

C Elektrizität

17 Elektrostatische Felder

Die Elektrostatik befasst sich mit ruhenden (statischen) Ladungen. Die Kraftwirkung zwischen Ladungen wird durch elektrische Felder beschrieben.

17.1 Elektrische Ladung

*In der Mechanik gibt es die drei unabhängigen Grundgrößen Masse, Länge und Zeit mit den Einheiten Kilogramm, Meter und Sekunde. Alle anderen Größen wie z. B. Geschwindigkeit oder Kraft werden aus diesen Größen abgeleitet (siehe Abschn. 1.2). In der Elektrodynamik wird eine weitere, vierte Grundgröße benötigt: Die elektrische Ladung mit der **Einheit Coulomb** oder aber die Stromstärke mit der **Einheit Ampere**. Die kleinste Ladungsmenge (außerhalb der Elementarteilchenphysik) ist die sog. Elementarladung e_0 . Protonen haben die Ladung $+e_0$, Elektronen die Ladung $-e_0$.¹*

Nach einem Beschluss der 26sten Generalkonferenz für Maß und Gewicht hat die **Elementarladung** (Protonenladung e_0) seit dem 20. Mai 2020 den *fest fixierten und zukünftig unveränderlichen Wert*

$$e_0 = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C (exakt)} \approx 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (17.1-1)$$

Ich betone nochmals: Zukünftig hat die Elementarladung einen exakt vereinbarten Wert und keine Unsicherheit. *Die Festlegung der Elementarladung definiert auch die Ladungseinheit Coulomb universell und unveränderlich.* Eine Ladung der Größe -1C enthält $10^{19}/1,602\,176\,634$ Elektronen.

Fließende Ladungen erzeugen elektrische Ströme. Die mittlere Stromstärke wird definiert als

¹ Freie Elektronen werden in erster Linie durch den Glüh-effekt, den Photoeffekt oder die Feldemission erzeugt.

$$I_m := \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Damit ist die Einheit Ampere (abgekürzt 'A') der Stromstärke wie folgt festgelegt:

$$1 \text{ Ampere} := \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Sekunde}} \quad \text{oder abgekürzt} \quad 1 \text{ A} := \frac{1 \text{ C}}{\text{s}}$$

Die momentane Stromstärke ist die mittlere Stromstärke im Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$:

$$I(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = \dot{Q}(t) \quad (17.1-2)$$

Dabei ist $Q(t)$ die Ladung, die bis zur Zeit t geflossen ist. Die Stromstärke wird also mit der Elementarladung e_0 definiert. *Bei einer Stromstärke von 1 A fließen an einer festen Stelle des Leiters pro Sekunde etwa $1/(1,602 \cdot 10^{-19}) \approx 6,25 \cdot 10^{18}$ Elektronen vorbei.*

Bemerkung: Auch in der Mechanik werden die momentanen Größen Geschwindigkeit $v(t)$, Beschleunigung $a(t)$ und Leistung $P(t)$ durch den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ aus mittleren Größen abgeleitet.

Experimentell wurden folgende Aussagen für elektrische Ladungen gefunden:

- Es gibt positive und negative elektrische Ladungen. Willkürlich wurde das Vorzeichen der Elektronenladung als negativ festgesetzt. Ladungen mit gleichem (verschiedenen) Vorzeichen stoßen sich ab (ziehen sich an). Im Gegensatz zur Gravitationskraft, die nur anziehend ist, gibt es hier also anziehende und abstoßende Kräfte.
- Ein Elektron hat die Ladung $-e_0$, ein Proton die Ladung e_0 . *Alle Ladungen Q sind stets ganzzahlige Vielfache der Elementarladung:*

$$Q = k e_0 \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 3, \dots$$

- In abgeschlossenen Systemen, d. h. in Systemen, denen weder Ladungen zugeführt noch entzogen werden, ist die Summe aller Ladungen konstant:

$$\sum_{i=1}^N Q_i = \text{const} \quad \text{in abgeschlossenen Systemen}$$

Der **Ladungserhaltungssatz** ist vor allem in der Elementarteilchenphysik wichtig.

17.2 Die Coulombkraft

Die elektrische Ladung eines Körpers wird durch die Kräfte nachgewiesen, die andere geladene Körper auf ihn ausüben.² Wir betrachten in Abb. 17.2-1 zwei Ladungen Q_0, Q_1 mit den Ortsvektoren $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$. Die Ladungen seien punktförmig, d. h. ihre Ausdehnungen seien viel kleiner als ihr Abstand. In Experimenten ermittelte der französische Physiker

² In gleicher Weise kann die Masse m eines Körpers gemessen werden, indem man die Gravitationskraft der Erde auf ihn misst.

Charles A. Coulomb gegen Ende des 18ten Jahrhunderts, dass die elektrostatische Kraft zwischen ruhenden Ladungen

- proportional zum Produkt $Q_0 Q_1$ der beiden Ladungen ist.
- indirekt proportional zum Quadrat $(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)^2$ des Abstandes ist.
- parallel zur Verbindungslinie der beiden Ladungen ist.

1785 stellte Coulomb das **Coulombsche Gesetz** auf; es beschreibt die **Coulombkraft**, die die Ladung Q_1 auf die Ladung Q_0 ausübt:

$$\mathbf{F}_{01} = k \frac{Q_0 Q_1}{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|}$$

Für spätere Rechnungen ist es vorteilhaft, die Konstante k in der Form $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ zu schreiben. Dann lautet die Coulombkraft der Punktladung Q_1 auf die Punktladung Q_0 ³:

$$\mathbf{F}_{01} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0 Q_1}{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} \quad (17.2-1)$$

ϵ_0 heißt **elektrische Feldkonstante** oder **Dielektrizitätskonstante des Vakuums** oder Influenzkonstante und hat nach den Experimenten den Wert⁴

$$\epsilon_0 = 8,854\,187\,812\,8(13) \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \quad (17.2-2)$$

In der Quantenmechanik beschreiben die Coulombkräfte die Bindung der Elektronen an den Atomkern, die Wechselwirkung zwischen Atomen und Molekülen und schließlich auch die zwischenatomaren Kräfte in Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen.

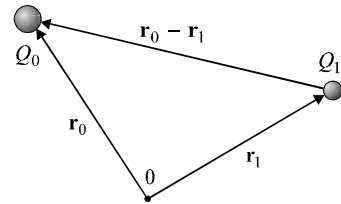


Abb. 17.2-1 Die Coulombkraft zwischen beiden Ladungen ist proportional zum Produkt $Q_0 Q_1$ der Ladungen und indirekt proportional zum Quadrat der Entfernung.

³ Nach Beispiel 17.4-3 gilt die Gl. (17.2-1) auch im Außenraum von allen ausgedehnten, *kugelsymmetrischen* Ladungsverteilungen mit Gesamtladung Q_1 .

⁴ Aus den Maxwell-Gln. ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldkonstante ϵ_0 , der magnetischen Feldkonstante μ_0 (siehe Abschn. 21.2) und der Lichtgeschwindigkeit c :

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \quad (17.2-3)$$

1948 wurde μ_0 durch die Lorentzkraft zwischen zwei parallelen, stromdurchflossenen Leitern *exakt* festgelegt. (Nähere Erläuterungen stehen in Aufgabe 21-8). 1983 wurde c ebenfalls *exakt* vereinbart. Daher wurde ϵ_0 bis 2019 durch die Gl. $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$ genau bestimmt.

2019 traf die 26ste Generalkonferenz für Maß und Gewicht neue Vereinbarungen, die für alle Zeiten gelten sollen; dabei wurde u. a. die Elementarladung e_0 *exakt* festgelegt. Seitdem sind ϵ_0, μ_0 mit Fehlern behaftete Messgrößen.

Das Coulombgesetz (17.2–1) hat die gleiche Form wie das Gravitationsgesetz, das die Anziehungskraft zwischen zwei Massen beschreibt:

$$\mathbf{F}_{01} = -\gamma \frac{m_0 m_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} \quad \text{mit der Gravitationskonstanten} \quad \gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

Der einzige Unterschied besteht darin, dass es nur *positive* Massen und *anziehende* Gravitationskräfte gibt.

Da Coulombkräfte und Gravitationskräfte beide indirekt proportional zum Quadrat des Abstandes sind, hängt ihr Verhältnis nicht vom Abstand ab. Das Verhältnis der beiden Kräfte ist für Protonen mit $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{8,988 \cdot 10^9 \text{ Nm/C}^2 \cdot (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot (1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2} \approx 1,24 \cdot 10^{36}$$

Übrigens: Atomkerne sind trotz der abstoßenden Coulombkräfte zwischen den Protonen stabil, weil Protonen und Neutronen durch die „Starke Wechselwirkung“ zusammengehalten werden, auf die ich nicht weiter eingehe.

Beispiel 17.2–1 Pendel im Gleichgewicht

Zwei kleine Metallkugeln mit Masse m und Ladung Q hängen an Fäden der Länge l im selben Punkt an der Decke (siehe Abb. 17.2–2).

Berechne die Entfernung d der Kugeln im Gleichgewicht für $d \ll l$.

Lösung:

Wir betrachten die rechte Kugel in Abb. 17.2–3. Auf die Kugel wirken die Gewichtskraft $m\mathbf{g}$ und die Coulombkraft $\mathbf{F}_C$. Das rechte Pendel ist genau dann im Gleichgewicht, wenn sein Faden parallel ist zur resultierenden Kraft $m\mathbf{g} + \mathbf{F}_C$, also für

$$\begin{aligned} \varphi = \alpha &\Rightarrow \sin \varphi = \sin \alpha \approx \tan \alpha \\ \Rightarrow \frac{d}{2l} &\approx \frac{F_C}{mg} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{d^2} \frac{1}{mg} \\ \Rightarrow d &\approx \left(\frac{Q^2 l}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

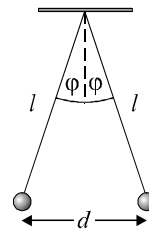


Abb. 17.2–2 Die Coulombkraft drückt die Pendel auseinander.

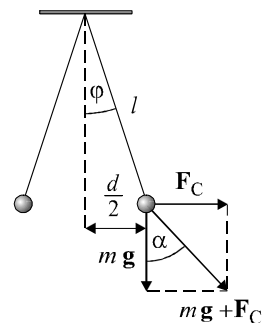


Abb. 17.2–3 Auf die Pendelmass wirkt die Gewichtskraft $m\mathbf{g}$ und die Coulombkraft $\mathbf{F}_C$.

17.3 Das elektrische Feld

Das Coulombgesetz kann leicht auf mehrere ruhende Ladungen verallgemeinert werden (siehe Abb. 17.3–1): n Punktladungen Q_i mit den Ortsvektoren $\mathbf{r}_i$ (und auch n kugel-

symmetrische Ladungsverteilungen mit den Ortsvektoren $\mathbf{r}_i$ ihrer Ladungsmittelpunkte) üben insgesamt auf eine Punktladung q an der Stelle $\mathbf{r}$ die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q Q_i}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (17.3-1)$$

aus. Die gesamte Coulombkraft ist also einfach die Vektorsumme der n einzelnen Coulombkräfte; es gilt das **Superpositionsprinzip**.

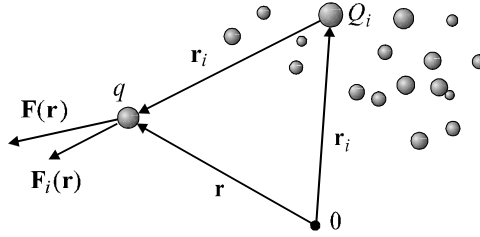


Abb. 17.3-1 Die gesamte Kraft aller Punktladungen Q_i auf die Ladung q ist die Vektorsumme der n Einzelkräfte der i -ten Ladung auf die Ladung q .

Die Kraft $\mathbf{F}$ ist proportional zur Probeladung q und kann wie folgt geschrieben werden:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (17.3-2)$$

Diese Gl. definiert eine neue physikalische Größe, das **elektrische Feld** $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

n Ladungen Q_i mit Ortsvektoren $\mathbf{r}_i$ erzeugen am Ort $\mathbf{r}$ das elektrische Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) := \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (17.3-3)$$

Nach dieser Definition ist das elektrische Feld am Ort $\mathbf{r}$ die Kraft auf eine Probeladung q , die sich am Ort $\mathbf{r}$ befindet, dividiert durch q .

Die Einheit des elektrischen Feldes⁵ ist N/C. Mit der später eingeführten Einheit ‘Volt’ (der Spannung) lautet die Einheit V/m:

$$\text{Einheit des elektrischen Feldes: } \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (17.3-4)$$

⁵ Der Begriff „**Feld**“ ist ein zentraler Begriff in der Physik. Allgemein ist ein Feld eine physikalische Größe, die vom Ort $\mathbf{r}$ und evtl. auch von der Zeit t abhängt. Es gibt zwei Arten von Feldern:

- **Skalare Felder** $F = F(\mathbf{r}, t)$: Ein Beispiel ist das Temperaturfeld $T(\mathbf{r}, t)$, das die Temperaturverteilung beschreibt, indem es jedem Ort $\mathbf{r}$ zu jeder Zeit t eine Temperatur zuordnet.
- **Vektorfelder** $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$: Beispiele sind das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und das später eingeführte Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

Das elektrische Feld, das die Ladungen Q_i erzeugen, ist unabhängig von der Probeladung q und hängt nur von der Verteilung und der Größe der Ladungen Q_i ab. Nach dem Superpositionsprinzip überlagern sich die elektrischen Felder mehrerer Ladungen linear. Das elektrische Feld einer positiven (negativen) Punktladung zeigt radial nach außen (innen).

Nach Gl. (17.3–5) lassen sich elektrische Felder durch Kräfte auf Probeladungen messen.

Dabei muss die Probeladung q so klein sein, dass sie die Verteilung der Ladungen Q_i , d. h. die Ortsvektoren $\mathbf{r}_i$ durch rückwirkende Kräfte nicht (wesentlich) ändert. Andernfalls würde sich das zu messende Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ bei der Messung ändern.

Beispiel 17.3–1 Feldstärke im Fernfeld eines Dipols

Ein **Dipol** besteht aus zwei entgegengesetzt gleichen Ladungen mit dem Abstand $2d$. Betrachte einen Dipol, dessen Ladungen übereinander liegen und berechne das elektrische Feld im Punkt P, der im Fernfeld ($r \gg d$) auf einer horizontalen Gerade liegt, die die Verbindungslinie beider Ladungen in der Mitte senkrecht schneidet.

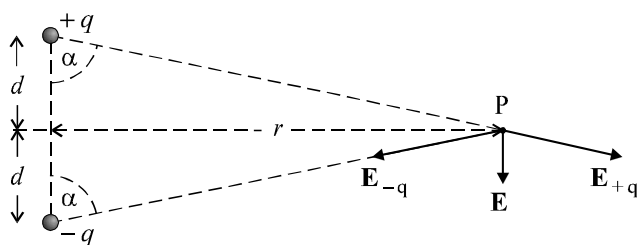


Abb. 17.3–2 Dipol mit elektrischen Feldern im Fernpunkt P. Es gelte: $q > 0$

Lösung:

Im Punkt P sind die Beträge der beiden elektrischen Felder, die von den beiden Ladungen erzeugt werden, gleich groß und lauten

$$E_{+q} = E_{-q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + d^2}$$

Die horizontalen Komponenten der beiden Vektorfelder $\mathbf{E}_{+q}, \mathbf{E}_{-q}$ heben sich nach Abb. 17.3–2 gegenseitig auf; die vertikalen Komponenten haben dieselbe Richtung und addieren sich daher. Die Summe $\mathbf{E}$ der beiden Vektorfelder $\mathbf{E}_{+q}, \mathbf{E}_{-q}$ ist vertikal und hat den Betrag

$$\begin{aligned} E &= 2E_{+q} \cos \alpha = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + d^2} \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}} = \\ &= \frac{2dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \quad (\text{exakt auch im Nahfeld}) \end{aligned} \quad (17.3-6a)$$

$$\Rightarrow E \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nur für } r \gg d}}{\approx} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2dq}{r^3} \quad (\text{nur im Fernfeld}) \quad (17.3-6b)$$

Der Ladungsabstand $2d$ und die Ladung q treten im Fernfeld nur als Produkt auf. Da dieses Ergebnis für alle Punkte im Fernfeld gilt (also auch für Punkte, die nicht auf der gestrichelten, horizontalen Achse in Abb. 17.3–2 liegen), können die Ladung q und der Abstand $2d$ im Fernfeld nicht einzeln gemessen werden, sondern nur das sog. **elektrische Dipolmoment**

$$p := 2dq \quad (17.3-7)$$

Der rasche Abfall des Feldes mit r^{-3} ist darauf zurückzuführen, dass die zwei Ladungen mit wachsendem Abstand r – relativ gesehen – immer näher „zusammenrücken“, so dass ihre Felder nicht nur immer schwächer werden, sondern sich auch immer mehr gegeneinander aufheben.

Wenn in einem Volumen V nicht einzelne Ladungen Q_i , sondern eine kontinuierliche Ladungsverteilung mit der **Ladungsdichte**

$$\rho(\mathbf{r}) := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad \text{an der Stelle } \mathbf{r} \quad (17.3-8)$$

vorliegt, dann lautet das elektrische Feld an der Stelle $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (17.3-9)$$

Beispiel 17.3–2 Feldstärke auf der Symmetrieachse einer geladenen Scheibe

a) Berechne das elektrische Feld $\mathbf{E}(x)$ in einem Punkt P auf der Symmetrieachse eines homogen geladenen, dünnen Ringes mit Radius r_{Ring} und positiver Gesamtladung Q (siehe Abb. 17.3–3).

b) Berechne das Feld $\mathbf{E}(x)$ auf der Symmetrieachse einer Scheibe mit Radius r_{Scheibe} , positiver Gesamtladung Q und konstanter Flächenladungsdichte

$$\sigma := Q / (\pi r_{\text{Scheibe}}^2).$$

c) Untersuche die Grenzfälle

$$x \gg r_{\text{Scheibe}} \quad \text{und} \quad x \ll r_{\text{Scheibe}}.$$

Lösung:

a) Aus Symmetriegründen ist das elektrische Feld $\mathbf{E}$ auf der x -Achse parallel zur x -Achse.

Das dunkle Volumenelement dV in Abb. 17.3–3 erzeugt auf der Symmetrieachse im Punkt P ein Feld mit dem Betrag

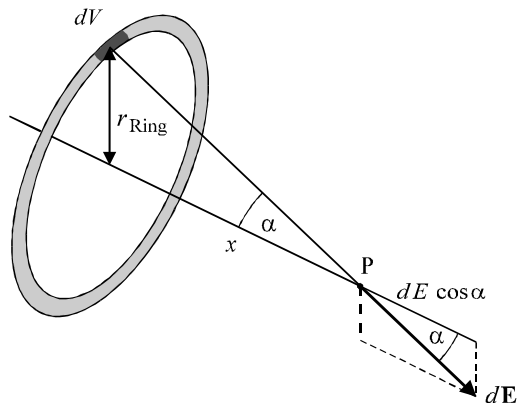


Abb. 17.3–3 Das dunkle Ringelement dV erzeugt auf der Symmetrieachse das Feld $d\mathbf{E}$.

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r_{\text{Ring}}^2 + x^2}$$

Bei der Integration über alle Volumenelemente bleibt aus Symmetriegründen nur die x-Komponente des elektrischen Feldes übrig. Daher interessieren wir uns nur für

$$\begin{aligned} dE_x &= dE \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r_{\text{Ring}}^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{r_{\text{Ring}}^2 + x^2}} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dQ}{(r_{\text{Ring}}^2 + x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Bei der Integration über alle Volumenelemente ist x konstant, so dass nur das Integral $\int dQ = Q$ zu berechnen ist. Wir erhalten

$$E_{\text{Ring}}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x Q}{(r_{\text{Ring}}^2 + x^2)^{3/2}} \quad (17.3-10)$$

Für $x \gg r_{\text{Ring}}$, also im Fernfeld folgt das plausible Ergebnis: $E_{\text{Ring}}(x) \approx Q/(4\pi\epsilon_0 x^2)$

b) Wir nehmen an, dass die Scheibe aus vielen konzentrischen Ringen besteht – jeweils mit Radius r , infinitesimaler Ringdicke dr und infinitesimaler Fläche $dA = 2\pi r dr$. Nach Gl. (17.3–10) erzeugen diese Ringe auf der Symmetrieachse Felder der Stärke

$$dE_{\text{Ring}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dQ}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \quad \overset{\uparrow}{dQ = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr} \quad \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

Integration über alle Ringe ergibt das gesamte elektrische Feld

$$\begin{aligned} E_{\text{Scheibe}}(x) &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^{r_{\text{Scheibe}}} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[(r^2 + x^2)^{-1/2} \right]_0^{r_{\text{Scheibe}}} = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (r_{\text{Scheibe}}/x)^2}} \right] \end{aligned} \quad (17.3-11)$$

c) Für $x \gg r_{\text{Scheibe}}$ erhalten wir mit der Taylorentwicklung $(1 + \epsilon)^{-1/2} \approx 1 - \epsilon/2$ das Feld

$$E_{\text{Scheibe}}(x) \underset{x \gg r_{\text{Scheibe}}}{\approx} \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{r_{\text{Scheibe}}^2}{x^2} \quad \overset{\uparrow}{\sigma = Q/(\pi r_{\text{Scheibe}}^2)} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2}$$

Wie erwartet erhalten wir in großer Entfernung das Feld einer Punktladung Q .

Für $r_{\text{Scheibe}} \rightarrow \infty$, also für unendlich große Scheiben erhalten wir ein konstantes Feld:

$$E_{\text{Scheibe}}(x) \underset{x \ll r_{\text{Scheibe}}}{\approx} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{für homogen geladene, unendlich ausgedehnte Platten} \quad (17.3-12)$$

(Siehe auch Beispiel (17.4–5).)

Das Vektorfeld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ kann (wie auch jedes andere Vektorfeld) auf zwei Arten graphisch dargestellt werden:

- Man zeichnet an einigen ausgewählten Stellen $\mathbf{r}_i$ den Vektor $\mathbf{E}(\mathbf{r}_i)$ auf (siehe Abb. 17.3–4a). Die Länge der gezeichneten Pfeile ist proportional zur Feldstärke.

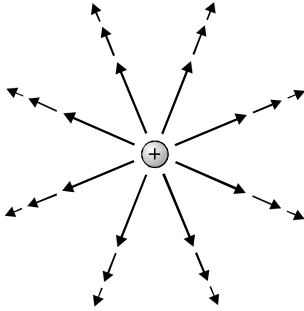


Abb. 17.3–4a Die elektrische Feldstärke einer Punktladung wird an einigen Stellen gezeichnet.

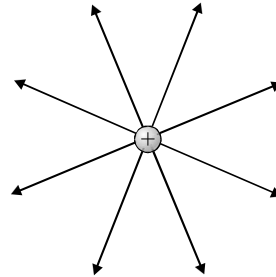


Abb. 17.3–4b Feldlinien einer positiven Punktladung.

- Man zeichnet die sog. **Feldlinien**, die wie folgt definiert sind: *Die Tangenten der Feldlinien haben überall die Richtung der elektrischen Feldstärke. Die Feldlinien zeigen in die Richtung der Kraft auf eine positive Ladung.* Die Dichte der Feldlinien im Raum – nicht in der Ebene – ist proportional zur Feldstärke. *Elektrische Feldlinien beginnen bei einer positiven Ladung und enden bei einer negativen Ladung.* Elektrische Feldlinien schneiden sich nicht.

In gleicher Weise werden in Abschn. „8.1 Grundlagen der Strömungslehre“ die Stromlinien definiert: Die Tangenten der Stromlinien haben die augenblickliche Richtung der Strömungsgeschwindigkeit. Nach der Kontinuitätsgl. wächst die Dichte der Stromlinien mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit.

Bedenke: Feldlinien sind nur *gemalte und gedachte Linien*, die lediglich die Kräfte auf positive Probekörper

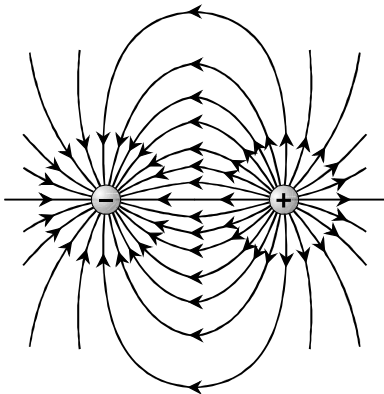


Abb. 17.3–5a Feldlinien eines Dipols. Ihre Tangenten haben überall die Richtung der Feldstärke.

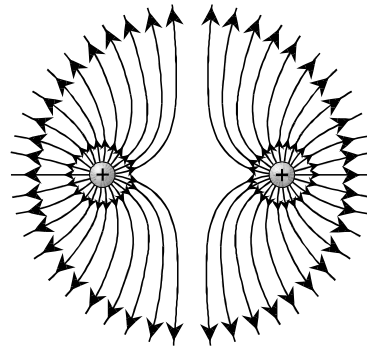


Abb. 17.3–5b Feldlinien von zwei gleich großen Ladungen.

illustrieren sollen. Feldlinien kommt keine direkte physikalische Realität zu.

Feldlinien ergeben übersichtlichere Bilder und werden daher meistens bevorzugt.

Abb. 17.3–5a zeigt die Feldlinien eines **Dipols**, also von zwei entgegengesetzt gleich großen Ladungen. Die Dichte der Feldlinien zeigt, dass die Feldstärke zwischen den Ladungen am größten ist. Abb. 17.3–5b zeigt die Feldlinien von zwei gleich großen Ladungen. In der Mitte zwischen beiden Ladungen ist die Feldstärke exakt null. Wenn keine negativen Ladungen existieren, enden die Feldlinien im Unendlichen.

In Abb. 17.3–6 werden die Feldlinien von zwei verschieden großen Ladungen dargestellt. In großer Entfernung sehen die Feldlinien ähnlich aus wie die Feldlinien einer Ladung $+Q$.

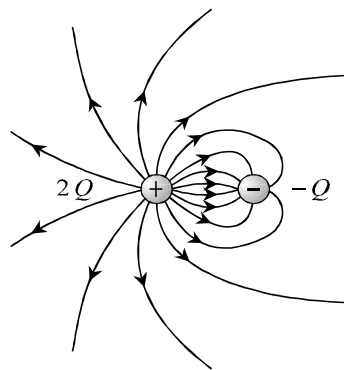


Abb. 17.3–6 Feldlinien von zwei verschieden großen Punktladungen.

17.4 Gaußscher Satz

Elektrische Felder können mit Gl. (17.3–3) oder mit Gl. (17.3–9) oft nur mühsam oder – in den meisten Fällen – nur numerisch berechnet werden. Wir werden nun mit dem Gaußschen Satz eine Berechnungsmethode kennen lernen, die zwar viel einfacher und vor allem viel eleganter ist, die dafür aber nur in sehr wenigen, *symmetrischen Fällen* angewendet werden kann. Der Gaußsche Satz ermöglicht aber nicht nur die Berechnung von symmetrischen elektrischen Feldern, sondern gibt vor allem auch tiefere Einsichten.

Vor der Einführung in den Gaußschen Satz müssen wir den Fluss Φ eines beliebigen Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ durch eine Fläche definieren. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall: Das Vektorfeld $\mathbf{F}$ ist konstant und die Fläche ist eben. Eine ebene Fläche wird durch ihren Normalenvektor $\mathbf{A}$ beschrieben, der laut Definition senkrecht auf der Fläche steht (bei einem Körper zeigt er immer nach außen) und dessen Länge gleich dem Flächeninhalt A ist. Der Fluss durch die ebene Fläche wird als Skalarprodukt definiert:

$$\Phi := \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} \quad \text{für konstante Vektorfelder und ebene Flächen} \quad (17.4-1)$$

Beachte, dass der Fluss ein Skalar ist und daher keine Richtung hat. Das folgende Beispiel aus der Strömungslehre macht deutlich, warum das Skalarprodukt aus einem Vektorfeld und einer Fläche ‘Fluss’ heißt – selbst dann, wenn (wie in der Elektrostatik) nichts strömt.

Beispiel 17.4–1 Der Fluss des Geschwindigkeitsfeldes einer strömenden Flüssigkeit

Eine Flüssigkeit oder ein Gas strömt in horizontaler Richtung stationär und homogen, d. h. die Strömungsgeschwindigkeit $\mathbf{v}$ hängt weder vom Ort noch von der Zeit ab. Berechne den

Fluss durch eine ebene Fläche $\mathbf{A}$ und interpretiere die Bedeutung des Flusses in der Strömungslehre.

Lösung:

Das Skalarprodukt

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = v A \cos \vartheta$$

ist das Produkt aus der Strecke, die das Fluid pro Sekunde zurücklegt, und der Fläche $\hat{A} = A \cos \vartheta$, die senkrecht durchströmt wird. Der Fluss $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ ist daher der Volumenstrom in m^3/s , d. h. das Volumen, das pro Sekunde durch die Fläche $\mathbf{A}$ strömt.

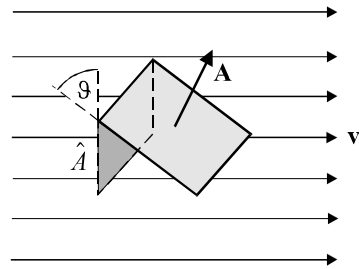


Abb. 17.4-1 Der Fluss eines Fluids durch eine Fläche $\mathbf{A}$ ist gleich v mal die dunkle, projizierte Fläche $\hat{A}$.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall: Das Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist nicht konstant oder die Fläche ist nicht eben. In diesem Fall wird die Fläche in n kleine Teilflächen mit Normalenvektoren $d\mathbf{A}_i$ zerlegt (siehe Abb. 17.4-2). Die Teilflächen sind so klein, dass sie näherungsweise eben sind und das Vektorfeld auf jeder Teilfläche ungefähr konstant ist. Nach Gl. (17.4-1) beträgt der Fluss

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{A}_i$$

Wenn die Teilflächen immer kleiner werden, dann geht die Summe in ein Integral über und wir erhalten die allgemeine Definition eines Flusses:

Der Fluss eines beliebigen Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ durch eine Fläche A ist definiert als Flächenintegral

$$\Phi := \int_A \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} \quad (17.4-2)$$

Demnach ist der Fluss des elektrischen Feldes

$$\Phi_E = \int_A \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} \quad (17.4-3)$$

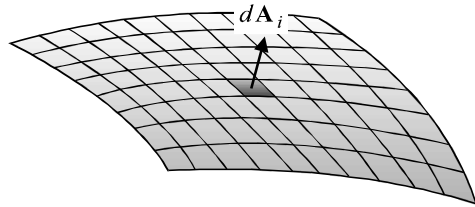


Abb. 17.4-2 Eine gekrümmte Fläche ist aus vielen kleinen, näherungsweise ebenen Flächenelementen zusammengesetzt. Die Normalvektoren $d\mathbf{A}_i$ stehen senkrecht auf den kleinen Flächenelementen.

Beispiel 17.4-2 Fluss des elektrischen Feldes einer Punktladung

Eine positive Punktladung Q ruht im Koordinatenursprung. Berechne den Fluss durch eine Kugel mit Radius r und Kugelmittelpunkt im Koordinatenursprung.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\Phi_E &= \int_{A_{\text{Kugel}}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{A_{\text{Kugel}}} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{A} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \mathbf{r} \text{ parallel zu } d\mathbf{A} \end{array} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{A_{\text{Kugel}}} \frac{r}{r^3} \cdot dA \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ r \text{ ist bei der Integration konstant} \end{array} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \underbrace{4\pi r^2}_{A_{\text{Kugel}}} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (17.4-4)
\end{aligned}$$

Der Fluss des elektrischen Feldes ist die von der Kugel eingeschlossene Ladung Q dividiert durch die elektrische Feldkonstante ϵ_0 . Dieses Ergebnis ist aus zwei Gründen bemerkenswert:

- Der Fluss hängt nicht vom Kugelradius ab, da mit zunehmendem Radius das elektrische Feld mit $1/r^2$ fällt und die Kugeloberfläche mit r^2 wächst.
- Bei der Coulombkraft wurde in Unterkapitel 17.1 die Proportionalitätskonstante k durch $1/(4\pi\epsilon_0)$ ersetzt, um das Ergebnis in Gl. (17.4-4) so einfach zu machen.

Man kann mathematisch beweisen, dass die Gl. (17.4-4) auf beliebige Ladungsverteilungen und beliebige Flächen verallgemeinert werden kann; man erhält so den Gaußschen Satz:⁶

Gaußscher Satz

Der Fluss des elektrischen Feldes durch eine *beliebige, geschlossene* Fläche A ist gleich der Summe der *eingeschlossenen* Ladungen Q_i dividiert durch ϵ_0 :

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i \quad (17.4-5)$$

Ladungen außerhalb der geschlossenen Fläche, über die integriert wird, tragen nicht zum Fluss bei.

Der Gaußsche Satz liefert einen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Fluss durch eine geschlossene Fläche⁷ und der eingeschlossenen Ladung. In vielen Aufgaben mit

⁶ Die Gl. (17.4-5) folgt sehr schnell durch Volumenintegration aus der (zu postulierenden) Maxwell-Gl.

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} dV = \frac{Q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$$

Nach dem Gaußschen Satz der Vektoranalysis gilt:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \oint_A \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A}$$

Dabei ist A die geschlossene Oberfläche des Volumens V .

symmetrischer Ladungsverteilung kann das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ mit einfachen Flächenintegralen berechnet werden. Dabei muss die Integrationsfläche die Symmetrie der Ladungsverteilung widerspiegeln, so dass das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ entweder parallel oder senkrecht zu allen Flächennormalen $d\mathbf{A}_i$ ist.

Der Gaußsche Satz ist eine der vier Maxwell-Gln., die eine fundamentale Bedeutung für die Elektrodynamik haben – vergleichbar mit der Wichtigkeit der Newtonschen Axiome für die Mechanik. Oben wurde gesagt, dass der Gaußsche Satz mathematisch aus dem Coulombschen Gesetz (17.2–1) abgeleitet werden kann. Umgekehrt kann auch das Coulombsche Gesetz aus dem Gaußschen Satz und einfachen Symmetrieüberlegungen hergeleitet werden (siehe das folgende Beispiel 17.4–3). *Der Gaußsche Satz (17.4–5) ist daher äquivalent zum Coulombschen Gesetz (17.2–1).*

Wir wollen nun untersuchen, wie in der Elektrostatik elektrostatische Felder im Innern und im Außenraum von leitenden Körpern aussehen.

1) Felder und Ladungen im Leiterinneren: Werden Ladungen auf oder in einen beliebig geformten, leitenden Körper gebracht, dann treten sehr kurzzeitig elektrische Felder im Körperinneren auf. Sie *verschieben die Ladungen solange, bis die elektrischen Felder im Körperinneren verschwinden*. (Den mathematischen Beweis dieser Aussage kann ich hier nicht erbringen.) Daher gilt:

Leitende Körper sind in der Elektrostatik im Innern feldfrei: $\mathbf{E}_{\text{innen}} = \mathbf{0}$

Mit dem Gaußschen Satz folgt daraus sofort eine zweite Aussage:

In der Elektrostatik ist das Innere eines leitenden Körpers nicht nur feldfrei, sondern auch ladungsfrei: $Q_{\text{innen}} = 0$

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass es in der Elektrostatik eine Ladung $Q_{\text{innen}} \neq 0$ im Innern eines leitenden Körpers gibt. Dann ist der Fluss Φ_E für alle geschlossenen Flächen A , die nur diese eine Ladung umschließen, einerseits (wegen $\mathbf{E}_{\text{innen}} = \mathbf{0}$) null, andererseits aber (wegen des Gaußschen Satzes und wegen $Q_{\text{innen}} \neq 0$) nicht null. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch ist. ■

Auch Hohlräume mit einer geschlossenen, leitenden Oberfläche sind feldfrei. Daher schirmt eine Metallhülle einen Raum sicher gegen äußere elektrostatische Felder ab. Aber auch ein engmaschiges Metallnetz oder -gitter, ein sog. **Faraday-Käfig** liefert in der Praxis meist eine ausreichende Abschirmung.

2) Felder auf Leiteroberflächen: *Statische elektrische Felder stehen im Außenraum senkrecht auf den Leiteroberflächen.* Hätten die Felder eine Komponente parallel zur Leiteroberfläche, so würden sich die Ladungen unter der Oberfläche solange verschieben, bis die elektrischen Felder überall senkrecht auf den Leiteroberflächen stehen.

⁷ Eine Fläche heißt geschlossen, wenn sie ein Volumen vollständig einschließt. Die Oberflächen aller Körper sind geschlossen; ebene Flächen sind nie geschlossen.