = \frac{3}{11}$ und die Bahn ist periodisch mit einer Periode von $s = 11$ Abschnitten. Dieser Fall ist in Abb. 1.43(b) dargestellt. In Kapitel 7 beschäftigen wir uns ausführlicher mit periodischen optischen Systemen.

Beispiel 1-3: Eine Folge von äquidistanten identischen Linsen

Eine Folge von identischen Linsen der Brennweite f im Abstand d (Abb. 1.44) kann zur Führung von Licht zwischen zwei Orten dienen. Die Grundeinheit, ein freier Raum der Länge d gefolgt von einer Linse, besitzt eine Strahltransfermatrix gemäß Gl. (1.51); $A = 1$, $B = d$, $C = -1/f$, $D = 1 - d/f$. Für den Parameter b gilt $b = \frac{1}{2}(A + D) = 1 - d/2f$, und die Determinante ist 1. Die Stabilitätsbedingung für den Strahlverlauf, $|b| \leq 1$ oder $-1 \leq b \leq 1$, lautet daher

$$0 \leq d \leq 4f; \quad (1.73)$$

der Abstand zwischen den Linsen muss also kleiner sein als die vierfache Brennweite. Unter dieser Bedingung folgen paraxiale Strahlen der harmonischen Funktion

$$y_m = y_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_0), \quad \varphi = \cos^{-1} \left(1 - \frac{d}{2f} \right). \quad (1.74)$$

Für $d = 2f$ ist $\varphi = \pi/2$ und $\varphi/2\pi = \frac{1}{4}$, und der Verlauf eines beliebigen Strahls ist periodisch mit einer Periode von vier Abschnitten. Für $d = f$ ist $\varphi = \pi/3$ und $\varphi/2\pi = \frac{1}{6}$, und der Verlauf des Strahls ist periodisch mit einer Periode von sechs Abschnitten. Diese Fälle sind in Abb. 1.45 dargestellt.

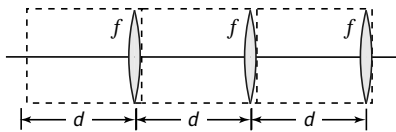
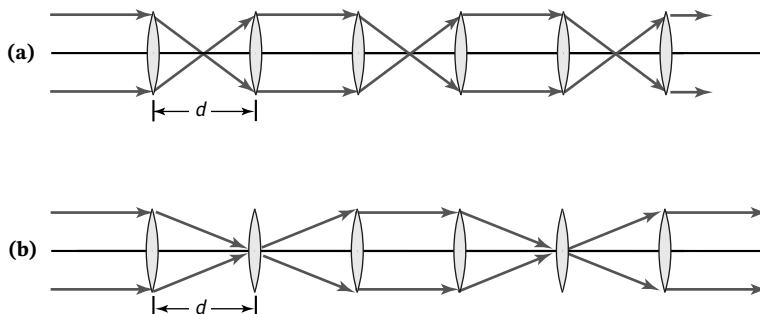


Abb. 1.44 Eine periodische Folge von Linsen.



Zusammenfassung

Ein paraxialer Strahl ($\theta_{\max} \ll 1$), der eine Folge von identischen Systemen mit einer Strahltransfermatrix (A, B, C, D) mit $AD - BC = 1$ passiert, folgt einer harmonischen (und folglich beschränkten) Bahn, wenn die Stabilitätsbedingung $|\frac{1}{2}(A + D)| \leq 1$ erfüllt ist. Seine Position nach dem m ten Abschnitt ist dann $y_m = y_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_0)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, wobei $\varphi = \cos^{-1}[\frac{1}{2}(A + D)]$ ist. Die Konstanten $y_{\max}$ und φ_0 sind durch die Anfangsbedingungen y_0 und $y_1 = Ay_0 + B\theta_0$ bestimmt, wenn θ_0 der Anfangswinkel des Strahls ist. Die Winkel des Strahls hängen gemäß $\theta_m = (y_{m+1} - Ay_m)/B$ mit der Strahlhöhe zusammen und werden durch eine harmonische Funktion $\theta_m = \theta_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_1)$ beschrieben. Der Strahlverlauf ist periodisch mit einer Periode s , wenn $\varphi/2\pi$ eine rationale Zahl q/s ist.

Übung 1-15: Eine periodische Folge von Paaren unterschiedlicher Linsen

Betrachten Sie den Verlauf von paraxialen Strahlen durch ein periodisches System, das aus einer Folge von Linsenpaaren mit den alternierend angeordneten Brennweiten f_1 und f_2 besteht (Abb. 1.46). Zeigen Sie, dass der Strahlverlauf beschränkt (stabil) ist, wenn

$$0 \leq \left(1 - \frac{d}{2f_1}\right) \left(1 - \frac{d}{2f_2}\right) \leq 1 \quad (1.75)$$

gilt.

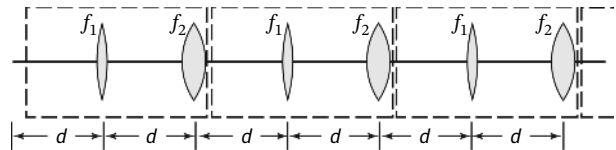


Abb. 1.46 Eine periodische Folge von Linsenpaaren.

Abb. 1.45 Beispiele für stabile Strahlverläufe in einem periodischen System aus Linsen: (a) $d = 2f$; (b) $d = f$.

Übung 1-16: Ein optischer Resonator

Paraxiale Strahlen werden wiederholt zwischen zwei sphärischen Spiegeln mit den Radien R_1 und R_2 reflektiert, die in einem Abstand d voneinander stehen (Abb. 1.47). Betrachten Sie diese Anordnung als periodisches System, dessen Grundeinheit eine einzelne Runde des Strahls zwischen den Spiegeln ist. Bestimmen Sie die Stabilitätsbedingung für den Strahlverlauf. Mit optischen Resonatoren werden wir uns in Kapitel 11 genauer befassen.

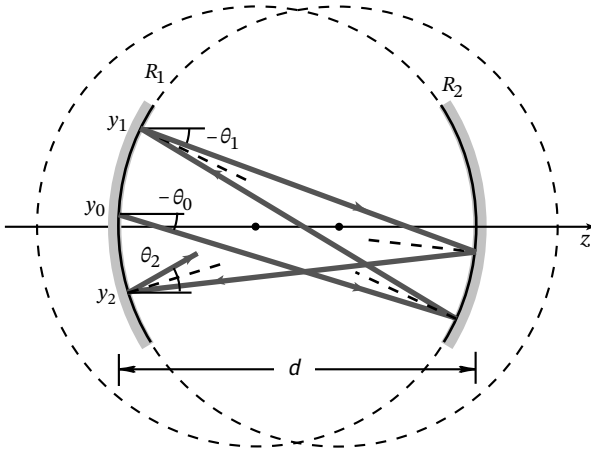


Abb. 1.47 Ein optischer Resonator als periodisches optisches System.

Aufgaben**Aufgabe 1-1: Fermats Prinzip für maximale Laufzeit**

Betrachten Sie den elliptischen Spiegel aus Abb. 1.48(a), dessen Brennpunkte mit A und B bezeichnet sind. Aus geometrischen Gründen ist die Länge der Strecke APB identisch zu $AP'B$ und $AP''B$ für benachbarte Punkte P' und P'' auf der Ellipse. (a) Betrachten Sie nun einen anderen Spiegel mit einem kleineren Krümmungsradius als der elliptische Spiegel, der wie in Abb. 1.48(b) ge-

zeigt an einem Punkt P tangential an diesem anliegt. Zeigen Sie, dass die Strecke APB , die der Lichtstrahl auf seinem Weg von A nach B zurücklegt, jetzt ein Weg *maximaler* Zeit ist, d. h., die benötigte Zeit ist größer als für die benachbarten Wege $AQ'B$ und $AQ''B$. (b) Betrachten Sie schließlich einen Spiegel, der die Ellipse schneidet, aber in P tangential an ihr liegt wie in Abb. 1.48(c) gezeigt. Zeigen Sie, dass die möglichen Strahlwege $AQ'B$, APB und $AQ''B$ einem Wendepunkt der Zeit bei Variation von P entsprechen.

Aufgabe 1-2: Durchgang durch ebene Platten

(a) Verwenden Sie das Snelliussche Gesetz, um zu zeigen, dass ein Strahl, der durch eine ebene Platte mit der Dicke d und dem Brechungsindex n_1 (in Luft, $n \approx 1$) hindurchtritt, parallel zur Einfallsrichtung wieder austritt. Der Strahl muss dabei nicht paraxial sein. Leiten Sie einen Ausdruck für die seitliche Versetzung des Strahls als Funktion des Einfallswinkels θ her. Erklären Sie ihr Ergebnis mithilfe von Fermats Prinzip. (b) Zeigen Sie, dass auch wenn die Platte durch einen Stapel von N parallelen Schichten mit den Dicken $d_1, d_2, \dots, d_N$ und den Brechungsindizes $n_1, n_2, \dots, n_N$ ersetzt wird, der austretende Strahl wieder parallel zum einfallenden Strahl ist. Zeigen Sie weiter, dass wenn θ_m der Winkel des Strahls in der m ten Schicht ist, $n_m \sin \theta_m = \sin \theta$ gilt ($m = 1, 2, \dots$).

Aufgabe 1-3: Linse in Wasser

Bestimmen Sie die Brennweite f einer bikonvexen Linse mit den Radien 20 cm und 30 cm und dem Brechungsindex $n = 1.5$. Wie groß ist die Brennweite der Linse in Wasser ($n = \frac{4}{3}$)?

Aufgabe 1-4: Numerische Apertur einer nicht ummantelten Faser

Bestimmen Sie die numerische Apertur und den Akzeptanzwinkel eines Lichtleiters mit einem Brechungsindex des Kerns von $n_1 = 1.46$, dessen Mantel entfernt (bzw. durch Luft ersetzt, $n_2 \approx 1$) wurde.

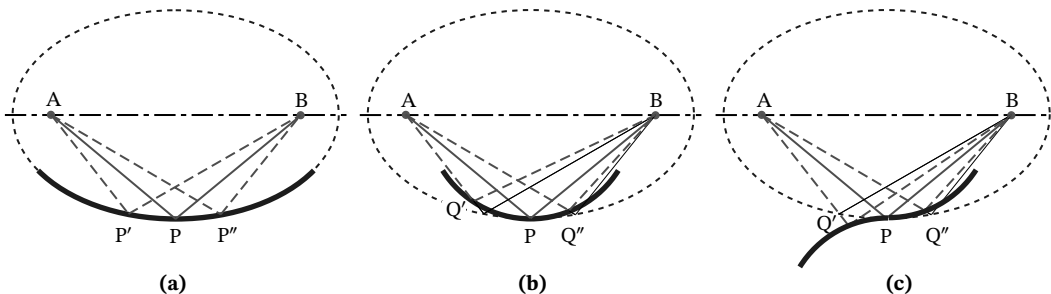


Abb. 1.48 (a) Reflexion an einem elliptischen Spiegel. (b) Reflexion an einem einbeschriebenen tangentialen Spiegel mit größerer Krümmung. (c) Reflexion an einem tangentialen Spiegel, dessen Krümmung von konkav zu konvex wechselt.

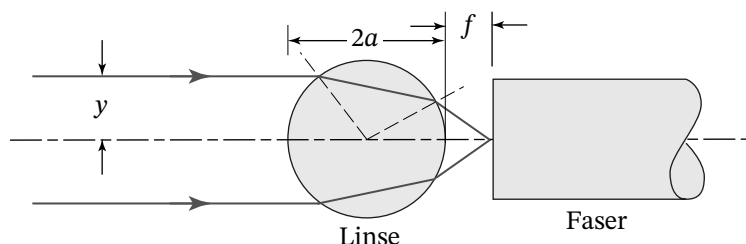


Abb. 1.49 Bündelung von Licht in einen Lichtleiter mithilfe einer Glaskugel.

Aufgabe 1-5: Kopplung von Lichtleitern

Um Licht in Lichtleiter ein- oder aus ihnen auszukoppeln, werden oft winzige Glaskugeln als Linsen verwendet. Das Ende der Faser liegt dabei in einem Abstand f von der Kugel. Bestimmen Sie f für eine Kugel mit dem Radius $a = 1 \text{ mm}$ und dem Brechungsindex $n = 1.8$, so dass ein zur optischen Achse paralleler Strahl in einem radialen Abstand von $y = 0.7 \text{ mm}$ auf die Faser gebündelt wird, wie in Abb. 1.49 dargestellt.

Aufgabe 1-6: Auskoppeln von Licht aus einem Medium mit großem Brechungsindex

Nehmen Sie an, dass Licht in einem Parallelepiped mit dem Brechungsindex $n = 3.7$ erzeugt wird und sich isotrop ausbreitet (siehe Übung 1-7). Das Material soll von Luft ($n = 1$) umgeben sein. (a) Welcher Anteil des erzeugten Lichts kann aus der Stirnseite des Parallelepipeds ausgekoppelt werden, wenn alle Seiten bis auf die Stirnseite mit einem reflektierenden Material beschichtet werden, das als idealer Spiegel wirkt? (b) Vergrößert sich der Anteil des ausgekoppelten Lichts, wenn die Frontseite mit einem transparenten Material mit dem Brechungsindex $n = 1.4$ beschichtet wird?

Aufgabe 1-7: Platte mit axial variablem Brechungsindex

Eine Platte der Dicke d liegt senkrecht zur z -Achse. Ihr Brechungsindex $n(z)$ ist in z -Richtung variabel. Zeigen Sie, dass ein unter einem Winkel θ_0 in der yz -Ebene aus Luft in die Platte einfallender Strahl an der Position z in der Platte einen Winkel $\theta(z)$ besitzt, der die Beziehung $n(z) \sin \theta(z) = \sin \theta_0$ erfüllt. Zeigen Sie weiter, dass der Strahl parallel zum einfallenden Strahl austritt. *Hinweis:* Verwenden Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 1-2. Zeigen Sie, dass die Strahlhöhe $y(z)$ in der Platte die Differentialgleichung $(dy/dz)^2 = (n^2/\sin^2 \theta - 1)^{-1}$ erfüllt.

Aufgabe 1-8: Strahlverläufe in Fasern mit variablem Brechungsindex

Betrachten Sie eine Faser mit radial variablem Brechungsindex $n(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ um die z -Achse. (ρ, ϕ, z) sei der Ortsvektor in Zylinderkoordinaten. Formulieren Sie die paraxiale Strahlengleichung (1.22) in

Zylinderkoordinaten und geben Sie Differentialgleichungen für ρ und ϕ als Funktionen von z an.

Aufgabe 1-9: Die Strahltransfermatrix eines Linsensystems

Bestimmen Sie die Strahltransfermatrix eines optischen Systems aus einer dünnen Konvexlinse der Brennweite f und einer dünnen Konkavlinse der Brennweite $-f$ in einem Abstand f . Diskutieren Sie die Abbildungseigenschaften dieser zusammengesetzten Linse.

Aufgabe 1-10: Die Strahltransfermatrix einer SELFOC-Platte

Bestimmen Sie die Strahltransfermatrix einer SELFOC-Platte [d. h. eines Materials mit parabolischem Indexprofil, $n(y) \approx n_0(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 y^2)$] der Dicke d .

Aufgabe 1-11: Eine SELFOC-Platte als periodisches System

Betrachten Sie den Verlauf paraxialer Strahlen in einer SELFOC-Platte senkrecht zur z -Achse. Sie können dieses System als periodisches System aus identischen miteinander verbundenen Platten der Dicke d betrachten. Verwenden Sie das Ergebnis von Aufgabe 1-10 und geben Sie die Stabilitätsbedingung für den Strahlverlauf an. Hängt die Bedingung von d ab?

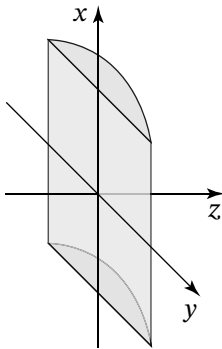
Aufgabe 1-12: Rekursionsbeziehung für einen Resonator aus ebenen Spiegeln

Betrachten Sie einen optischen Resonator aus ebenen Spiegeln im Abstand d als periodisches optisches System. Geben Sie die Strahltransfermatrix für die Grundeinheit dieses Systems an und zeigen Sie, dass $b = 1$ und $F = 1$ ist. Zeigen Sie, dass die quadratische Gleichung (1.67) in diesem Fall nur eine einzige Wurzel besitzt, sodass die Höhe des Strahls dann der Beziehung $\alpha + m\beta$ mit Konstanten α und β folgt.

Aufgabe 1-13: 4×4-Strahltransfermatrix für schiefl verlaufende Strahlen

Matrixmethoden lassen sich verallgemeinern, um auch schiefl zur optischen Achse verlaufende paraxiale Strahlen in zylindersymmetrischen oder astigmatischen (nicht zylindersymmetrischen) Systemen beschreiben

zu können. Ein Strahl, der die Ebene $z = 0$ schneidet, wird allgemein durch vier Variablen beschrieben: die Koordinaten (x, y) seiner Lage in der Ebene und die Winkel (θ_x, θ_y) seiner Projektionen in die xz - und yz -Ebenen zur z -Achse. Auch der austretende Strahl ist durch vier Variablen charakterisiert, die linear mit den ursprünglichen Variablen verknüpft sind. In der paraxialen Näherung kann das System daher vollständig



beschrieben werden. (a) Geben Sie die 4×4 -Strahltransfermatrix einer Strecke d im Vakuum an. (b) Bestimmen Sie die 4×4 -Strahltransfermatrix einer dünnen Zylinderlinse mit der Brennweite f , die entlang der y -Achse liegt. Die Zylinderlinse hat eine Brennweite f für Strahlen in der yz -Ebene, besitzt aber keine Brechkraft für Strahlen in der xz -Ebene.

Weiterführende Literatur

Allgemeines

- F. L. Pedrotti, L. M. Pedrotti, L. S. Pedrotti, *Introduction to Optics*, Cambridge University Press, 3. Aufl. 2018.
- T.-C. Poon, T. Kim, *Engineering Optics with MATLAB*, World Scientific, 2. Aufl. 2018.
- E. Hecht, *Optik*, de Gruyter, 7. Aufl. 2018.
- S. D. Gupta, N. Ghosh, A. Banerjee, *Wave Optics: Basic Concepts and Contemporary Trends*, CRC Press/Taylor & Francis 2016.
- B. D. Guenther, *Modern Optics*, Oxford University Press, 2. Aufl. 2015.
- C. A. DiMarzio, *Optics for Engineers*, CRC Press/Taylor & Francis 2011.
- M. Mansuripur, *Classical Optics and Its Applications*, Cambridge University Press, 2. Aufl. 2009.
- A. Walther, *The Ray and Wave Theorie of Lenses*, Cambridge University Press 1995, Paperback 2006.
- A. Siciliano, *Optics: Problems and Solutions*, World Scientific 2006.
- M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, 7. Aufl. 2002.
- D. T. Moore (Hrsg.), *Selected Papers on Gradient-Index Optics*, SPIE Optical Engineering Press 1993 (Milestone Series Bd. 67).
- F. A. Jenkins, H. E. White, *Fundamentals of Optics*, McGraw-Hill 1937, 4. Aufl. 1991.
- R. W. Wood, *Physical Optics*, Macmillan, 3. Aufl. 1934; Optical Society of America 1988.

- A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics: Optics*, Academic Press, Paperback 1954.

Geometrische Optik

- P. D. Lin, *Advanced Geometrical Optics*, Springer 2017.
- V. N. Mahajan, *Fundamentals of Geometrical Optics*, SPIE Optical Engineering Press 2014.
- E. Dereniak, T. D. Dereniak, *Geometrical and Trigonometric Optics*, Cambridge University Press 2008.
- Yu. A. Kravtsov, *Geometrical Optics in Engineering Physics*, Alpha Science 2005.
- J. E. Greivenkamp, *Field Guide to Geometrical Optics*, SPIE Optical Engineering Press 2004.
- P. Mouroulis, J. Macdonald, *Geometrical Optics and Optical Design*, Oxford University Press 1997.

Optische Systeme

- D. Malacara-Hernandez, Z. Malacara-Hernandez, *Handbook of Optical Design*, CRC Press/Taylor & Francis, 3. Aufl. 2013.
- J. Sasian, *Introduction to Aberrations in Optical Imaging Systems*, Cambridge University Press 2013.
- K. J. Kasunic, *Optical Systems Engineering*, McGraw-Hill 2011.
- R. E. Fischer, B. Tadic-Galeb, P. R. Yoder, *Optical System Design*, McGraw-Hill, 2. Aufl. 2008.
- W. J. Smith, *Modern Optical Engineering*, McGraw-Hill, 4. Aufl. 2008.
- D. C. O'Shea, *Elements of Modern Optical Design*, Wiley 1985.

Matrizenoptik

- A. Gerrard, J. M. Burch, *Introduction to Matrix Methods in Optics*, Wiley 1975; Dover, Paperback 1994.
- J. W. Blaker, *Geometric Optics: The Matrix Theory*, Marcel Dekker 1971.

Populäre und historische Darstellungen

- R. J. Weiss, *A Brief History of Light and Those that Lit the Way*, World Scientific 1996.
- A. R. Hall, *All was Light: An Introduction to Newton's Opticks*, Clarendon Press/Oxford University Press 1993.
- R. Kingslake, *A History of the Photographic Lens*, Academic Press 1989.
- M. I. Sobel, *Light*, University of Chicago Press 1987.
- A. I. Sabra, *Theories of Light from Descartes to Newton*, Cambridge University Press 1981.
- V. Ronchi, *The Nature of Light: An Historical Survey*, Harvard University Press 1970.
- W. H. Bragg, *Universe of Light*, Dover, Paperback 1959.
- I. Newton, *Opticks or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections & Colours of Light*, 4. Aufl. 1704; Dover, Nachdruck 1979.