

Mat **MEHR
ERFAHREN**

Fachhochschule
Berufskolleg
Baden-Württemberg

Das musst du können!



STARK

Inhalt

Gleichungen und Gleichungssysteme

1 Gleichungen	1
1.1 Quadratische Gleichungen	1
1.2 Exponentialgleichungen	1
1.3 Nullprodukt und Substitution	2
1.4 Trigonometrische Gleichungen	3
2 Lineare Gleichungssysteme	3

Funktionen und ihre Schaubilder

1 Elementare Funktionen	6
1.1 Potenz- und Polynomfunktionen	6
1.2 Natürliche Exponentialfunktion	7
1.3 Sinus- und Kosinusfunktion (trigonometrische Funktionen)	9
2 Eigenschaften von Schaubild und Funktion	11
2.1 Entwicklung von Funktionen	11
2.2 Vielfachheit von Nullstellen	13
2.3 Symmetrie (bzgl. des Koordinatensystems)	14
2.4 Asymptotisches Verhalten	15

Differenzial- und Integralrechnung

1 Ableitung	17
1.1 Bedeutung der Ableitung	17
1.2 Ableitungen der Grundfunktionen	17
1.3 Ableitungsregeln	18
1.4 Tangente	18

2	Untersuchung von Funktionen, Anwendungen der Ableitung	19
2.1	Monotonieverhalten, Extrempunkte	19
2.2	Krümmungsverhalten, Wendepunkte	22
2.3	Optimierungsprobleme	25
3	Stammfunktion und bestimmtes Integral	29
3.1	Stammfunktion	29
3.2	Bestimmtes Integral und Flächenberechnung	31
3.3	Bestandsrekonstruktionen	35
4	Bestimmung von Funktionstermen	36
4.1	Polynomfunktion	36
4.2	Exponentialfunktion	41
4.3	Trigonometrische Funktion	43
	Stichwortverzeichnis	47

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie für die Prüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife im Fach Mathematik benötigen. Es führt Sie systematisch durch den gesamten Stoff und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Prüfungsvorbereitung. Ein Großteil der Inhalte dieses Heftes wird auch im Pflichtteil abgefragt. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor der schriftlichen Prüfung.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den jeweiligen Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch das Symbol  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Fachhochschulreifeprüfung!

STARK Verlag

Offizielle Prüfungsaufgaben und weitere Übungsaufgaben für die Prüfung mit vollständigen Lösungen enthält das Buch „Fachhochschulreifeprüfung, Berufskolleg, Baden-Württemberg, Mathematik“ (Bestell-Nr. 822500).

Funktionen und ihre Schaubilder

1 Elementare Funktionen

1.1 Potenz- und Polynomfunktionen

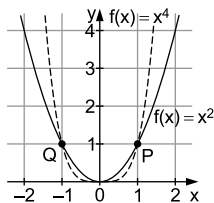
Potenzfunktionen sind Funktionen der Form: $f: x \mapsto x^k$ mit $k \in \mathbb{N}$
Ihre Schaubilder sind **Parabeln** (für $k \geq 2$).

Unter einer **Polynomfunktion vom Grad n** versteht man eine Funktion der Form: $f: x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$; $x \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$

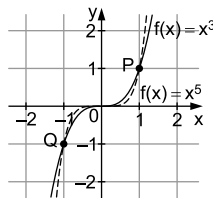
Die Werte $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ heißen **Koeffizienten**.

Typische Verläufe der Parabeln

n gerade; Werte in $\mathbb{R}_0^+$



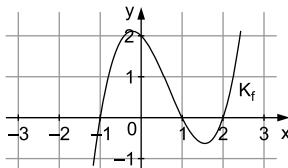
n ungerade; Werte in $\mathbb{R}$



Die Nullstellen einer Polynomfunktion können der Linearfaktorzerlegung entnommen werden (vgl. auch Abschnitt 2.2).



$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ &= (x-2)(x^2-1) \\ &= (x-2)(x+1)(x-1) \\ \Rightarrow \text{Nullstellen bei } x &= 2, \\ &x = -1 \text{ und } x = 1 \end{aligned}$$

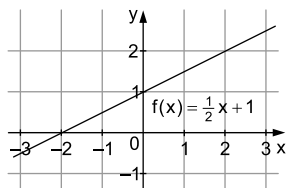


Spezialfälle

Lineare Funktion:

$$f(x) = mx + t \quad (\text{Grad } 1)$$

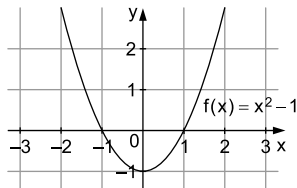
Das Schaubild ist eine Gerade.



Quadratische Funktion:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (\text{Grad } 2)$$

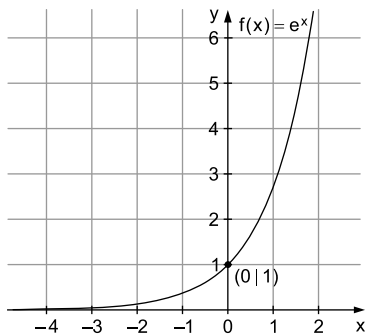
Das Schaubild ist eine Parabel.



1.2 Natürliche Exponentialfunktion

- Die natürliche Exponentialfunktion lautet $f: x \mapsto e^x$; $x \in \mathbb{R}$.
- Es gilt: $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (Werte liegen in $\mathbb{R}^+$)
- Die e-Funktion hat keine Nullstellen.
- Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad (y = 0 \text{ ist waagrechte Asymptote.}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$



Bei der Untersuchung von Exponentialfunktionen (Bestimmung von Nullstellen etc.) müssen oft Exponentialgleichungen gelöst werden; dabei spielt die Umkehrung der e-Funktion (der natürliche Logarithmus $\ln$) eine wichtige Rolle (vgl. Seite 1).



1. Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion $f(x) = e^x - 1$; $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

4 Bestimmung von Funktionstermen

Durch eine sogenannte Kurvendiskussion (Untersuchung des Monotonie- und Krümmungsverhaltens) lassen sich verschiedene Eigenschaften einer gegebenen Funktion und die charakteristischen Punkte des zugehörigen Schaubilds ermitteln.

In der praktischen Mathematik tritt oft das umgekehrte Problem auf: Aus vorgegebenen Eigenschaften einer Funktion und ihres Schaubilds soll der zugehörige Funktionsterm bestimmt werden. Dazu werden die gegebenen Eigenschaften der Funktion in mathematische Bedingungen und Gleichungen umgesetzt. Welche Eigenschaften dabei gegeben sein können, hängt davon ab, ob der Term einer Polynomfunktion, einer Exponentialfunktion oder einer trigonometrischen Funktion gesucht ist. Die Vorgehensweise ist dabei immer gleich:

Schritt 1: Aufstellen der allgemeinen Funktionsgleichung von f , ggf. unter Ausnutzung möglicher Symmetrieeigenschaften. Bilden der 1. und 2. Ableitung in allgemeiner Form, falls benötigt.

Schritt 2: Im Aufgabentext nach mindestens so vielen verschiedenen Angaben suchen, wie Koeffizienten in der Funktionsgleichung enthalten sind. Jede Angabe wird in eine (lineare) Bestimmungsgleichung für die gesuchten Koeffizienten übersetzt.

Schritt 3: Lösen des (linearen) Gleichungssystems, das sich aus den Bestimmungsgleichungen ergibt.

Schritt 4: Einsetzen der für die Koeffizienten berechneten Werte in die allgemeine Funktionsgleichung von f .

4.1 Polynomfunktion

Die allgemeine Gleichung einer Polynomfunktion lautet:

$$f: x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0; \quad x \in \mathbb{R}$$

Der Grad n wird meistens in der Aufgabenstellung vorgegeben, sodass nur die $n+1$ Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ gesucht sind. Ist zusätzlich bekannt, dass das Schaubild symmetrisch ist, reduziert sich die Anzahl der zu berechnenden Koeffizienten (siehe Seite 14).

Ist f eine Polynomfunktion vom

- Grad 2 mit Achsensymmetrie zur y -Achse, so kann als allgemeine Funktionsgleichung verwendet werden:

$$f(x) = ax^2 + c$$

- Grad 3 mit Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung, so kann als allgemeine Funktionsgleichung verwendet werden:

$$f(x) = ax^3 + cx$$

- Grad 4 mit Achsensymmetrie zur y -Achse, so kann als allgemeine Funktionsgleichung verwendet werden:

$$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

Umsetzung von gegebenen Eigenschaften der Funktion in mathematische Bedingungen und Gleichungen

Eigenschaften (Angaben)	mathematische Übersetzung (Bestimmungsgleichungen)		
	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
Punkt $P(u v) \in K_f$	$f(u) = v$		
Steigung m im Punkt $P(u v) \in K_f$	$f(u) = v$	$f'(u) = m$	
K_f berührt die x -Achse an der Stelle $x = u$	$f(u) = 0$	$f'(u) = 0$	
Extrempunkt $P(u v) \in K_f$	$f(u) = v$	$f'(u) = 0$	
Wendepunkt $W(u v) \in K_f$	$f(u) = v$		$f''(u) = 0$



Eine Polynomfunktion dritten Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt und im Punkt $(1 | 1)$ einen Extrempunkt.

Bestimmen Sie einen Funktionsterm.

Weist das Schaubild eine Symmetrie auf?

Schritt 1:

Allgemeiner Ansatz für eine Polynomfunktion dritten Grades:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad x \in \mathbb{R}$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Schritt 2:

Die Information zum Wendepunkt liefert zwei Bedingungen:

$$f(0)=0 \Rightarrow d=0$$

$$f''(0)=0 \Rightarrow 2b=0 \Rightarrow b=0$$

Auch die Information zum Extrempunkt liefert zwei Bedingungen, wobei die bereits berechneten Werte für die beiden Koeffizienten b und d verwendet werden:

$$f(1)=1 \Rightarrow a+c=1$$

$$f'(1)=0 \Rightarrow 3a+c=0$$

Schritt 3:

Das verbliebene LGS (zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten a und c) kann gelöst werden, indem die erste Gleichung von der zweiten subtrahiert wird:

$$2a=-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \Rightarrow c=\frac{3}{2}$$

Schritt 4:

Ein Funktionsterm lautet:

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x$$

Das Schaubild ist punktsymmetrisch zum Ursprung, weil die x -Terme nur in ungeraden Potenzen im Funktionsterm vorkommen und $f(x)$ kein konstantes Glied enthält.

Der Ansatz für die Polynomfunktion kann auch in der Aufgabenstellung bereits vorgegeben sein, sodass entsprechend weniger Koeffizienten auszurechnen sind.



Das Schaubild einer Polynomfunktion f der Form $f(x)=ax^3+bx+c$ verläuft durch die drei Punkte $(1|-1)$, $(-2|-7)$ und $(-3|7)$. Bestimmen Sie einen Funktionsterm.

Schritt 1:

Der Ansatz $f(x)=ax^3+bx+c$ ist gegeben, Ableitungen werden nicht benötigt.



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK