



Abitur **MEHR
ERFAHREN**

Mathematik
Gymnasium
Thüringen



Das musst du können!

STARK

Inhalt

Vorwort

Analysis

1 Gleichungen	1
1.1 Quadratische Gleichungen	1
1.2 Exponentialgleichungen	1
1.3 Nullprodukt und Substitution	2
2 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften	3
2.1 Potenzfunktionen	3
2.2 Ganzrationale Funktionen	4
2.3 Sinus- und Kosinusfunktion (trigonometrische Funktionen)	5
2.4 Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion	6
2.5 Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall	8
2.6 Entwicklung von Funktionen	9
2.7 Vielfachheit von Nullstellen	11
2.8 Symmetrie (bzgl. des Koordinatensystems)	12
3 Ableitung	13
3.1 Bedeutung der Ableitung	13
3.2 Ableitungen der Grundfunktionen	13
3.3 Ableitungsregeln	14
3.4 Tangente und Normale	15
4 Elemente der Kurvendiskussion, Anwendungen der Ableitung	16
4.1 Monotonieverhalten, Extrem- und Sattelpunkte	16
4.2 Krümmungsverhalten, Wendepunkte	19
4.3 Extremwertaufgaben	22
4.4 Bestimmung von Funktionsgleichungen	24
5 Stammfunktion und unbestimmtes Integral	26
5.1 Stammfunktion	26
5.2 Unbestimmtes Integral	27

6	Bestimmtes Integral und Flächenberechnungen	28
6.1	Bestimmtes Integral	28
6.2	Flächenberechnungen	29
7	Weitere Anwendungen des Integrals	32
7.1	Rekonstruierter Bestand	32
7.2	Volumen von Rotationskörpern	32

Analytische Geometrie

1	Lineare Gleichungssysteme	34
2	Vektoren	35
2.1	Rechnen mit Vektoren	35
2.2	Lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren	36
2.3	Skalarprodukt	36
2.4	Vektor- bzw. Kreuzprodukt	37
3	Geraden und Ebenen	38
3.1	Geraden	38
3.2	Ebenen in Parameterform	40
3.3	Ebenen in Normalen- bzw. Koordinatenform	41
3.4	Umwandlung: Parameterform in Koordinatenform	42
3.5	Hesse'sche Normalenform	43
4	Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten	44
4.1	Lage zweier Geraden	44
4.2	Lage einer Geraden zu einer Ebene	45
4.3	Lage zweier Ebenen	46
4.4	Schnittwinkel	48
5	Abstände zwischen geometrischen Objekten	49
5.1	Abstand zu einer Ebene	49
5.2	Abstand eines Punktes zu einer Geraden	50
5.3	Abstand zweier windschiefer Geraden	52

Stochastik

1	Ereignisse	53
2	Wahrscheinlichkeitsberechnungen	55
2.1	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	55
2.2	Laplace-Experimente, Laplace-Wahrscheinlichkeit	56
2.3	Baumdiagramme und Vierfeldertafeln	57
2.4	Stochastische Unabhängigkeit	59
3	Urnenmodelle	60
3.1	Anzahl der Möglichkeiten	60
3.2	Berechnen von Wahrscheinlichkeiten	61
4	Zufallsgrößen	63
4.1	Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung	63
4.2	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	64
4.3	Binomialverteilte Zufallsgrößen	66
5	Beurteilende Statistik	70
5.1	Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe	70
5.2	Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit	71
5.3	Wahl eines genügend großen Stichprobenumfangs	72
6	Normalverteilung	73
6.1	Normalverteilte Zufallsgrößen	73
6.2	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	75
	Stichwortverzeichnis	77

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im schriftlichen Mathematik-Abitur benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie sowie Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch eine Glühbirne  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** schrittweise beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

STARK Verlag

Ausführliche Erläuterungen sowie viele Übungsaufgaben und Lernvideos finden Sie in unseren Abitur-Trainingsbänden:

- Abitur-Training Analysis (Bestell-Nr. 540021V)
- Abitur-Training Analytische Geometrie (Bestell-Nr. 540038V)
- Abitur-Training Stochastik (Bestell-Nr. 94009V)

Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre mit vollständigen Lösungen finden Sie in dem Band:

- Abiturprüfung Thüringen, Mathematik (Bestell-Nr. 165100)

2 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften

2.1 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen sind Funktionen der Form:

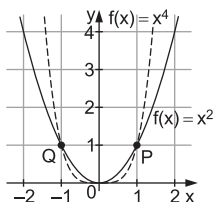
$$f: x \mapsto x^r \text{ mit } r \in \mathbb{R}$$

Für ganzzahlige Exponenten unterscheidet man:

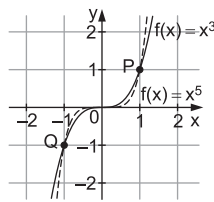
- Exponent positiv: $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$
 Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$ Graphen sind **Parabeln**.
- Exponent negativ: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$
 Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Graphen sind **Hyperbeln**.

Graphenverläufe

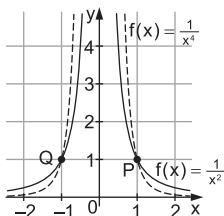
Parabeln: n gerade; $W_f = \mathbb{R}_0^+$



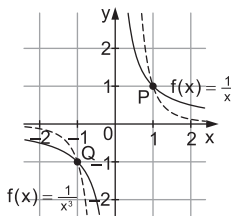
n ungerade; $W_f = \mathbb{R}$



Hyperbeln: n gerade; $W_f = \mathbb{R}^+$



n ungerade; $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Wurzelfunktion

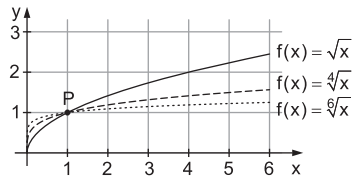
Ist der Exponent r ein Bruch, ergeben sich Wurzelfunktionen, speziell:

$$f: x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \text{ mit } n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad (n\text{-te Wurzelfunktion})$$

Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}_0^+$

Wertemenge: $W_f = \mathbb{R}_0^+$

1. G_f verläuft durch $P(1 | 1)$.
2. Einzige Nullstelle: $x=0$
3. Je größer n , desto
 - flacher verläuft G_f für $x > 1$.
 - steiler nähert sich G_f dem Koordinatenursprung.



2.2 Ganzrationale Funktionen

Unter einer ganzrationalen Funktion (oder Polynomfunktion) vom Grad n versteht man eine Funktion der Form:

$$f: x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$

Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

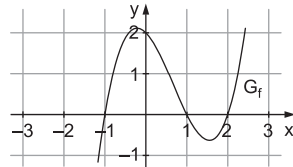
Die Werte $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ heißen **Koeffizienten**.

Die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion können der Linearfaktorzerlegung entnommen werden (vgl. auch Abschnitt 2.7).



$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ &= (x-2)(x^2-1) \\ &= (x-2)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstellen bei $x=2$,
 $x=-1$ und $x=1$

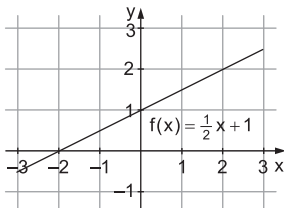


Spezialfälle

Lineare Funktion:

$$f(x) = mx + t \quad (\text{Grad } 1)$$

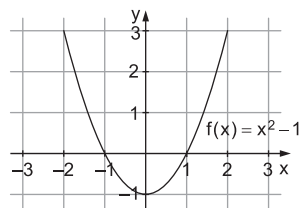
Graph ist eine Gerade.



Quadratische Funktion:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (\text{Grad } 2)$$

Graph ist eine Parabel.



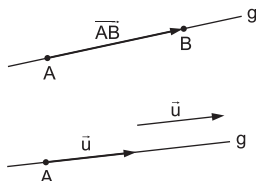
3 Geraden und Ebenen

3.1 Geraden

 Eine Gerade kann beschrieben werden durch eine Gleichung der Form:
 $g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{u}; r \in \mathbb{R}$ (Parametergleichung)
 Dabei heißt A Stützpunkt und $\vec{u}$ Richtungsvektor der Geraden.

Eine Gerade g wird eindeutig bestimmt durch

- zwei Punkte A und B:
 $g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB}; r \in \mathbb{R}$
- einen Punkt A und einen Vektor $\vec{u}$:
 $g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{u}; r \in \mathbb{R}$



Die Gerade g sei durch die Punkte $A(-1 | 6 | 2)$ und $B(5 | 0 | 5)$ festgelegt. Untersuchen Sie, ob der Punkt $P(11 | -6 | 8)$ auf der Geraden g liegt.

Aufstellen der Geradengleichung:

$$g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB}; r \in \mathbb{R}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$$

Oder mit vereinfachtem Richtungsvektor:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$$

Ortsvektor von P in die Gleichung von g einsetzen (Punktprobe):

$$\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11 = -1 + 2s & \Leftrightarrow 12 = 2s & \Rightarrow s = 6 \\ -6 = 6 - 2s & \Leftrightarrow -12 = -2s & \Rightarrow s = 6 \\ 8 = 2 + s & \Rightarrow s = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P \in g \quad (P \text{ liegt auf der Geraden } g.)$$

4 Zufallsgrößen

4.1 Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **Zufallsgröße** oder Zufallsvariable ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zu. Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** einer Zufallsgröße X gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \dots, p_n$ die Zufallsgröße die möglichen Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ annimmt; in Tabellenform:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Dabei muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten stets 1 ergeben:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad (\text{Normierungsbedingung})$$

Die Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch ein Stabdiagramm oder ein Histogramm erfolgen.

Vorgehensweise

Schritt 1: Werte, die die Zufallsgröße X annehmen kann, auflisten

Schritt 2: Zugehörige Wahrscheinlichkeiten berechnen

Schritt 3: Tabelle und ggf. Stabdiagramm bzw. Histogramm erstellen



Bei einem gezinkten Würfel wird die Augenzahl 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 geworfen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X , die die Anzahl der Sechser beim zweimaligen Werfen dieses Würfels angibt.

Schritt 1:

Die Zufallsgröße X kann folgende Werte annehmen:

$$x_1=0; \quad x_2=1; \quad x_3=2$$

Schritt 2:

Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Werte von X können mithilfe der Formel von Seite 62 ermittelt werden:

$$P(X=x_1) = P(X=0) = P(\text{„keine 6“}) = \binom{2}{0} \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^2 = 0,7^2 = 0,49$$

$$P(X=1) = \binom{2}{1} \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^1 = 0,42 \quad P(X=2) = \binom{2}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^0 = 0,09$$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK