Bohner | Ott | Deusch | Rosner

Arbeitsheft
Mathematik – Jahrgangsstufen 1 und 2
Grundlegendes Anforderungsniveau

Berufliches Gymnasium
Baden-Württemberg

Merkur Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Ronald Deusch
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

* * * * * * * * * *

1. Auflage 2022

Gesamtherstellung:
Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr: 2339-01
ISBN 978-3-8120-2339-9

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Arbeitsheft dient zur Aufbereitung, Wiederholung und Festigung des im Schülerbuch behandelten Lernstoffs. Es soll parallel zum Schülerbuch verwendet werden.
Die begleitende Unterstützung durch die Lehrkraft ist gewünscht und sehr sinnvoll.
Das Arbeitsheft enthält ergänzende Aufgaben zur Wiederholung und ermöglicht eine Lernkontrolle in Eigenverantwortung. Das im Vergleich zum Schülerbuch veränderte Format und die Form der Darstellung wirken motivierend auf Schüler/innen.
Einige Aufgaben beinhalten fächerübergreifende Aspekte in Handlungssituationen.
Das Arbeitsheft hilft, das Erlernte zu festigen und damit eine gute Grundlage für die Jahrgangsstufe und das Abitur zu schaffen.
Die Lösungen sind eingelegt und damit herausnehmbar.

Videos dienen der Veranschaulichung von Problemen und Erläuterung von Lösungswegen. Sie unterstützen die Lernenden beim Entdecken und Verstehen mathematischer Zusammenhänge. Damit ist das Arbeitsheft zum Fernlernen und Homeschooling bestens geeignet.

I Analysis

1 Trigonometrische Funktionen und zugehörige Gleichungen

mvurl.de/ybsv

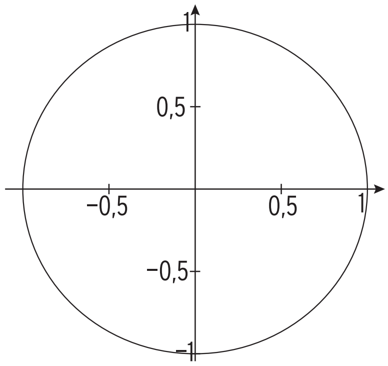
Definition der Winkelfunktionen

1 Zeichnen Sie den Winkel α ein und bestimmen Sie $\sin(\alpha)$ bzw. $\cos(\alpha)$.

a) $\alpha = 70°$

$\sin(\alpha) \approx$

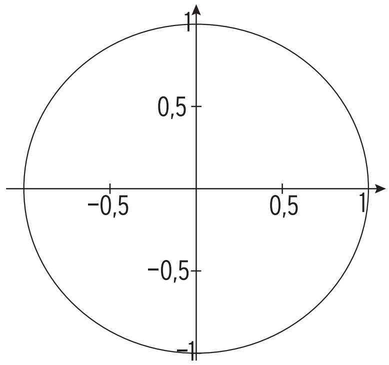
$\cos(\alpha) \approx$



b) $\alpha = 120°$

$\sin(\alpha) \approx$

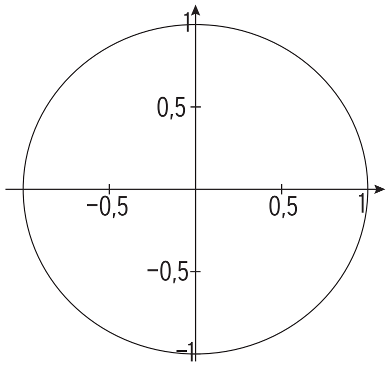
$\cos(\alpha) \approx$



c) $\alpha = 200°$

$\sin(\alpha) \approx$

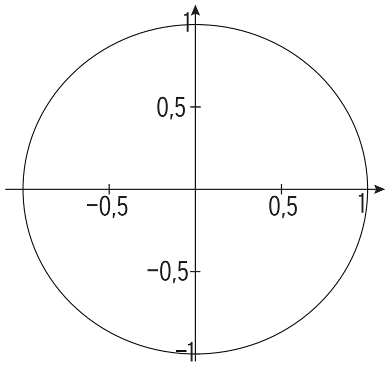
$\cos(\alpha) \approx$



d) $\alpha = 280°$

$\sin(\alpha) \approx$

$\cos(\alpha) \approx$

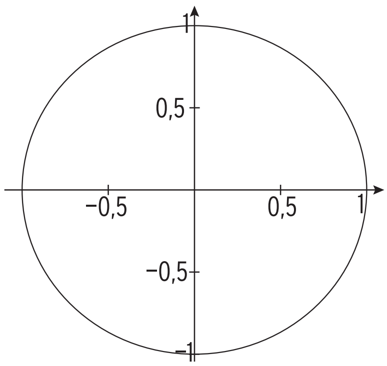


2 Zeichnen Sie den Winkel x (im Bogenmaß) ein und bestimmen Sie $\sin(x)$ bzw. $\cos(x)$.

a) $x = 0{,}7$

$\sin(0{,}7) \approx$

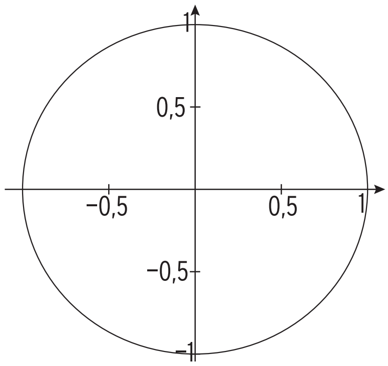
$\cos(0{,}7) \approx$



b) $x = \frac{\pi}{2}$

$\sin(\frac{\pi}{2}) =$

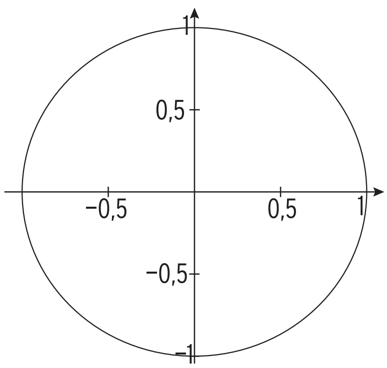
$\cos(\frac{\pi}{2}) =$



c) $x = 3{,}9$

$\sin(3{,}9) \approx$

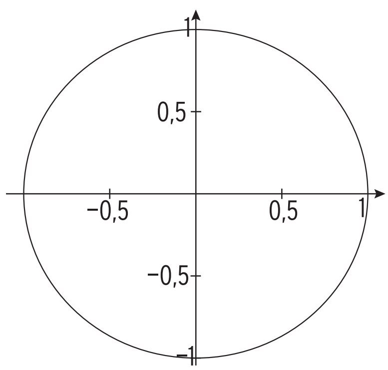
$\cos(3{,}9) \approx$



d) $x = 2\pi$

$\sin(2\pi) =$

$\cos(2\pi) =$



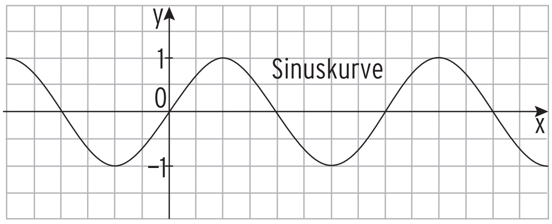
3 Vervollständigen Sie die Tabelle mithilfe eines Hilfsmittels.

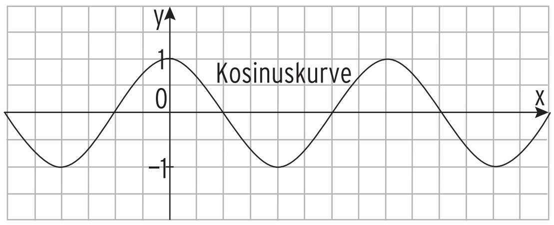
α	x	sin(x)	cos(x)
60°	$\frac{1}{3}\pi$	0,866	0,5
20°			
90°			
120°			

α	x	sin(x)	cos(x)
	1		
	$\frac{1}{6}\pi$		
	2,5		
	5		

4 Vervollständigen Sie die Tabelle. Skalieren Sie die x-Achse.

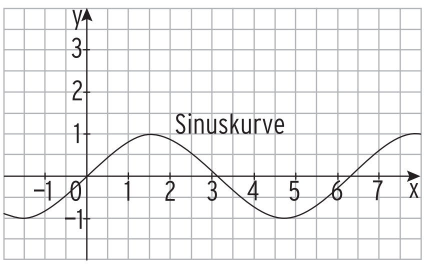
x	sin(x)	cos(x)
0	0	1
2π		
π		
$\frac{1}{2}\pi$		
$-\frac{1}{2}\pi$		
$-\frac{3}{2}\pi$		
$\frac{5}{2}\pi$		
7π		
12π		



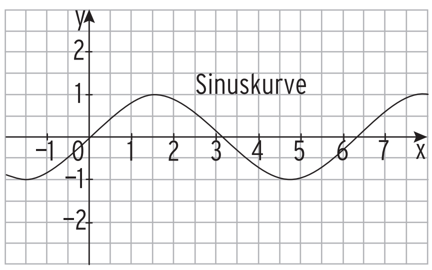


5 Zeichnen Sie den Graphen von f ein.

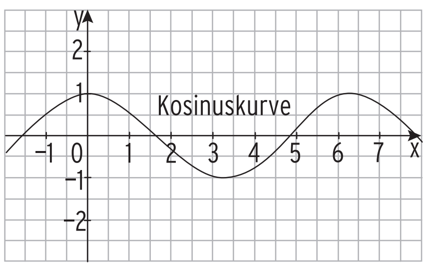
a) $f(x) = 2\sin(x) + 1$



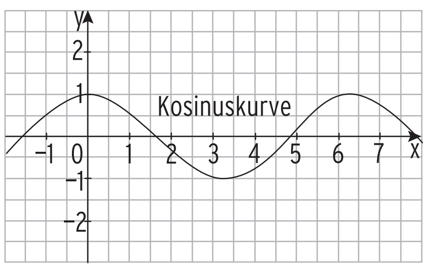
b) $f(x) = -1{,}5\sin(x)$



c) $f(x) = 0{,}5\cos(x)$



d) $f(x) = -\cos(x) - 1$



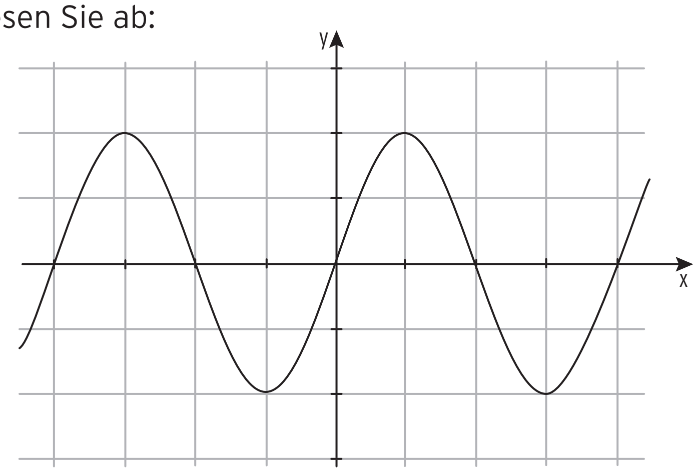
6 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Sinusfunktion f mit f(x) = sin(x).
Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:

$\sin(2\pi) =$

$\sin(-\frac{3}{2}\pi) =$

$\sin(\frac{5}{2}\pi) =$

$\sin(-\pi) =$



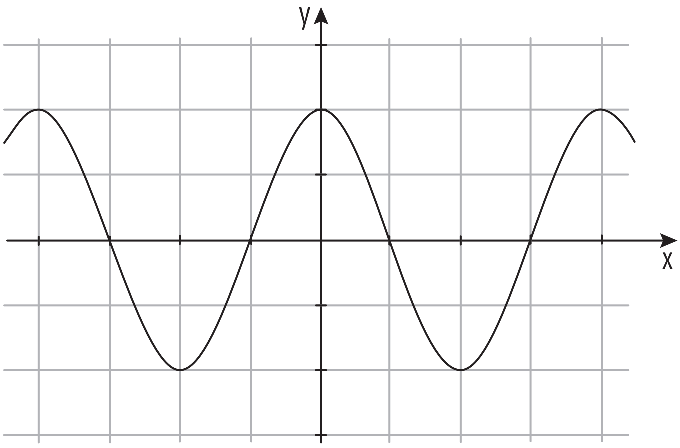
7 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Kosinusfunktion f mit f(x) = cos(x).
Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:

$\cos(2\pi) =$

$\cos(-\frac{3}{2}\pi) =$

$\cos(\frac{1}{2}\pi) =$

$\cos(-\pi) =$



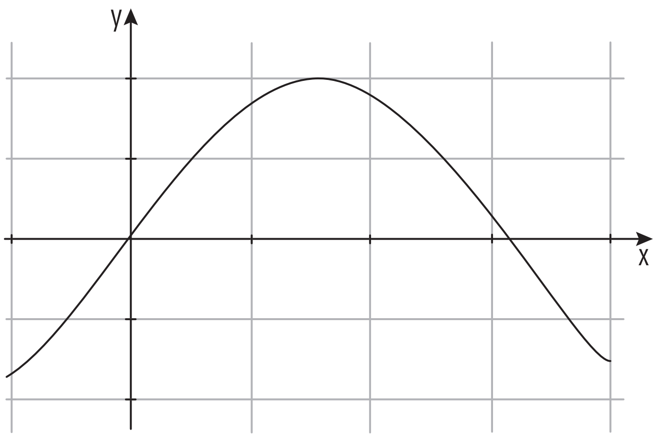
8 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Sinusfunktion f mit f(x) = sin(x).
Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:

$\sin(2) =$

$\sin(\frac{1}{2}\pi) =$

$\sin(\frac{1}{4}\pi) =$

$\sin(-\frac{1}{2}) =$



Transformationen

mvurl.de/qkrg

1 Geben Sie die Amplitude a und die Periode p der Funktion f an.

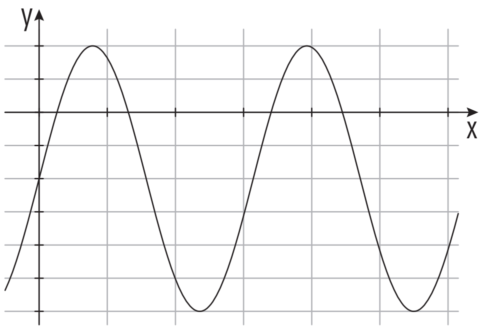
Funktionsterm	a	p	Funktionsterm	a	p
$f(x) = 0{,}25\sin(\pi x)$	$a = 0{,}25$	$\frac{2\pi}{\pi} = 2$	$f(x) = -5\cos(\frac{\pi}{2}x)$		
$f(x) = 6\cos(5x)$			$f(x) = 1{,}6\sin(3x)$		
$f(x) = -4\sin(\frac{x}{3})$			$f(x) = -\frac{4}{3}\sin(\frac{x}{2})$		
$f(x) = 3\cos(2x)$			$f(x) = \cos(x) + 1$		

2 Geben Sie den Funktionsterm einer Sinusfunktion bzw. einer Kosinusfunktion mit der Periode p und der Amplitude a an.

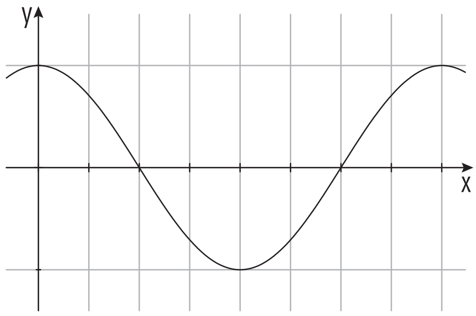
a	p	Sinusfunktion	a	p	Kosinusfunktion
$a = 2$	$p = 2$	$f(x) = 2\sin(\pi x)$	$a = 6$	$p = 4\pi$	$f(x) = 6\cos(\frac{x}{2})$
$a = \pi$	$p = 1$		$a = 4$	$p = 4$	
$a = 0{,}5$	$p = \frac{2}{3}\pi$		$a = \frac{5}{2}$	$p = \frac{3}{4}$	

3 Beschriften Sie die Koordinatenachsen.

$f(x) = 4\sin(x) - 2$



$f(x) = 0{,}5\cos(0{,}5x)$



4 Geben Sie den zugehörigen Funktionsterm an. Der Graph von f mit $f(x) = \sin(x)$ wird

a) um 2 nach links und um 0,5 nach unten verschoben. $g(x) =$ ____________

b) an der x-Achse gespiegelt und dann um 1 nach oben verschoben. $g(x) =$ ____________

c) mit Faktor 3 in y-Richtung gestreckt und dann um 3 nach links verschoben. $g(x) =$ ____________

d) mit Faktor 2 in x-Richtung gestreckt und dann um 3 nach unten verschoben. $g(x) =$ ____________

5 Ergänzen Sie die folgenden Sätze.

a) Das Schaubild der Funktion g mit g(x) =0,5sin(x) − 1 entsteht aus der Sinuskurve (y = sin(x)) durch Streckung mit dem Faktor____ in __-Richtung und durch Verschiebung um ____ nach __________.

b) Das Schaubild der Funktion g mit g(x) = − 3cos(2x) + 4 entsteht aus der Kosinuskurve (y = cos(x)) durch Spiegelung an der __-Achse, durch Streckung mit dem Faktor ____in __-Richtung, Streckung mit dem Faktor ___in __-Richtung und durch Verschiebung um __ nach _____.

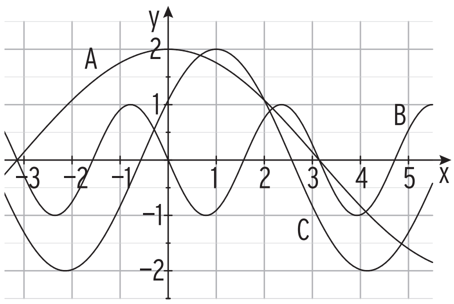
c) Das Schaubild der Funktion g mit g(x) = 2cos(x + 4) + 5 entsteht aus der Kurve mit y = cos(x) durch Streckung mit dem Faktor____ in ____-Richtung, durch Verschiebung um ____nach____und durch Verschiebung um ___ nach _________.

d) Das Schaubild der Funktion g mit g(x) = 5sin(0,5x) − 1 entsteht aus der Kurve mit y = sin(x) durch Streckung mit dem Faktor____ in ____-Richtung, durch Streckung mit dem Faktor ____in____-Richtung und durch Verschiebung um____ nach _________.

6 Wie geht der Graph von g aus dem Graphen von f mit f(x) = sin(x) hervor?

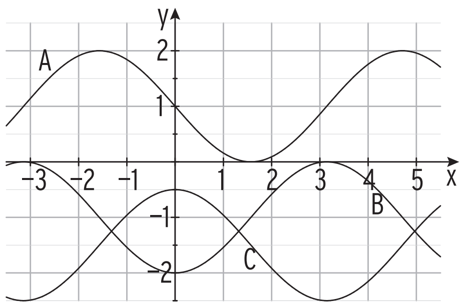
g(x) = 2sin(x) + 1	
g(x) = − 3sin(4x) + 2	
g(x) = 0,25sin(x − 3) + 5	
g(x) = 2,5sin(2x) − 3	
g(x) = cos(x) − 1	

7 Ordnen Sie zu.



__: f(x) = 2cos(0,5x) __: g(x) = − sin(2x)

__: h(x) = 2cos(x− 1)



__: f(x) = − cos(x) − 1; __: g(x) = cos(x) − 1,5

__: h(x) = − sin(x) + 1

8 Sind die Aussagen falsch (f) oder wahr (w)?

a)	Durch eine Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{3}{2}$ vergrößert sich die Amplitude einer Funktion.	☐ w ☐ f
b)	Durch eine Streckung in x-Richtung mit Faktor 2 vergrößert sich die Periodenlänge einer Funktion.	☐ w ☐ f
c)	Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 3\sin(3x)$ geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung mit Faktor 3 in x- und y-Richtung hervor.	☐ w ☐ f
d)	Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2\sin(x+1)$ geht aus der Sinuskurve durch Streckung in x-Richtung und Verschiebung um eine Einheit nach links vor.	☐ w ☐ f
e)	f mit $f(x) = 2\sin(x) + 1$ hat den Wertebereich $[-2; 2]$.	☐ w ☐ f
f)	Die Funktion f mit $f(x) = a\sin(x) + 4$ hat für $a > 0$ den Wertebereich $[4 - a; 4 + a]$.	☐ w ☐ f

9 Die Abbildungen zeigen Ausschnitte von Schaubildern.
Welche der Schaubilder gehören zu periodischen Funktionen?
Entscheiden und begründen Sie.

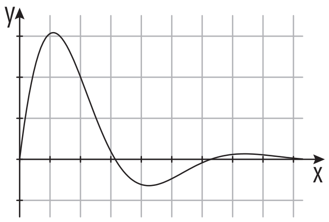


Abb. 1

☐ periodisch

☐ nicht periodisch

Begründung:

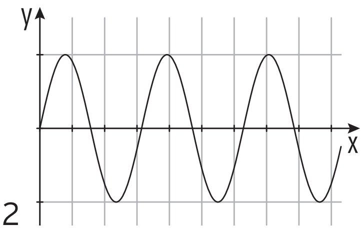


Abb. 2

☐ periodisch

☐ nicht periodisch

Begründung:

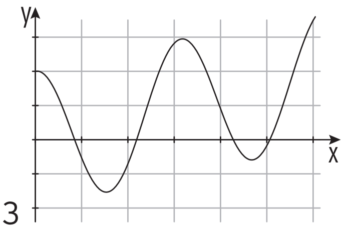


Abb. 3

☐ periodisch

☐ nicht periodisch

Begründung:

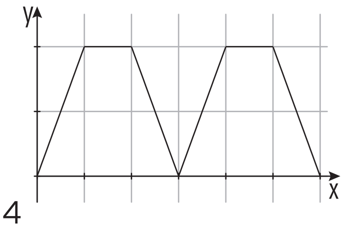


Abb. 4

☐ periodisch

☐ nicht periodisch

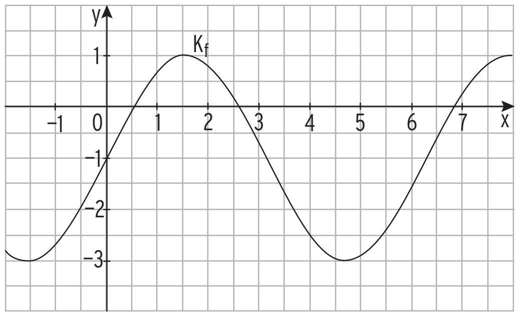
Begründung:

Aufstellen von Funktionstermen

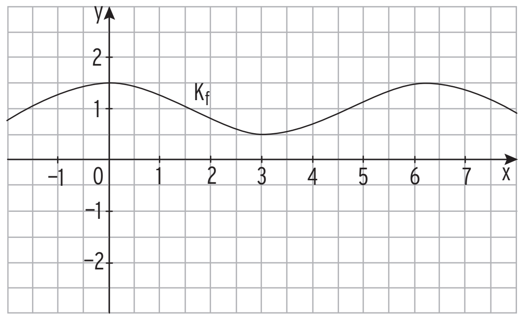
mvurl.de/a9ii

1 Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm der Form $f(x) = a\sin(x) + c$ bzw. $f(x) = a\cos(x) + c$.

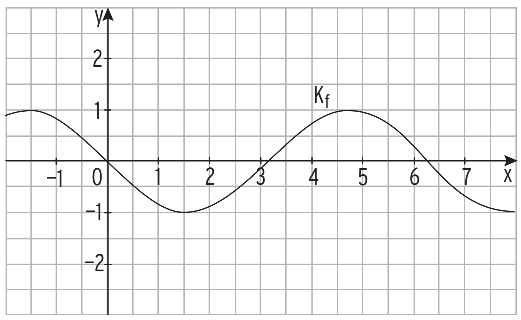
a) $f(x) =$ ______________________



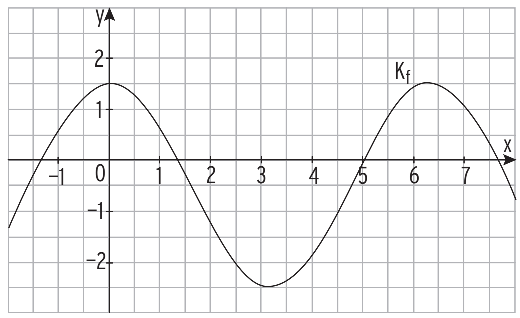
b) $f(x) =$ ______________________



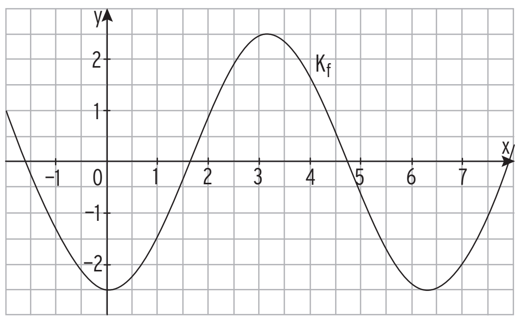
c) $f(x) =$ ______________________



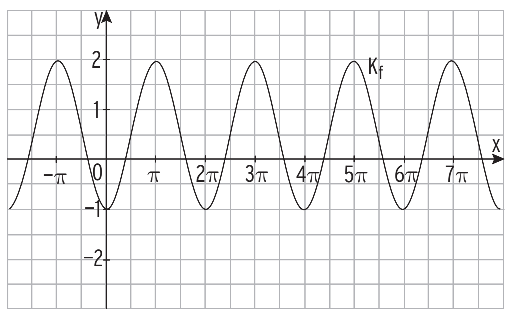
d) $f(x) =$ ______________________



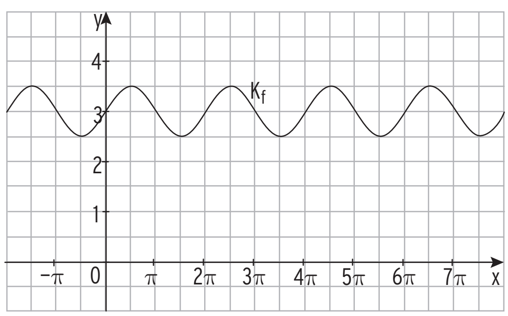
e) $f(x) =$ ______________________



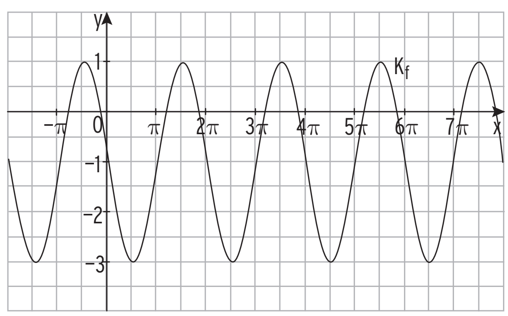
f) $f(x) =$ ______________________



g) $f(x) =$ ______________________



h) $f(x) =$ ______________________



Aufstellen von Funktionstermen

mvurl.de/glrb

1 Formulieren Sie Bedingungen mithilfe des Textes. Das Schaubild von f …

hat den Hochpunkt H(2 | 3).	$f(2) = 3$ und $f'(2) = 0$
hat den Wendepunkt W(− 1 | 6).	
hat den Tiefpunkt T(− 2 | 1).	
berührt die x-Achse an der Stelle $x = 5$.	
hat an der Stelle $x = 1$ die Steigung − 4.	
hat einen Extrempunkt an der Stelle $x = \sqrt{2}$.	
hat an der Stelle $x = 0$ die Tangente mit der Gleichung $y = 3x - 4$	
verläuft an der Stelle $x = -4$ parallel zur 1. Winkelhalbierenden.	
hat an den Stellen $x = 1$ und $x = 3$ dieselbe Steigung.	
ist an der Stelle $x = 1$ rechtsgekrümmt.	

2 Das Schaubild der Funktion p mit $p(x) = ax^4 + cx^2 - \frac{7}{4}$ hat den Tiefpunkt T(2 | − 3).

Berechnen Sie die Werte von a und c und geben Sie den Funktionsterm an.

Ableitung:

Bedingungen:

Lineares Gleichungssystem:

Lösung des linearen Gleichungssystems:

Funktionsterm:

3 Kreuzen Sie die für den Graph K von f zutreffende Bedingung an.

P(2 | − 3) liegt auf dem Graph K von f.	☐ $f'(2) = -3$	☐ $f(2) = -3$
K hat einen Wendepunkt W(− 4 | 1).	☐ $f'(-4) = 1$	☐ $f''(-4) = 0$
K hat einen Hochpunkt in x = 5.	☐ $f'(5) = 0$	☐ $f''(5) = 1$
K hat an der Stelle x = 1 die Steigung 1.	☐ $f'(1) = 0$	☐ $f'(1) = 1$
K ist an der Stelle x = 1 linksgekrümmt.	☐ $f''(1) = 0$	☐ $f''(1) > 0$
In P(− 2 | 5) wechselt K (bzw. f) das Monotonieverhalten.	☐ $f(-2) = 5$	☐ $f'(-2) = 0$
In x = 1 ist K steigend.	☐ $f'(1) > 0$	☐ $f'(1) = -2$

4 Formulieren Sie zum folgenden Aufschrieb eine geeignete Aufgabenstellung.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(x) = ax^3 + cx$; $f'(x) = 3ax^2 + c$

$f(2) = -3$ $8a + 2c = -3$

$f'(2) = 0$ $12a + c = 0$

Aufgabenstellung:

5 Das Schaubild einer Funktion f mit $f(x) = ae^{bx} + c$; $x \in \mathbb{R}$, hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung y = 3. Der Graph von f schneidet die y-Achse in S(0 I 1) mit Steigung 2.

Ableitung:

Bedingungen:

Gleichungssystem:

Lösung des Gleichungssystems:

Funktionsterm:

6 Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(1) $f(2) = 1$

(2) $f'(2) = 0$

(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$

(4) Für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 5$

Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat. Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen.

Lösung:

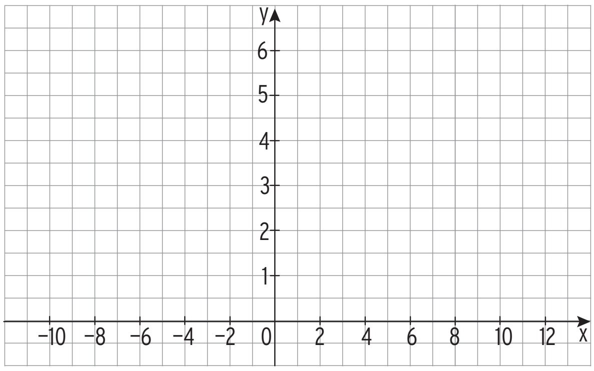
Skizze:

(1) ____________________

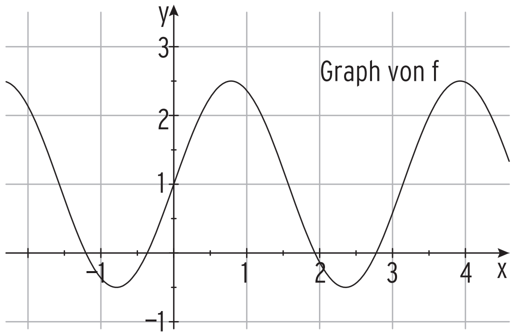
(2) ____________________

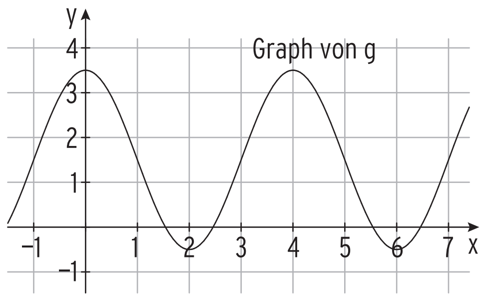
(3) ____________________

(4) ____________________



7 Bestimmen Sie den Funktionsterm mithilfe der Abbildung.





Ansatz: $f(x) = a\sin(bx) + d$

Amplitude: ____________________

Periode: ____________________

____

Mittellinie: ____________________

Funktionsterm: ____________________

Ansatz: $g(x) = a\cos(bx) + d$

Amplitude: ____________________

Periode: ____________________

____

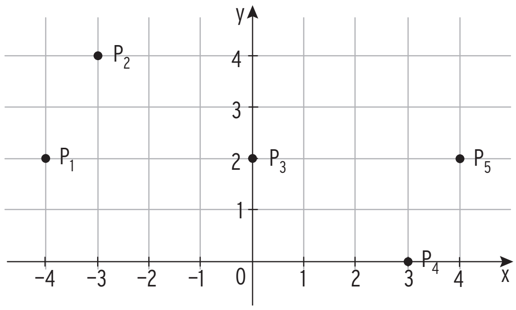
Mittellinie: ____________________

Funktionsterm: ____________________

8 Der Graph einer quadratischen Funktion f verläuft durch den Koordinatenursprung. Die Tangente an diesen Graphen im Punkt (2| f (2)) hat die Gleichung y = 4x − 2. Bestimmen Sie einen Funktionsterm von f.

Ansatz:

9 Die in der Abbildung dargestellten Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5 haben ganzzahlige Koordinaten. Begründen Sie, dass man durch die Punkte sowohl das Schaubild einer Polynomfunktion dritten Grades als auch das Schaubild einer trigonometrischen Funktion legen kann und geben Sie jeweils einen Funktionsterm an.



Begründung:

Funktionsterme:

10 Die unten stehende Wertetabelle gehört zu einer Polynomfunktion g.

x	− 2	− 1	0	1	2	3	4
g(x)	− 4	0	− 2	− 4	0	16	50
g′(x)	9	0	− 3	0	9	24	45
g″(x)	− 12	− 6	0	3	6	18	24

Das zugehörige Schaubild K besitzt

die gemeinsamen Punkte mit der x-Achse: ______________________

den Schnittpunkt mit der y-Achse: _________

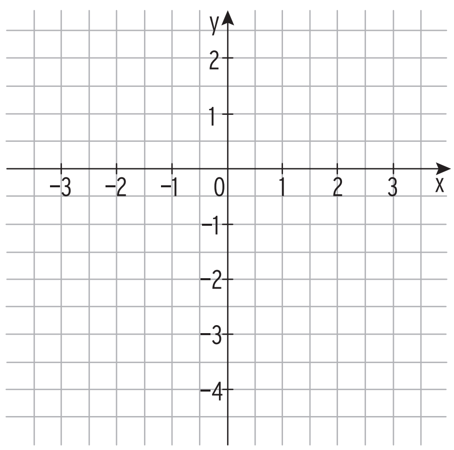
den Hochpunkt: _______, den Tiefpunkt: _______

den Wendepunkt: _______. Die Funktion muss

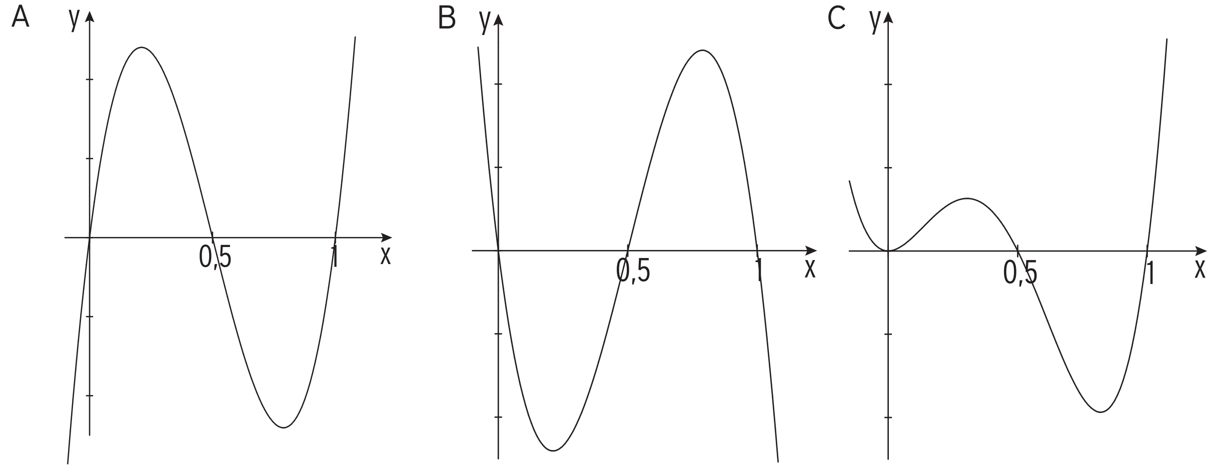
mindestens den Grad ____ haben, da

______________________________ .

Skizze des zugehörigen Schaubilds:



11 Eine der folgenden Abbildungen gehört zum Schaubild der Funktion f mit $f(x) = x(x - b)(x - 2b)$; $x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie den entsprechenden Wert für b und begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen nicht zu einem Schaubild von f gehören können.



Lösung: b =

Begründung:

12 Bei der Überprüfung der Kosten- und Gewinnsituation erhält die Buchhaltung folgende Angaben: Die Gesamtkosten lassen sich beschreiben durch die Funktion K mit $K(x) = x^3 - 6x^2 + cx + d$, wobei x die produzierte Menge in Mengeneinheiten (ME) bezeichnet. Bei einer Produktionsmenge von 4 ME betragen die Stückkosten 10 Geldeinheiten (GE) und der momentane Kostenzuwachs liegt bei 15 GE/ME.

Ermitteln Sie eine Polynomfunktion dritten Grades, die den Zusammenhang zwischen Produktionsmenge und Gesamtkostenfunktion beschreibt.

Lösung

Bedingungen: Lineares Gleichungssystem:

Lösung des linearen Gleichungssystems:

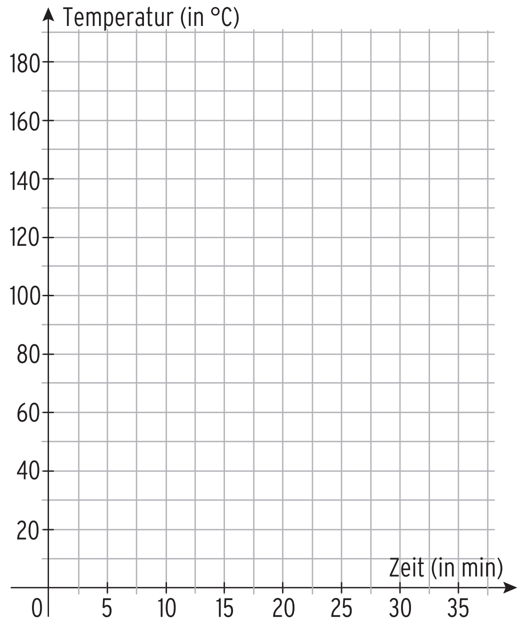
Funktionsterm:

Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben

1 Eine heisse Pizza wird aus dem Ofen genommen und auf einen Teller gelegt.
Die Tabelle enthält die Temperatur der Pizza zu verschiedenen Zeitpunkten.

Zeit t (in min)	0	5	10	15	20	25	30
Temperatur in °C	175	82,8	46,4	31,1	25,1	21,8	20,7

a) Stellen Sie den Abkühlungsprozess im Koordinatensystem dar.



b) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate in den ersten 5 Minuten.

____

c) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate zwischen der 15. und der 20. Minute.

____

d) Die mittlere Änderungsrate ist negativ, da

________________________________ .

e) Begründen Sie anhand der obigen Wertetabelle, dass der Vorgang nicht durch eine Funktion f mit $f(t) = a \cdot e^{kt}$ bzw. $f(t) = a \cdot b^{t}$ modelliert werden kann.
Begründung durch Rechnung: Die prozentuale Temperaturverringerung beträgt in den ersten 5 Minuten ____________________ % pro Minute und von der 15. bis zur 20. Minute ____________________ % pro Minute.
Da dieser Wert nicht ___________ ist, kann der Prozess nicht durch einen solchen Funktionsterm modelliert werden.
Begründung durch Argumentation: Ein solcher Funktionsterm ist zur Modellierung ungeeignet, da die x-Achse ____________________ ist und sich die Temperatur somit langfristig dem Wert ___°C annähern würde, was unrealistisch ist.

f) Nehmen Sie eine Zimmertemperatur von 20 °C an und ermitteln Sie einen geeigneten Funktionsterm durch Regression. Da der WTR durch Regression nur einen Funktionsterm der Form $f(t) = a \cdot e^{kt}$ bzw. $f(t) = a \cdot b^{t}$ ermitteln kann, müssen bei der Eingabe alle Temperaturwerte um 20°C vermindert werden.

Insgesamt erhält man: $f(t) =$ ____________ + 20.

g) Lisa behauptet: „Die Pizza kühlt nicht mehr als 25 ° C pro Minute ab“. Bestätigen oder widerlegen Sie diese Behauptung rechnerisch, anhand der Funktion f .

Die stärkste Abkühlung findet zwischen t = ___ und t = ___ statt.
Hier beträgt die Abkühlung: ______________________________ .

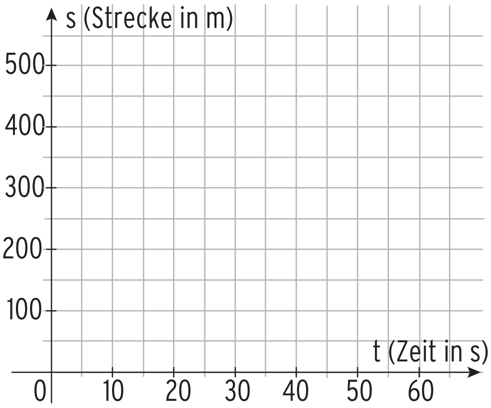
Somit ist die Behauptung __________ .

h) Beurteilen Sie die Modellierung des Abkühlungsprozesses durch die Funktion f.

2 Ordnen Sie durch Pfeile zu.

Bedeutung von f(x)			Bedeutung von f′(x)
Tankinhalt	☐	☐	Zufluss- bzw. Abflussgeschwindigkeit
Höhe einer Pflanze	☐	☐	Grenzkosten
Wassermenge in der Badewanne	☐	☐	Momentaner Krafstoffverbrauch
Produktionskosten	☐	☐	Momentane Stromstärke
Vorhandene Ladung	☐	☐	Wachstumsgeschwindigkeit
Gesamtabsatz	☐	☐	Absatzzahlen pro Woche
Anzahl der vorhandenen Atome	☐	☐	Leistung
Energie	☐	☐	Zerfallsrate
Gefahrene Strecke	☐	☐	Geschwindigkeit

3 Ein Zug fährt ab. Innerhalb der ersten 60 Sekunden kann die zurückgelegte Strecke s (in m) in Abhängigkeit von der Zeit t (in s) durch die Funktion s mit $s = \frac{1}{4}t^2$ dargestellt werden.



a) Stellen Sie den Vorgang im Koordinatensystem dar.

b) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von s in den ersten 2 Sekunden und in den nächsten 2 Sekunden.

____

____

c) Die mittlere Änderungsrate von s gibt die durchschnittliche ____________________ des Zuges im entsprechenden Zeitraum an.

Die mittlere Änderungsrate ☐ steigt ☐ fällt, somit ______________________________.

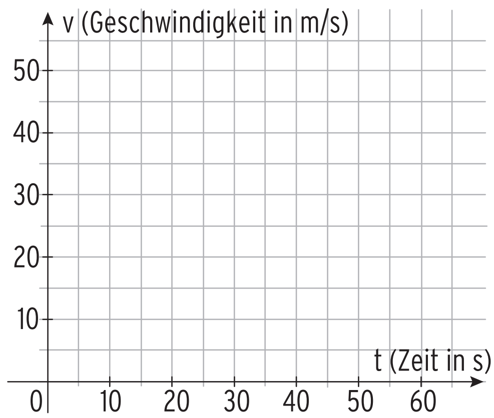
d) Berechnen Sie die momentane Geschwindigkeit des Zuges nach 20 s (näherungsweise), mithilfe der mittleren Änderungsrate im Intervall [19,9; 20,1]:

____.

e) Berechnen Sie die momentane Geschwindigkeit des Zuges nach 20 s mit Hilfe der Ableitungsfunktion. Es gilt __________________________________

und somit __________________________________.

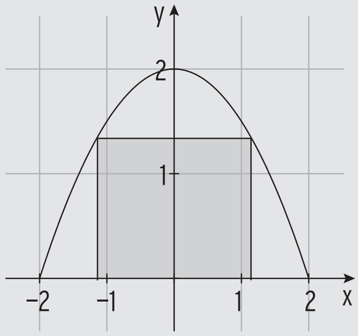
f) Stellen Sie die Entwicklung der momentanen Geschwindigkeit des Zuges im Koordinatensystem dar.



Extremwertaufgaben

mvurl.de/9sxg

1 Aus einem Werkstück soll ein Rechteck heraus gefräst werden. Die Berandung des Werkstücks wird beschrieben durch die Funktion f mit $f(x) = -0{,}5x^2 + 2;\ -2 \leq x \leq 2$ (siehe Abbildung).



Zwei Ecken liegen jeweils auf der x-Achse und auf dem Schaubild K von f.
Welches Rechteck hat den größtmöglichen Flächeninhalt?

Lösung

Wir wählen den Eckpunkt $P(a \mid -0{,}5a^2 + 2)$ auf K für $0 \leq a \leq 2$.

Zielfunktion: $A(a) = 2a \cdot f(a) = 2a \cdot (-0{,}5a^2 + 2)$

$A(a) = -a^3 + 4a;\ D = [0; 2]$

Untersuchung von A auf ein Maximum

Ableitungen: $A'(a) = -3a^2 + 4$

$A''(a) = -6a$

Notwendige Bedingung: $A'(a) = 0$ $\quad -3a^2 + 4 = 0$

$a^2 = \frac{4}{3}$

Mit $a > 0$: $a = 1{,}15$

Nachweis: $A''(1{,}15) < 0$

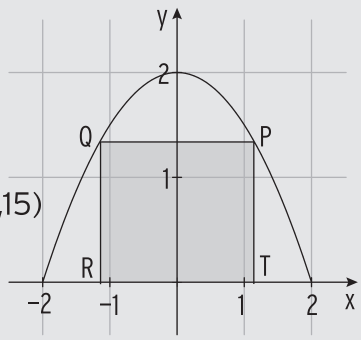
A hat ein lokales Maximum für $a = 1{,}15$.

Lokales Maximum: $A_{max} = A(1{,}15) = 3{,}08$

Randwerte

Für die Randstellen $a = 0$ und $a = 2$ gilt: $A(0) = 0 < A(1{,}15)$

$A(2) = 0 < A(1{,}15)$

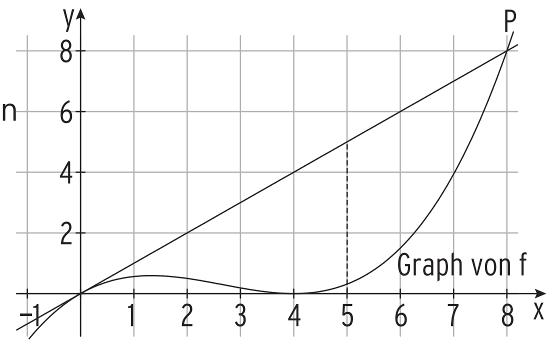


Ergebnis:

Das Rechteck mit den Punkten $P(1{,}15 \mid 1{,}34)$, $Q(-1{,}15 \mid 1{,}34)$, $R(-1{,}15 \mid 0)$ und $T(1{,}15 \mid 0)$ hat den größten Flächeninhalt .

2 Ein Geländeverlauf wird beschrieben durch die Funktion f mit
$f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x;\ 0 \leq x \leq 8$ (siehe Abbildung).

Ein Seil soll vom Ursprung zum Punkt P(8 I 8) gespannt werden.
Bestimmen Sie den größtmöglichen senkrechten Abstand des Seils zum Gelände.



Lösung

Wir wählen

Zielfunktion mit Definitionsbereich:

Untersuchung der Zielfunktion auf ein Maximum

Ableitungen:

Notwendige Bedingung:

Nachweis:

hat ein lokales Maximum für .

Lokales Maximum:

Randwerte
Für die Randstellen gilt:

Ergebnis:

4 Integralrechnung

Aufleitung und Stammfunktion

mvurl.de/5mwj

1 Ein Mitschüler versteht nicht, weshalb eine Funktion mehrere Stammfunktionen besitzt.

a) Erklären Sie anhand der Ableitungsregeln.

b) Erklären Sie grafisch, anhand von Schaubildern.

Skizzieren Sie hierfür die Schaubilder von F_1 bis F_3 in Abb. 1 und von f in Abb. 2.

F_1 mit $F_1(x) = \frac{1}{2}x^2$

F_2 mit $F_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$

F_3 mit $F_3(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

f mit $f(x) = x$

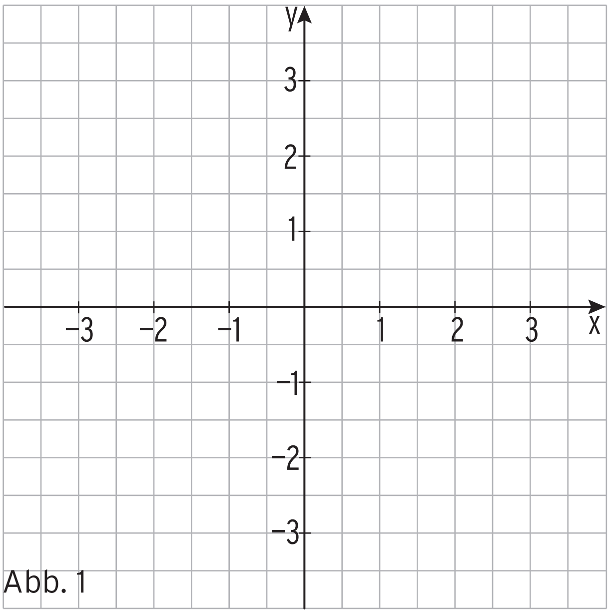


Abb. 1

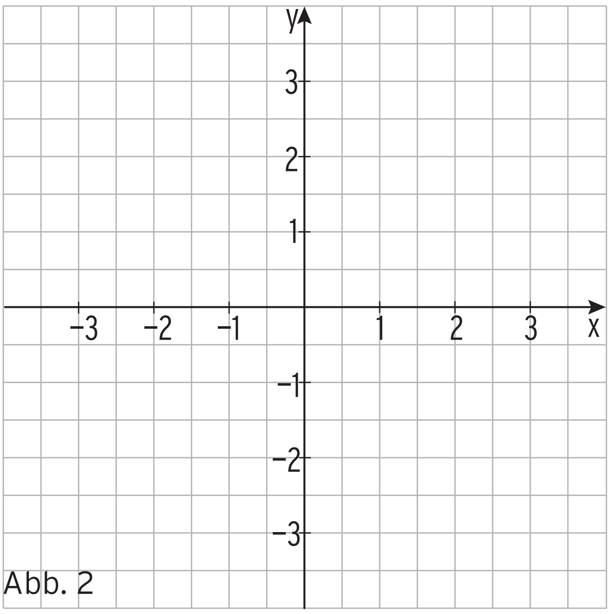


Abb. 2

2 Bilden Sie eine Stammfunktion.

$f(x) = 2\cos(3x) + 1$	$F(x) = \frac{2}{3}\sin(3x) + x + C$
$f(x) = -3\sin(\frac{x}{2}) - x$	$F(x) =$
$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^4 + 3$	$F(x) =$
$f(x) = \frac{1}{32}x^3 + x^2 + x - 4$	$F(x) =$
$f(x) = 5e^{2x} + 2x - 1$	$F(x) =$
$f(x) = ae^{-3x} + b$	$F(x) =$
$f(x) = \frac{3}{5}(x^3 - 2x^4)$	$F(x) =$
$f(x) = 4x - 1 - 4e^{1-2x}$	$F(x) =$

3 Bilden Sie eine Stammfunktion mit F(a) = b.

$f(x) = 4\sin(\pi x)$; $F(1) = 2$	$F(x) = -\frac{4}{\pi}\cos(\pi x) + C$; $F(1) = \frac{4}{\pi} + C = 2 \Rightarrow C = 2 - \frac{4}{\pi}$ $F(x) = -\frac{4}{\pi}\cos(\pi x) + 2 - \frac{4}{\pi}$
$f(x) = -\frac{4}{3}\sin(\frac{x}{2}) - 3$; $F(\pi) = 0$	$F(x) =$ $F(x) =$
$f(x) = -\frac{1}{32}x^3 + x^2 + 3x$; $F(1) = 0$	$F(x) =$ $F(x) =$
$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x - 1)$; $F(-1) = 1$	$F(x) =$ $F(x) =$
$f(x) = 0{,}2e^{2x+1} + 2{,}25$; $F(0) = 4$	$F(x) =$ $F(x) =$
$f(x) = 2a(e^{4-4x} + 1)$; $F(1) = 0$	$F(x) =$ $F(x) =$
$f(x) = \frac{4}{5}(x^5 - 2x^4)$; $F(-2) = 3$	$F(x) =$ $F(x) =$
$f(x) = \frac{4x}{3} - \frac{x^3}{12} - e^{\ln(2)x}$; $F(1) = 6$	$F(x) =$ $F(x) =$

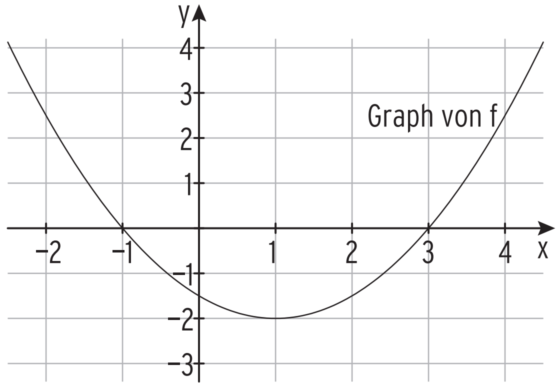
4 Entscheiden Sie, ob hier richtig oder falsch aufgeleitet wurde. Beschreiben Sie gegebenenfalls kurz, worin der Fehler besteht.

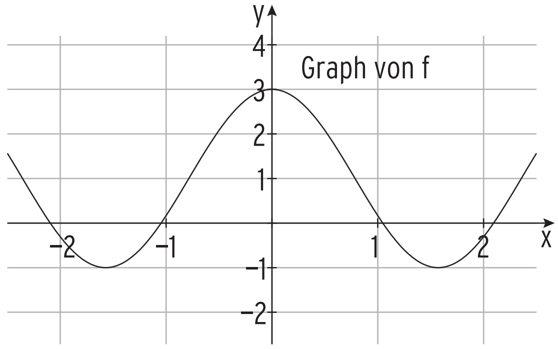
Funktion f Stammfunktion F	richtig (r) falsch (f)	richtig wäre …	Was wurde nicht beachtet?
$f(x) = 2x^3 - 4x^2$ $F(x) = 2x^4 - 4x^3$	☐ (r) ☒ (f)	$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3$	$g(x) = x^3 \Rightarrow G(x) = \frac{1}{4}x^4$ $h(x) = x^2 \Rightarrow H(x) = \frac{1}{3}x^3$
$f(x) = 1 + x$ $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	
$f(x) = e^{3x-2}$ $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	
$f(x) = 2\sin(2x)$ $F(x) = \cos(2x)$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	
$f(x) = e^{2x} \cdot (2x + 1)$ $F(x) = e^{2x} \cdot x$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	
$f(x) = 2 - \cos(\pi x + 1)$ $F(x) = \sin(\pi x + 1)$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	
$f(x) = \frac{1}{x^2}$ $F(x) = \frac{3}{x^3}$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	
$f(x) = -\frac{5}{2}(x^3 - 3x^2)$ $F(x) = -\frac{5}{2}(\frac{1}{4}x^4 - x^3)$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	
$f(x) = (2x - 1)^3$ $F(x) = \frac{1}{4}(2x - 1)^4$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	
$f(x) = 2x(2x + 5)$ $F(x) = x^2(x^2 + 5x)$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	

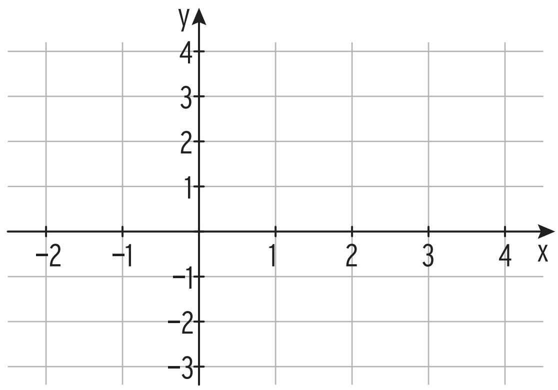
mvurl.de/gc7y

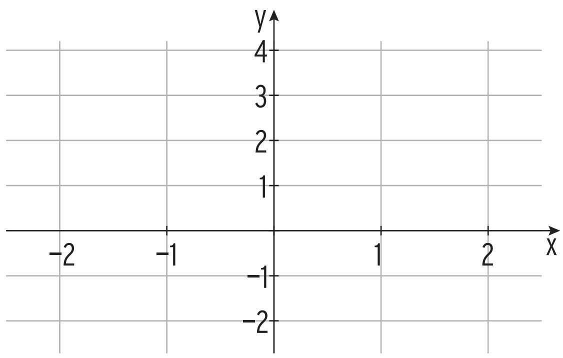
Grafisches Aufleiten

1 Skizzieren Sie das Schaubild einer Stammfunktion F von f.



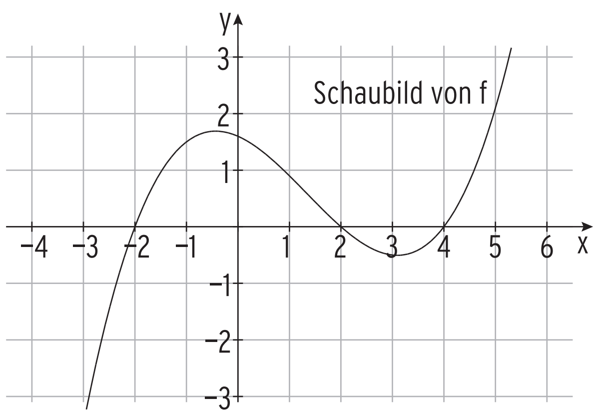




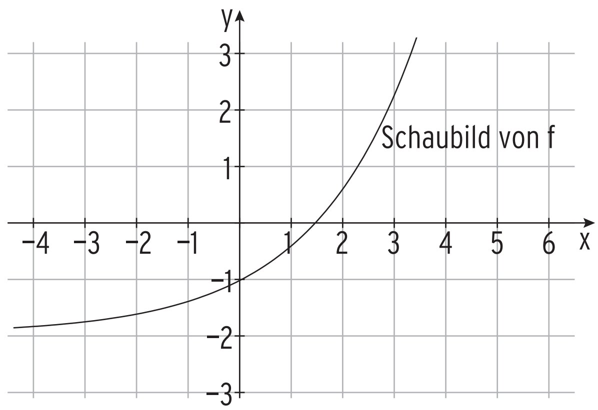


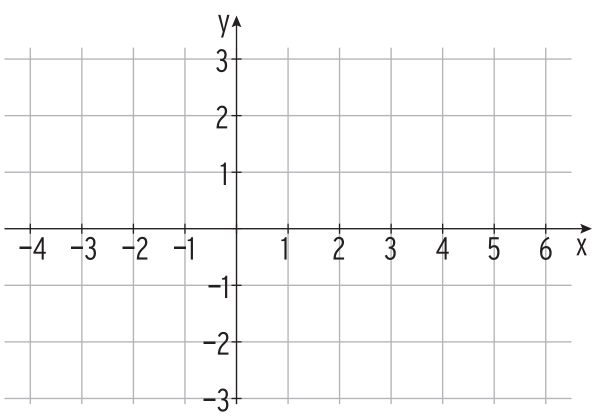
2 Skizzieren Sie das Schaubild einer Stammfunktion F von f

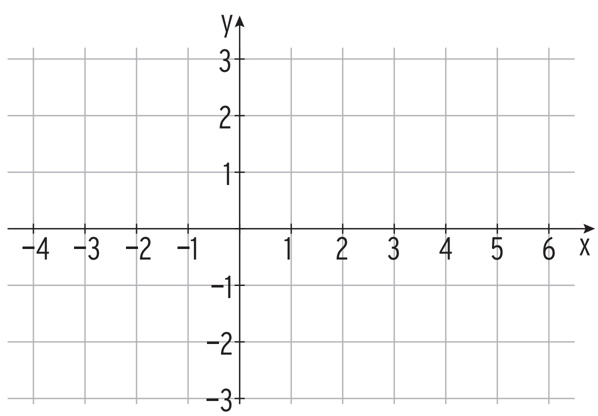
a) durch den Ursprung.



b) durch P(0 | 1)







4 Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden g und h.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

LGS in Matrixform: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Das LGS ist eindeutig lösbar: $r = 0{,}5$; $s = -0{,}5$

Einsetzen von z. B. $r = 0{,}5$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$

g und h schneiden sich in S(0,5 | 2 | 7,5).

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

5 Die beiden Geraden g und h verlaufen windschief. Überprüfen Sie.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; g und h verlaufen nicht parallel.

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

LGS in Matrixform: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Das LGS ist unlösbar.

Die Richtungsvektoren sind n icht parallel. g und h sind windschief.

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

6 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S und den Schnittwinkel.

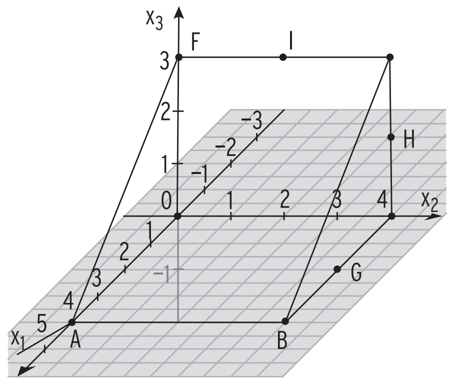
a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

7 Die Gerade g verläuft durch die Punkte B und I.
Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und H.
Die Gerade i verläuft durch die Punkte F und G.



a) Zeichnen Sie die Geraden ein.

b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden mithilfe der Abbildung. Begründen Sie Ihre Antwort:

g und h sind ______________________________

g und i sind ______________________________

c) Überprüfen Sie: h und i schneiden sich in $S(\frac{4}{3} \mid \frac{8}{3} \mid 1)$.

h: $\vec{x}$ =

Punktprobe mit S:

i: $\vec{x}$ =

Punktprobe mit S:

8 Sind die Aussagen über Geraden wahr oder falsch?

Das Vervielfache des Richtungsvektors einer Geraden ändert die Lage der Geraden.	☐ (w) ☐ (f)
Zu jeder Geraden gehört genau eine Geradengleichung.	☐ (w) ☐ (f)
Falls der Richtungsvektor einer Geraden keine 0 enthält, durchquert die Gerade jede Koordinatenebene ein Mal.	☐ (w) ☐ (f)
Falls bei einer Geraden Stützvektor und Richtungsvektor übereinstimmen, verläuft sie durch den Ursprung.	☐ (w) ☐ (f)
Falls der Richtungsvektor ein Mal den Eintrag 0 hat, verläuft die Gerade parallel zu einer Koordinatenachse.	☐ (w) ☐ (f)
Zwei Geraden, die sich nicht schneiden, verlaufen stets parallel zueinander.	☐ (w) ☐ (f)
Parallele Geraden haben denselben Richtungsvektor.	☐ (w) ☐ (f)

Ebenengleichung in Parameterform

mvurl.de/okhk

1 Die Ebene E verläuft durch den Punkt A und wird von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt. Geben Sie eine Gleichung von E an.

$A(-2\,|\,2\,|\,0)$; $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$

2 Gegeben ist die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $r; s \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie für die angegebenen Parameterwerte den zugehörigen Ebenenpunkt.

a) $r = 0;\ s = -1$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $A(-3\,|-1\,|-2)$

b) $r = 2;\ s = -2$:

3 Die Punkte liegen auf der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r; s \in \mathbb{R}$.
Vervollständigen Sie deren Koordinaten.

a) $A(0\,|\,3\,|\,\_\_\_)$ $0 = -1 + r \Rightarrow r = 1$
$3 = 2 + s \Rightarrow s = 1$ $x_3 = 3 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 4$ $A(0\,|\,3\,|\,4)$

b) $B(3\,|\,3\,|\,\_\_\_)$

4 Untersuchen Sie, ob die Punkte auf der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ liegen.

a) $A(-3\,|-11\,|-2)$ ☐ liegt auf E ☒ liegt nicht auf E

$\begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ LGS: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -11 \\ -3 & 4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 10 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 20 \end{array}\right)$

Das LGS ist nicht lösbar, der Punkt A liegt nicht auf der Ebene.

b) $B(7\,|-2\,|\,1)$ ☐ liegt auf E ☐ liegt nicht auf E

5 Die gegebenen Punkte liegen auf der Ebene E. Bestimmen Sie eine mögliche Parametergleichung von E.

a) A(− 2 | 1 | 5); B(5 | − 7 | 1); C(0 | 2 | − 3)

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right) + s \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right); \; E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}; \; r, s \in \mathbb{R}$$

b) A(2 | 0 | − 1); B(1 | − 1 | 1); C(0 | 2 | − 1)

$E: \vec{x} =$

c) A(0 | − 2|3); B(− 1 | − 1 | 2); C(3 | 4| − 2)

$E: \vec{x} =$

6 Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

a) Der Punkt P(1 | 3| 5) liegt nicht auf g. Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene E, in welcher die Gerade g und der Punkt P liegen.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$$

b) Die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ schneidet g.

Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene F, in welcher die Geraden g und h liegen.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$$

c) Die Gerade $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}$ verläuft parallel zu g.

Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene G, in welcher die Geraden g und i liegen.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$$

7 Die Ebene E verläuft durch den Punkt A(1 | 1 | 3). Geben Sie eine Gleichung von E an. wenn

a) E parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft.

E: $\vec{x}$ =

b) E parallel zur x_2x_3-Ebene verläuft.

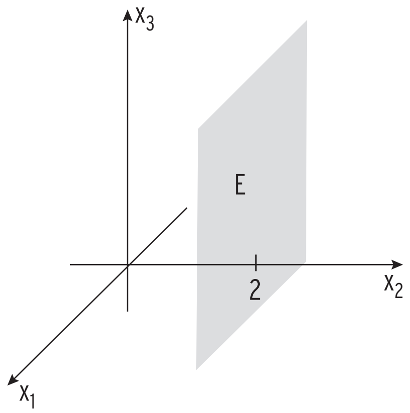
E: $\vec{x}$ =

c) die Ebene E durch den Punkt B (2 |0 | −3) parallel zur x_2-Achse verläuft.

E: $\vec{x}$ =

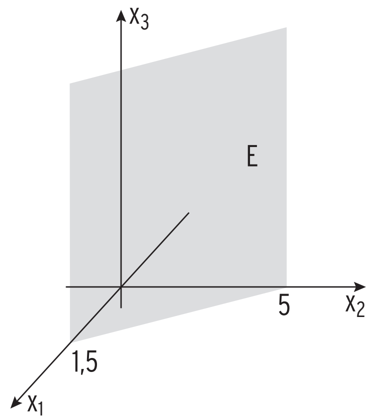
8 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene mit Hilfe der Abbildung.

a)



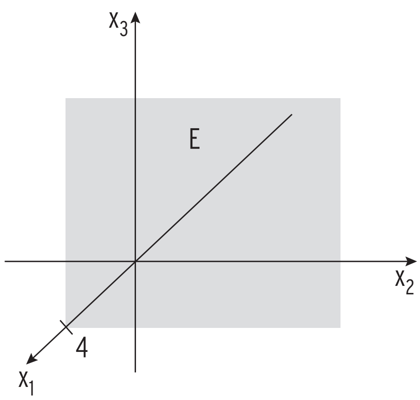
E:

b)



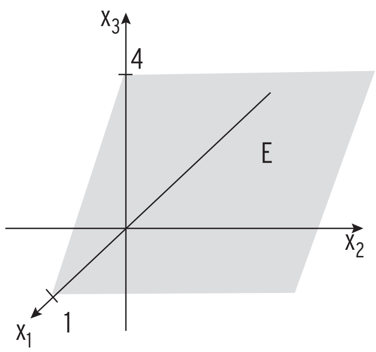
E:

c)



E:

d)



E:

Spurpunkte und Spurgeraden

mvurl.de/snzb

1 Bestimmen Sie die Spurpunkte und die Spurgeraden der Ebene E.

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

Spurpunkte:

$x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$ $\quad -2 + r + 2s = 0 \wedge -1 - r + s = 0$

Addition ergibt $3s = 3 \Leftrightarrow s = 1$ und damit $r = 0$

Einsetzen ergibt den Spurpunkt mit der x_3-Achse: $S_3(0 \mid 0 \mid 4)$

$x_1 = 0 \wedge x_3 = 0$ $\quad -2 + r + 2s = 0 \wedge 4 - 4r = 0$

$r = 1$ und damit $s = 0{,}5$

Einsetzen ergibt den Spurpunkt mit der x_2-Achse: $S_2(0 \mid -1{,}5 \mid 0)$

$x_2 = 0 \wedge x_3 = 0$ $\quad -1 - r + s = 0 \wedge 4 - 4r = 0$

$r = 1$ und damit $s = 2$

Einsetzen ergibt den Spurpunkt mit der x_1-Achse: $S_1(3 \mid 0 \mid 0)$

Spurgeraden:

Durch $S_1(3 \mid 0 \mid 0)$ und $S_2(0 \mid -1{,}5 \mid 0)$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

Spurgerade von E mit der x_1x_2-Ebene.

Durch $S_1(3 \mid 0 \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid 4)$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

Spurgerade von E mit der x_1x_3-Ebene.

Durch $S_2(0 \mid -1{,}5 \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid 4)$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

Spurgerade von E mit der x_2x_3-Ebene.

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

2 Ist hierdurch eine Ebene eindeutig festgelegt?

Drei verschiedene Punkte.	☐ ja ☐ nein
Die beiden einzigen Spurpunkte.	☐ ja ☐ nein
Zwei von drei Spurgeraden.	☐ ja ☐ nein
Drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.	☐ ja ☐ nein
Zwei echt parallele Geraden.	☐ ja ☐ nein
Zwei sich schneidende Geraden.	☐ ja ☐ nein
Eine Gerade und ein Punkt, der nicht auf der Geraden liegt.	☐ ja ☐ nein
Zwei windschiefe Geraden.	☐ ja ☐ nein

3 Gegeben sind die Gleichungen der Ebenen E, F, G und H:

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R};$ $F: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R};$

$G: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R};$ $H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$

Auf welche der Ebenen treffen die Aussagen zu?

Die Ebene besitzt nur zwei Spurpunkte.	☐ E ☐ F ☐ G ☐ H
Die Ebene enthält den Ursprung.	☐ E ☐ F ☐ G ☐ H
Die Ebene ist parallel zu mindestens einer Koordinatenachse.	☐ E ☐ F ☐ G ☐ H
Die Ebene ist parallel zur x_1-Achse.	☐ E ☐ F ☐ G ☐ H
Die Ebene ist parallel zur x_3-Achse.	☐ E ☐ F ☐ G ☐ H
Die Ebene ist parallel zur x_1x_2-Ebene.	☐ E ☐ F ☐ G ☐ H

mvurl.de/99ow

Abstandsberechnungen

Abstand von zwei Punkten

1 Berechnen Sie den Abstand der beiden Punkte A und B.

a) $A(0\,|-1|\,2)$; $B(1\,|\,3\,|-5)$

b) $A(4\,|-2|\,0)$; $B(-1\,|\,4\,|-2)$

2 Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC mit $A(2\,|-2\,|\,1)$, $B(-2|\;2|\;1)$ und $C(-2|-2|\,5)$ ein gleichseitiges Dreieck ist.

3 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0\,|\,2|\,2)$ und $B(-3\,|\,u\,|\,6)$ gegeben. Zeigen Sie, dass der Abstand von A und B mindestens 5 beträgt.

Abstand Punkt - Gerade

1 Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Geraden g.

a) $A(4\,|-2|\,4)$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -r \\ 2+r \\ 2-2r \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} -4-r \\ 4+r \\ -2-2r \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AQ} \cdot \vec{u} = 0: \begin{pmatrix} -4-r \\ 4+r \\ -2-2r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4 + r + 4 + r \;\; +4 + \;4r = 0 \Leftrightarrow r = -2$

Einsetzen ergibt den Abstand für $r = -2$: $\left|\overrightarrow{AQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{12}$

b) $A(0\,|-1|\,3)$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$.

2 Gegeben ist die Gerade g mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

Geben Sie eine Gleichung einer Geraden an, die parallel zu g durch P (0| 1| − 2) verläuft.

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.

Abstand Punkt - Koordinatenebene

1 Ermitteln Sie den Abstand von Punkt P(3| − 4 | 5) zur

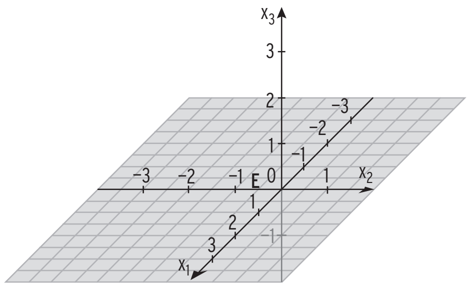
x_1x_2-Ebene:

x_1x_3-Ebene:

x_2x_3-Ebene:

2 Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie g.



b) Geben Sie den Abstand von g zu den Koordinatenebenen an.

x_1x_2-Ebene:

x_2x_3-Ebene:

c) Geben Sie den Abstand von g zur x_2-Achse an: ______________

3 Geben Sie die Gleichung einer Geraden h an, die zur x_1-Achse und zur x_3-Achse jeweils den Abstand 2 hat.

Der Abstand der Geraden h zur x_2-Achse beträgt ______________ .

2 Binomialverteilung

Bernoulli-Formel

mvurl.de/84tw

1 Untersuchen Sie, ob es sich hier um einen Bernoulli-Versuch handelt. Geben Sie in diesem Fall die Länge der Bernoullikette und die Trefferwahrscheinlichkeit an.

Ein Würfel wird 10-mal geworfen. Nach jedem Wurf wird die Augenzahl notiert.	☐ kein Bernoulli-Versuch ☐ Bernoulli-Versuch; n =___; p = ___
Ein Würfel wird 10-mal geworfen. Nach jedem Wurf wird notiert ob eine Eins gewürfelt wurde.	☐ kein Bernoulli-Versuch ☐ Bernoulli-Versuch; n =___; p = ___
Unter 10 Personen befinden sich 3 Schmuggler. Ein Zollbeamter kontrolliert die Personen nacheinander.	☐ kein Bernoulli-Versuch ☐ Bernoulli-Versuch; n =___; p = ___
Im Schnitt haben 15 % aller Autos abgefahrene Reifen. Ein Polizist überprüft die Reifen von 20 Autos.	☐ kein Bernoulli-Versuch ☐ Bernoulli-Versuch; n =___; p = ___
Von den 24 Schülern aus einer Klasse besitzen 7 ein i-Phone. Nacheinander werden 6 Schüler aus der Klasse befragt, ob sie ein i-Phone besitzen.	☐ kein Bernoulli-Versuch ☐ Bernoulli-Versuch; n =___; p = ___
In 87 % aller Haushalte in Deutschland ist mindestens ein Fernseher vorhanden. Es werden 50 Haushalte befragt, ob mindestens ein Fernseher vorhanden ist.	☐ kein Bernoulli-Versuch ☐ Bernoulli-Versuch; n =___; p = ___

2 Berechnen Sie den Wert der Binomialkoeffizienten ohne Hilfsmittel.

$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$	$\binom{3}{2} =$
$\binom{10}{1} =$	$\binom{10}{8} =$
$\binom{6}{2} =$	$\binom{20}{0} =$
$\binom{8}{7} =$	$\binom{14}{1} =$

3 Vervollständigen Sie die Bernoulliformel.

$P(X = \_\_\_) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}7^{\square} \cdot \triangle^{\bigcirc}$	Lösung: $P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}7^{2} \cdot 0{,}3^{2}$
$P(X = \_\_\_) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}4^{\square} \cdot \triangle^{\bigcirc}$	$P(X = 5) = \binom{12}{\diamondsuit} \cdot 0{,}1^{\square} \cdot \triangle^{\bigcirc}$
$P(X = 10) = \binom{50}{\diamondsuit} \cdot \triangle^{\bigcirc} \cdot 0{,}99^{\square}$	$P(X = \_\_\_) = \binom{20}{0} \cdot 0{,}05^{\square} \cdot \triangle^{\bigcirc}$
$P(X = 7) = \binom{8}{7} \cdot 0{,}4^{\square} \cdot \triangle^{\bigcirc}$	$P(X = \_\_\_) = \binom{\ }{\ } \cdot 0{,}1^{5} \cdot \triangle^{15}$

4 Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Bernoulliformel.

Eine Maschine produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % fehlerfreie Schrauben. Bei einer Qualitätskontrolle werden 100 Schrauben überprüft. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 89 fehlerfrei sind.	X:__________ P(X = ___) = __________ = __________
Eine verbeulte Münze, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 42 % „Wappen“ zeigt, wird 25 Mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass 12 Mal „Zahl“ erscheint.	X:__________ P(X = ___) = __________ = __________
Ein Glücksrad hat 4 gleich große Felder mit den Farben gelb, grün, rot und blau. Das Glücksrad wird 13 Mal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass 8 Mal die Farbe blau erscheint.	X:__________ P(X = ___) = __________ = __________
Ein Basketballspieler verwandelt einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 78 %. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er von 20 Freiwürfen zwei nicht verwandelt.	X:__________ P(X = ___) = __________ = __________
Bei der Endkontrolle werden 50 Bälle überprüft. 10 % der produzierten Bälle sind defekt und damit nicht wettkampftauglich. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für genau 5 defekte Bälle.	X:__________ P(X = ___) = __________ = __________

5 Andreas möchte eine 10-tätige Gebirgstour machen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag beträgt dort in dieser Jahreszeit 34 %.
Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Bernoulliformel.

X: Anzahl ________________ ; X ist _________ -verteilt

Wahrscheinlichkeit für 2 Regentage	P(X =___) = ______________________________
Wahrscheinlichkeit für 3 oder 4 Regentage	P(X =___) + P(____) = ______________________________
Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Regentag	1 − P(X =___) = ______________________________
Wahrscheinlichkeit für höchstens 8 Regentage	1 − P(X =___) − ____ = ______________________________

6 Bei einer Tombola führen 10 % der Lose zu einem Gewinn. Jan kauft 12 Lose.
Geben Sie jeweils eine Aufgabenstellung an, deren Lösung auf die folgende Weise berechnet wird. Gehen Sie von einer Binomialverteilung aus.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Jan:

	$P = \binom{12}{3} \cdot 0{,}10^3 \cdot 0{,}90^9$
	$P = \binom{12}{2} \cdot 0{,}10^2 \cdot 0{,}90^{10} + \binom{12}{3} \cdot 0{,}10^3 \cdot 0{,}90^9$
	$P = 1 - \binom{12}{0} \cdot 0{,}10^0 \cdot 0{,}90^{12}$
	$P = \binom{12}{0} \cdot 0{,}10^0 \cdot 0{,}90^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0{,}10^1 \cdot 0{,}90^{11}$

7 Vervollständigen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und die kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung der binomialverteilten Zufallsvariablen. Geben Sie außerdem die Länge der Bernoulli-Kette und die Trefferwahrscheinlichkeit an.

mvurl.de/8xer

a) n = ____ p = 0,5

k	0	1	2
$P(X = k)$			0,25
$P(X \leq k)$	0,25	0,75	

Weisen Sie mit der Bernoulli-Formel nach, dass $P(X = 0) = P(X = 2)$ gilt.

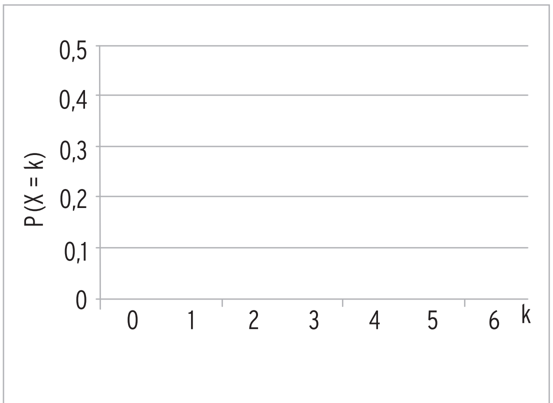
b) n = ____ p = 0,8

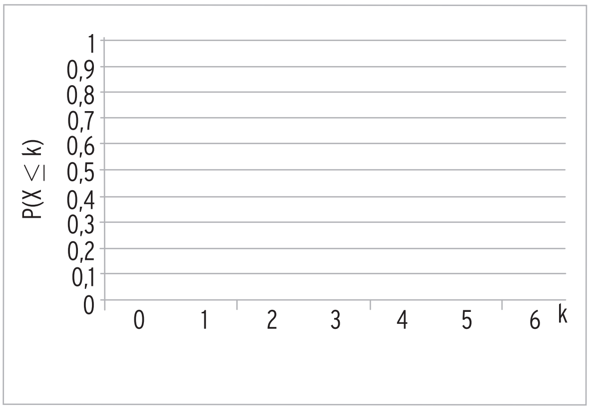
k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,0016	0,0256			
$P(X \leq k)$			0,1808	0,5904	1

Weisen Sie mit der Bernoulli-Formel nach, dass $P(X = 3) = P(X = 4)$gilt.

8 Eine Zufallsvariable ist $B_{6;\,0,5}$-verteilt. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und die kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung an und stellen Sie diese grafisch dar.

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$							
$P(X \leq k)$							1





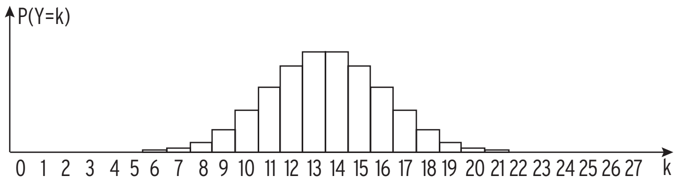
9 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten.

X ist $B_{20;\,0,25}$-verteilt: $P(X = 5) = B_{20;\,0,25}(5) = 0{,}2023$		
$B_{11;\,0,9}(5) =$	$B_{100;\,0,3}(30) =$	$B_{500;\,0,02}(10) =$

10 Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt; die Trefferwahrscheinlichkeit beträgt $\frac{1}{4}$.
Vervollständigen Sie die folgende Gleichung zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeit:

$$P(X = \quad) = \binom{\quad}{3} \cdot \left(\quad\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

11 Die Abbildung zeigt die symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße Y.



Gegeben sind die Wahrscheinlichkeitswerte $P(Y \leq 15) = 0{,}78$ und $P(Y = 12) = 0{,}13$. Berechnen Sie unter Verwendung dieser Werte den zugehörigen Wert für die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 14)$.

12 Eine Zufallsvariable zählt die Anzahl der Treffer bei einem Bernoulli-Versuch. Ordnen Sie jedem Ereignis den zugehörigen Berechnungsansatz durch einen Pfeil zu.

Genau 3 Mal.	$P(X \leq 2)$
Höchstens 3 Mal.	$P(X = 3) + P(X = 4)$
Weniger als 3 Mal.	$1 - P(X \leq 3)$
Mindestens 3 Mal.	$P(X \leq 4) - P(X \leq 1)$
Mindestens 2 und höchstens 4 Mal.	$P(X \leq 3)$
3 oder 4 Mal.	$P(X = 4)$
Genau 4 Mal.	$1 - P(X \leq 2)$
Mehr als 3 Mal.	$P(X \leq 4) - P(X \leq 2)$
Mehr als 2 Mal, aber weniger als 5 Mal.	$P(X = 3)$

13 Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit n = 16 und p = 0,58. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten mithilfe des WTR.

$P(X = 7)$= ___________________	$P(X < 9)$ = ___________________ = ___________________
$P(X \geq 5)$ = ___________________ = ___________________	$P(X > 6)$ = ___________________ = ___________________
$P(X = 10) + P(X = 11)$ = ___________________	$P(4 < X < 8)$ = ___________________ = ___________________
$P(3 \leq X \leq 8)$ = ___________________ = ___________________	$P(1 \leq X \leq 5)$ = ___________________ = ___________________

14 Ein Glücksrad hat 6 gleich große Felder. 2 der Felder sind grün, 3 sind rot und eines ist blau. Das Glücksrad wird 15 Mal gedreht.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des WTR die Wahrscheinlichkeit

für mehr als 7 Mal grün.	p = _____ ; P(X _______) =
für höchstens 8 Mal grün oder rot.	
für 5 oder 6 Mal blau.	
für mindestens 7 und höchstens 12 Mal rot.	
für mehr als 8 Mal rot oder blau.	

b) Wie oft müsste man mindestens drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,9 % mindestens einmal grün zu erhalten?

P(mind. einmal grün bei n Drehungen) $> 0{,}999 \Leftrightarrow$ $1 - P($ __________ $) > 0{,}999$

$P(\quad) < 0{,}001 \Leftrightarrow$ ____

Aufrunden ergibt n=_____.

Es müsste also mindestens ___ Mal gedreht werden.

15 Ein Medikament verursacht bei 5 % aller Patienten Nebenwirkungen. Bei einem Test nehmen 170 Personen das Medikament ein.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei mindestens 13 Personen Nebenwirkungen auftreten.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei höchstens 10 % aller Personen Nebenwirkungen auftreten.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei höchstens 5 % aller Personen Nebenwirkungen auftreten.

d) Wie viele Personen müssten das Medikament testen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass bei mindestens einer Person Nebenwirkungen auftreten, mindestens 95 % beträgt?

16 Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X.

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	0,0467	0,1866	0,3110	0,2765	0,1382	0,0369	0,0041

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Tabelle.

$P(X = 4)$	
$P(X \leq 1)$	
$P(X \geq 4)$	
$P(3 \leq X \leq 5)$	
$\sum_{i=0}^{2} P(X = x_i)$	
$\sum_{i=4}^{6} P(X = x_i)$	
$P(X > 5)$	

Erwartungswert, Standardabweichung einer Binomialverteilung

mvurl.de/5jmc

1 Es liegt eine binomialverteilte Zufallsvariable vor.

a) Ergänzen Sie die unvollständigen Spalten.

n	50	50	80		125
p	0,2	0,6		0,5	
μ	$n \cdot p = 10$		40	60	12,5
σ	$\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 2{,}83$				

b) Vervollständigen Sie die nachfolgenden Aussagen. Berechnen Sie hierzu eventuell weitere Spalten in der Tabelle aus a).

- Eine Vervierfachung von n (p = konstant) führt zu einer ______________ von μ.
- Eine Vervierfachung von n (p = konstant) führt zu einer ______________ von σ.
- Eine Vervierfachung von p (n = konstant) führt zu einer ______________ von μ.
- Bei gegebenem n erhält man den höchsten Wert für σ, wenn man p = _____ wählt. Hingegen sinkt σ, wenn p gegen die Zahl ___ oder gegen die Zahl ___ strebt.

2 Eine Maschine produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % fehlerfreie Schrauben. Bei einer Qualitätskontrolle werden 3 Schrauben überprüft. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl an fehlerfreien Schrauben bei der Qualitätskontrolle an.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen: ______________

b) μ gibt inhaltlich ____ an.

c) Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X an.

k	0	1	2	3
P(X = k)				

d) Berechnen Sie μ erneut. Verwenden Sie hierzu jedoch die Wahrscheinlichkeitsverteilung. ____

e) Berechnen Sie die Standardabweichung der Zufallsvariablen.

f) σ gibt inhaltlich ______________________________.__________ an.

3 Vervollständigen Sie die Tabelle.

n	p	μ	σ	σ-Intervall	2σ-Intervall	3σ-Intervall
500	0,7	350	10,25	[339,75; 360,25]	[329,50; 370,50]	[319,25; 380,75]
600	0,5					
	0,17	34	5,31			
10				[3,32; 6,48]		
	0,25					[21,60; 53,40]

4 Ein Glücksrad hat drei farbige Sektoren, die beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt werden: Rot 20 %; Grün 30 %; Blau 50 %.
Das Glücksrad wird n-mal gedreht. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Farbe Rot angezeigt wird.

a) Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist.

b) Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
P(X = k)	0,01	0,06	0,14	0,21	0,22	0,17	0,11	0,05	

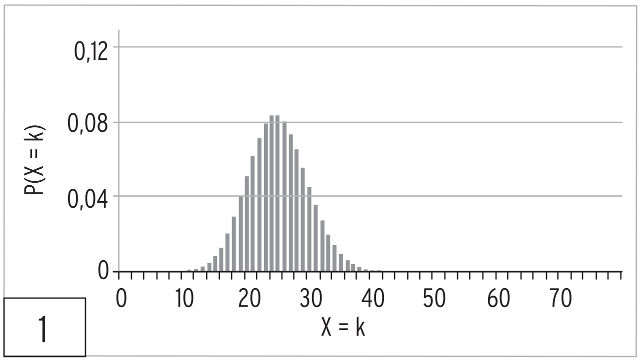
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3-mal rot angezeigt wird.

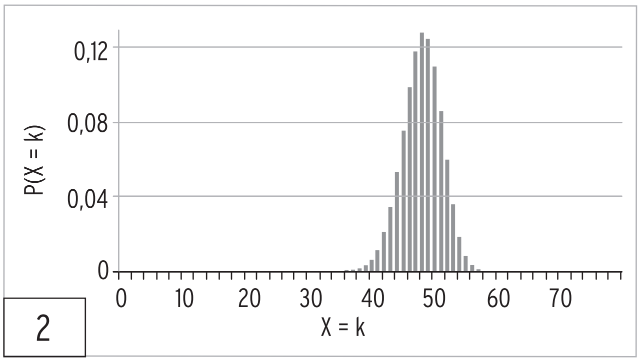
Entscheiden Sie, welcher der folgenden Werte von n der Tabelle zugrunde liegen kann: 20, 25 oder 30. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

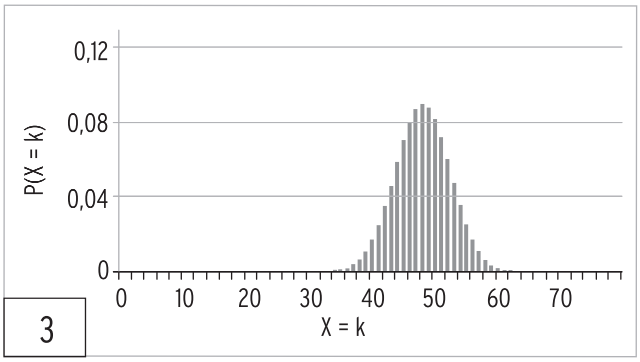
c) Es gilt n = 30. Berechnen Sie μ und σ.

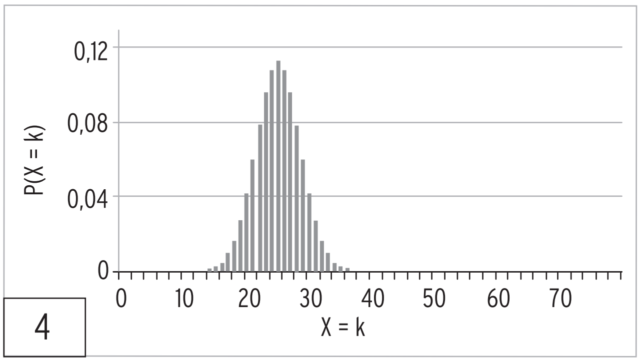
5 Vervollständigen Sie die Tabelle. Ordnen Sie dann die Schaubilder zu.

n	250	50	80	60
p	0,1	0,5	0,6	0,8
μ				
σ				
Schaubild				









6 In einem Hallenbad gibt der Eintrittskartenautomat jedem zwölften Besucher eine unbrauchbare Eintrittskarte aus. An einem Samstag Vormittag benutzen 155 Personen den Automat.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Personen an diesem Tag mit einer unbrauchbaren Eintrittskarte im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegt.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Anzahl der unbrauchbaren Eintrittskarten

- 14 oder mehr
- 10 bis 13
- weniger als 9
- mindestens 8 und höchstens 12

7

a) Die binomialverteilte Zufallsgröße X hat die Parameter $n = 4$ und p sowie den Erwartungswert 2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X = 4)$.

b) Die binomialverteilte Zufallsgröße Y hat die Parameter n und $p = 0{,}2$. Formulieren Sie dazu eine Aufgabenstellung, die sich mithilfe des Ansatzes $1 - 0{,}8^n < 0{,}3$ lösen lässt.

8 Im Folgenden werden zwei Würfel stets gemeinsam geworfen. Bei jedem der beiden Würfel sind die Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert.

a) Die beiden Würfel werden einmal geworfen. Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei keine „6“ auftritt, $\frac{25}{36}$ beträgt.

b) Die beiden Würfel werden 36-mal geworfen. Die binomialverteilte Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Würfe an, bei denen keine „6“ auftritt. Begründen Sie für jede der folgenden Abbildungen, dass sie nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X zeigt.

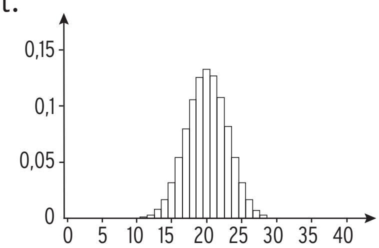


Abb. 1

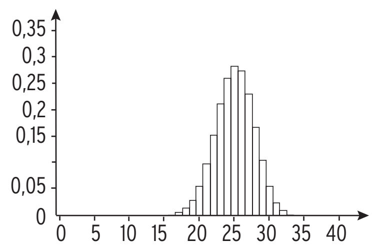


Abb. 2

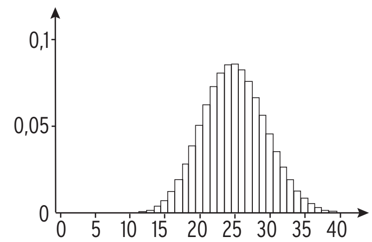


Abb. 3

Bohner | Ott | Deusch | Rosner

Arbeitsheft

Mathematik – Jahrgangsstufen 1 und 2

Grundlegendes Anforderungsniveau

Berufliches Gymnasium

Baden-Württemberg

Analysis

Vektorielle Geometrie

Stochastik

Lösungen

Merkur
Verlag Rinteln

I Analysis

1 Trigonometrische Funktionen und zugehörige Gleichungen

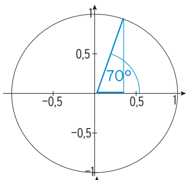
Definition der Winkelfunktionen

1 Zeichnen Sie den Winkel α ein und bestimmen Sie $\sin(\alpha)$ bzw. $\cos(\alpha)$.

a) $\alpha = 70°$

$\sin(\alpha) \approx 0{,}9$

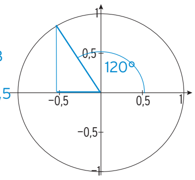
$\cos(\alpha) \approx 0{,}3$



b) $\alpha = 120°$

$\sin(\alpha) \approx 0{,}8$

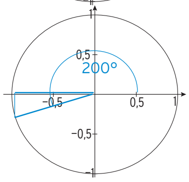
$\cos(\alpha) = -0{,}5$



c) $\alpha = 200°$

$\sin(\alpha) \approx -0{,}3$

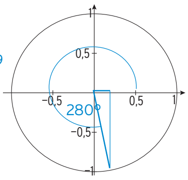
$\cos(\alpha) \approx -0{,}9$



d) $\alpha = 280°$

$\sin(\alpha) \approx -0{,}9$

$\cos(\alpha) \approx 0{,}1$

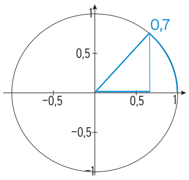


2 Zeichnen Sie den Winkel x (im Bogenmaß) ein und bestimmen Sie $\sin(x)$ bzw. $\cos(x)$.

a) $x = 0{,}7$

$\sin(0{,}7) \approx 0{,}6$

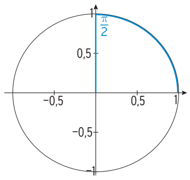
$\cos(0{,}7) \approx 0{,}7$



b) $x = \frac{\pi}{2}$

$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

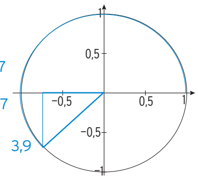
$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$



c) $x = 3{,}9$

$\sin(3{,}9) \approx -0{,}7$

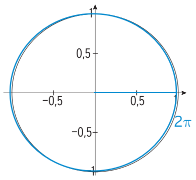
$\cos(3{,}9) \approx -0{,}7$



d) $x = 2\pi$

$\sin(2\pi) = 0$

$\cos(2\pi) = 1$



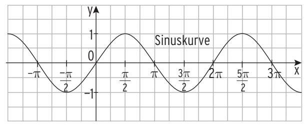
3 Vervollständigen Sie die Tabelle mithilfe eines Hilfsmittels.

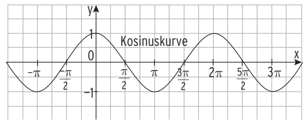
α	x	sin(x)	cos(x)
60°	$\frac{1}{3}\pi$	0,866	0,5
20°	$\frac{1}{9}\pi \approx 0{,}35$	0,342	0,940
90°	$\frac{1}{2}\pi \approx 1{,}57$	1	0
120°	$\frac{2}{3}\pi \approx 2{,}09$	0,866	− 0,5

α	x	sin(x)	cos(x)
57,3°	1	0,841	0,540
30°	$\frac{1}{6}\pi$	0,5	0,866
143,3°	2,5	0,598	− 0,801
286,6°	5	− 0,959	0,284

4 Vervollständigen Sie die Tabelle. Skalieren Sie die x-Achse.

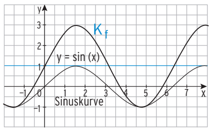
x	sin(x)	cos(x)
0	0	1
2π	0	1
π	0	− 1
$\frac{1}{2}\pi$	1	0
$-\frac{1}{2}\pi$	− 1	0
$-\frac{3}{2}\pi$	1	0
$\frac{5}{2}\pi$	1	0
7π	0	− 1
12π	0	1



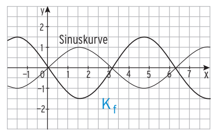


5 Zeichnen Sie den Graphen von f ein.

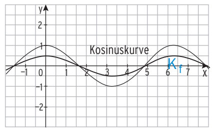
a) $f(x) = 2\sin(x) + 1$



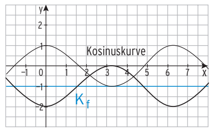
b) $f(x) = -1{,}5\sin(x)$



c) $f(x) = 0{,}5\cos(x)$



d) $f(x) = -\cos(x) - 1$



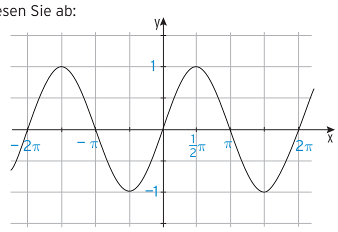
6 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$.
Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:

$\sin(2\pi) = 0$

$\sin(-\frac{3}{2}\pi) = 1$

$\sin(\frac{5}{2}\pi) = 1$

$\sin(-\pi) = 0$



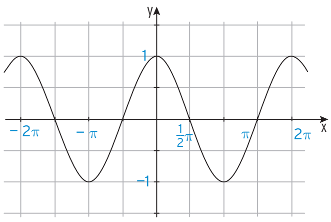
7 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Kosinusfunktion f mit $f(x) = \cos(x)$.
Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:

$\cos(2\pi) = 1$

$\cos(-\frac{3}{2}\pi) = 0$

$\cos(\frac{1}{2}\pi) = 0$

$\cos(-\pi) = -1$



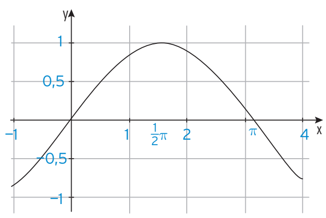
8 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$.
Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:

$\sin(2) = 0{,}9$

$\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$

$\sin(\frac{1}{4}\pi) = 0{,}7$

$\sin(-\frac{1}{2}) = -0{,}5$



Transformationen

1 Geben Sie die Amplitude a und die Periode p der Funktion f an.

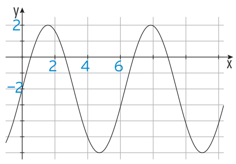
Funktionsterm	a	p	Funktionsterm	a	p
$f(x) = 0{,}25\sin(\pi x)$	$a = 0{,}25$	$\frac{2\pi}{\pi} = 2$	$f(x) = -5\cos(\frac{\pi}{2}x)$	$a = 5$	$p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$
$f(x) = 6\cos(5x)$	$a = 6$	$p = \frac{2\pi}{5}$	$f(x) = 1{,}6\sin(3x)$	$a = 1{,}6$	$p = \frac{2\pi}{3}$
$f(x) = -4\sin(\frac{x}{3})$	$a = 4$	$p = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$	$f(x) = -\frac{4}{3}\sin(\frac{x}{2})$	$a = \frac{4}{3}$	$p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
$f(x) = 3\cos(2x)$	$a = 3$	$p = \frac{2\pi}{2} = \pi$	$f(x) = \cos(x) + 1$	$a = 1$	$p = 2\pi$

2 Geben Sie den Funktionsterm einer Sinusfunktion bzw. einer Kosinusfunktion mit der Periode p und der Amplitude a an.

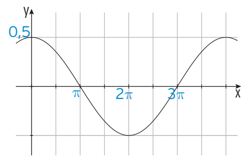
a	p	Sinusfunktion	a	p	Kosinusfunktion
$a = 2$	$p = 2$	$f(x) = 2\sin(\pi x)$	$a = 6$	$p = 4\pi$	$f(x) = 6\cos(\frac{x}{2})$
$a = \pi$	$p = 1$	$f(x) = \pi\sin(2\pi x)$	$a = 4$	$p = 4$	$f(x) = 4\cos(\frac{\pi}{2}x)$
$a = 0{,}5$	$p = \frac{2}{3}\pi$	$f(x) = 0{,}5\sin(3x)$	$a = \frac{5}{2}$	$p = \frac{3}{4}$	$f(x) = \frac{5}{2}\cos(\frac{8}{3}\pi x)$

3 Beschriften Sie die Koordinatenachsen.

$f(x) = 4\sin(x) - 2$



$f(x) = 0{,}5\cos(0{,}5x)$



4 Geben Sie den zugehörigen Funktionsterm an. Der Graph von f mit $f(x) = \sin(x)$ wird

a) um 2 nach links und um 0,5 nach unten verschoben. $g(x) = \sin(x + 2) - 0{,}5$

b) an der x-Achse gespiegelt und dann um 1 nach oben verschoben. $g(x) = -\sin(x) + 1$

c) mit Faktor 3 in y-Richtung gestreckt und dann um 3 nach links verschoben. $g(x) = 3\sin(x + 3)$

d) mit Faktor 2 in x-Richtung gestreckt und dann um 3 nach unten verschoben. $g(x) = \sin(0{,}5x) - 3$

5 Ergänzen Sie die folgenden Sätze.

a) Das Schaubild der Funktion g mit g(x) = 0,5sin(x) − 1 entsteht aus der Sinuskurve (y = sin(x)) durch Streckung mit dem Faktor 0,5 in y -Richtung und durch Verschiebung um 1 nach unten.

b) Das Schaubild der Funktion g mit g(x) = − 3cos(2x) + 4 entsteht aus der Kosinuskurve (y = cos(x)) durch Spiegelung an der x-Achse, durch Streckung mit dem Faktor 3 in y-Richtung, Streckung mit dem Faktor 0,5 in x -Richtung und durch Verschiebung um 4 nach oben.

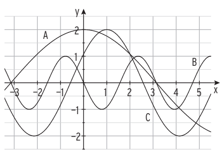
c) Das Schaubild der Funktion g mit g(x) = 2cos(x + 4) + 5 entsteht aus der Kurve mit y = cos(x) durch Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung, durch Verschiebung um 4 nach links und durch Verschiebung um 5 nach oben.

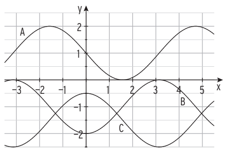
d) Das Schaubild der Funktion g mit g(x) =5sin(0,5x) − 1 entsteht aus der Kurve mit y = sin(x) durch Streckung mit dem Faktor 5 in y-Richtung, durch Streckung mit dem Faktor 2 in x-Richtung und durch Verschiebung um 1 nach unten .

6 Wie geht der Graph von g aus dem Graphen von f mit f(x) = sin(x) hervor?

g(x) = 2sin(x) + 1	Streckung in y-Ri mit 2; Verschiebung nach oben um 1
g(x) = − 3sin(4x) + 2	Streckung in y-Ri mit 3; Spiegelung an der x-Achse; Streckung in x-Ri mit 0,25; Verschiebung nach oben um 2
g(x) = 0,25sin(x − 3) + 5	Streckung in y-Ri mit 0,25; Verschiebung nach rechts um 3 Verschiebung nach oben um 5
g(x) = 2,5sin(2x) − 3	Streckung in y-Ri mit 2,5; Streckung in x-Ri mit 0,5; Verschiebung nach unten um 3
g(x) = cos(x) − 1	$g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) - 1$; Verschiebung nach links um $\frac{\pi}{2}$; Verschiebung nach unten um 1

7 Ordnen Sie zu.





A : f(x) = 2cos(0,5x); B: g(x) = − sin(2x)

C: h(x) = 2cos(x− 1)

B: f(x) = − cos(x) − 1; C: g(x) = cos(x) − 1,5

A : h(x) = − sin(x) + 1

8 Sind die Aussagen falsch (f) oder wahr (w)?

		w	f
a)	Durch eine Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{3}{2}$ vergrößert sich die Amplitude einer Funktion.	☒	☐
b)	Durch eine Streckung in x-Richtung mit Faktor 2 vergrößert sich die Periodenlänge einer Funktion.	☒	☐
c)	Das Schaubild der Funktion f mit f(x) = 3sin(3x) geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung mit Faktor 3 in x- und y-Richtung hervor.	☐	☒
d)	Das Schaubild der Funktion g mit g(x) = 2sin(x + 1) geht aus der Sinuskurve durch Streckung in x-Richtung und Verschiebung um eine Einheit nach links vor.	☐	☒
e)	f mit f(x) = 2sin(x) + 1 hat den Wertebereich [−2; 2].	☐	☒
f)	Die Funktion f mit f(x) = asin(x) + 4 hat für a> 0 den Wertebereich [4 − a; 4 + a].	☒	☐

9 Die Abbildungen zeigen Ausschnitte von Schaubildern. Welche der Schaubilder gehören zu periodischen Funktionen? Entscheiden und begründen Sie.

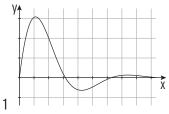


Abb. 1

☐ periodisch
☒ nicht periodisch

Begründung: Die Funktionswerte wiederholen sich nicht im gleichem Abstand.

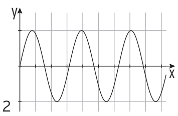


Abb. 2

☒ periodisch
☐ nicht periodisch

Begründung: Die Funktionswerte wiederholen sich im gleichen Abstand.

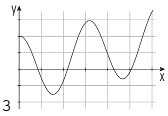


Abb. 3

☐ periodisch
☒ nicht periodisch

Begründung: Die Funktionswerte wiederholen sich nicht im gleichem Abstand.

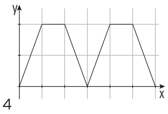


Abb. 4

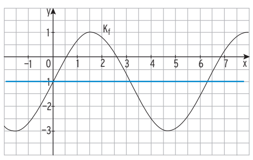
☒ periodisch
☐ nicht periodisch

Begründung: Die Funktionswerte wiederholen sich im gleichen Abstand.

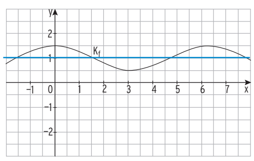
Aufstellen von Funktionstermen

1 Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm der Form f(x) = asin(x) + c bzw. f(x) = acos(x) + c.

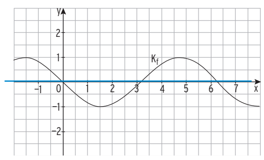
a) f(x) = 2sin(x) − 1



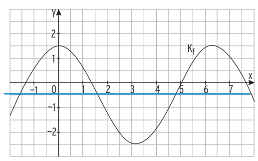
b) f(x) = 0,5cos(x) + 1



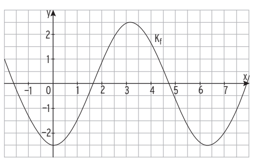
c) f(x) = − sin(x)



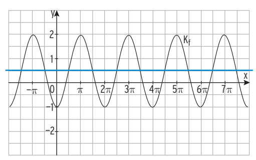
d) f(x) = 2cos(x) − 0,5



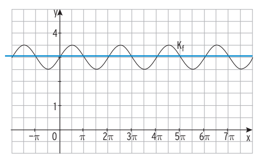
e) f(x) = − 2,5cos(x)



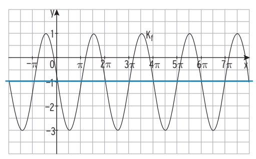
f) f(x) = − 1,5cos(x) + 0,5



g) f(x) = 0,5sin(x) + 3

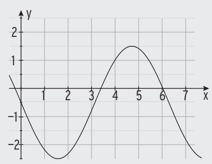


h) f(x) = − 2sin(x) − 1



2 Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm.

g(x) = − 2sin(x) − 0,5



g(x) = asin(bx) + c

Durch Ablesen:

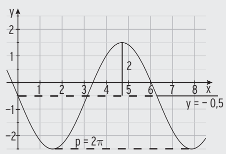
c = − 0,5

|a| = 2

a = − 2

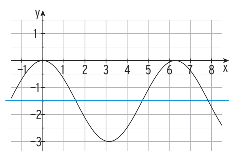
p = 2π;

$b = \frac{2\pi}{p} = 1$

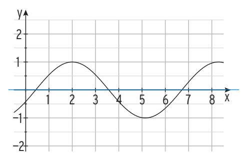


g(x) = − 2sin(x) − 0,5

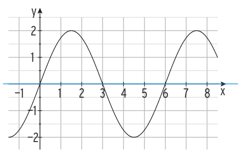
g(x) = 1,5cos(x) − 1,5



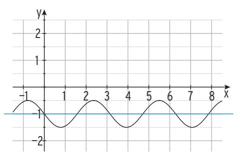
g(x) = cos(x − 2)



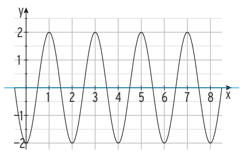
$g(x) = 2\sin(\frac{\pi}{3}x)$



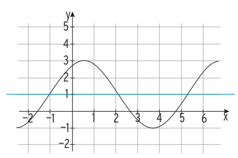
g(x) = − 0,5sin(2x) − 1



g(x) = − 2cos(πx)



g(x) = 2sin(x + 1) + 1



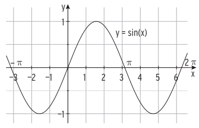
Trigonometrische Gleichungen

1 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$. Lesen Sie alle Lösungen der Gleichungen im Intervall $[-\pi; 2\pi]$ aus der Zeichnung ab.

a) $\sin(x) = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3}{2}\pi$

b) $\sin(x) = 0{,}5 \Rightarrow x = 0{,}5$; $x = 2{,}6$

c) $\sin(x) = -0{,}5 \Rightarrow x = -0{,}5$; $x = -2{,}6$
$x = 3{,}7$; $x = 5{,}8$



2 Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

$2\sin(x) = \sqrt{2}$	$\cos(x) = 0{,}5$	$2\sin(x) = -1$	$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ Sinuskurve: $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{3\pi}{4}$	WTR: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $x_2 = -\frac{\pi}{3}$ Periode: 2π Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ $x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$	$\sin(x) = -0{,}5$ WTR: $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ Sinuskurve: $x_2 = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$ Periode: 2π Lösungen: $x_3 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6}$ $x_4 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$	WTR: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ Symmetrie: $x_2 = -\frac{\pi}{6}$ Periode: 2π Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ $x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$

3 Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

$2\sin(2x) = \sqrt{2}$	$\cos(\frac{x}{2}) = 0{,}5$	$2\sin(\frac{\pi}{3}x) = -1$	$\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{4}$ Sinus(z)-Kurve: $z_2 = \frac{3\pi}{4}$ Mit $z = 2x$: $x_1 = \frac{\pi}{8}$; $x_2 = \frac{3\pi}{8}$ Periode: $\frac{2\pi}{2} = \pi$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{8}$; $x_2 = \frac{3\pi}{8}$ $x_3 = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$ $x_4 = \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11\pi}{8}$	$\cos(z) = 0{,}5$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $z_2 = -\frac{\pi}{3}$ Mit $z = \frac{x}{2}$: $x_{1\mid 2} = \pm\frac{2\pi}{3}$ Periode: $\frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$ Lösung: $x_1 = \frac{2\pi}{3}$	$\sin(z) = -0{,}5$ WTR: $z_1 = -\frac{\pi}{6}$ Sinus(z)-Kurve: $z_2 = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5}{6}\pi$ Mit $z = \frac{\pi}{3}x$: $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{5}{2}$ Periode: $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ Lösungen: $x_3 = -\frac{5}{2} + 6 = \frac{7}{2}$ $x_4 = -\frac{1}{2} + 6 = \frac{11}{2}$	$\cos(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{6}$ Symmetrie: $z_2 = -\frac{\pi}{6}$ Mit $z = 2x$: $x_{1\mid 2} = \pm\frac{\pi}{12}$ Periode: $\frac{2\pi}{2} = \pi$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{12}$ $x_3 = -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11\pi}{12}$ $x_4 = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}$ $x_5 = -\frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{23\pi}{12}$

4 Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

$\sin(x) = -0{,}5\sqrt{2}$	$\sin(\pi x) = 0{,}5\sqrt{3}$	$\sin(\frac{\pi}{4}x) = 0$
$\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $x_1 = -\frac{\pi}{4}$ Mithilfe der Sinuskurve: $x_2 = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$ Periode: 2π Lösungen: $x_3 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$ $x_4 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$	$\sin(z) = 0{,}5\sqrt{3}$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{3}$ Sinus(z)-Kurve: $z_2 = \frac{2}{3}\pi$ Mit $z = \pi x$: $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = \frac{2}{3}$ Periode: $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ Lösungen: $x_1 = \frac{1}{3}$ $x_2 = \frac{2}{3}$ $x_3 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$ $x_4 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$ $x_5 = \frac{7}{3} + 2 = \frac{13}{3}$ $x_6 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$	$\frac{\pi}{4}x = 0; \pm\pi; \pm 2\pi; \ldots$ $x = 0; \pm 4; \pm 8; \ldots$ Lösungen: $x_1 = 0$ $x_2 = 4$

$\cos(\frac{\pi}{3}x) = 0{,}5\sqrt{3}$	$\cos(\frac{x}{3}) = -0{,}5$	$\cos(2x) = 0$
$\cos(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{6}$ Symmetrie: $z_2 = -\frac{\pi}{6}$ Mit $z = \frac{\pi}{3}x$: $x_{1\mid 2} = \pm\frac{1}{2}$ Periode: $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ Lösungen: $x_1 = \frac{1}{2}$ $x_3 = -\frac{1}{2} + 6 = 5{,}5$	$\cos(z) = -0{,}5$ WTR: $z_1 = \frac{2}{3}\pi$ Symmetrie: $z_2 = -\frac{2}{3}\pi$ Mit $z = \frac{x}{3}$: $x_1 = 2\pi$; $x_2 = -2\pi$ Periode: $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$ Lösung: $x_1 = 2\pi$	$2x = \pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{3\pi}{2}; \pm\frac{5\pi}{2}; \pm\frac{7\pi}{2}; \ldots$ $x = \pm\frac{\pi}{4}; \pm\frac{3}{4}\pi; \pm\frac{5}{4}\pi; \ldots$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ $x_2 = \frac{3}{4}\pi$ $x_3 = \frac{5}{4}\pi$ $x_4 = \frac{7}{4}\pi$

Gemeinsame Punkte

1 Lösen Sie die Gleichung $f(x) = 0$, indem Sie drei Lösungen angeben.

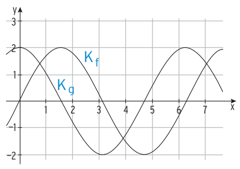
$f(x) = 3\sin(3x)$	$f(x) = -\cos(x-1)$	$f(x) = 1 + \sin(\frac{1}{2}x)$
$3x = 0; \pm\pi; \pm 2\pi; \ldots$ $x = 0; \pm\frac{\pi}{3} \pm\frac{2\pi}{3}; \ldots$ Lösungen: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{1}{3}\pi$; $x_3 = \frac{1}{3}\pi$	$x - 1 = \pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{5\pi}{2}; \ldots$ $x = \pm\frac{\pi}{2} + 1; \pm\frac{5\pi}{2} + 1; \ldots$ Lösungen: $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 1$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + 1$ $x_3 = -\frac{5\pi}{2} + 1$	$\sin(z) = -1$ WTR: $z_1 = -\frac{\pi}{2}$ Mit $z = \frac{1}{2}x$: $x_1 = -\pi$ Periode: $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ Lösungen: $x_1 = -\pi$; $x_2 = 3\pi$; $x_3 = 7\pi$

2 Begründen Sie: Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - 1$; $x \in \mathbb{R}$ hat keine Nullstelle.
h mit $h(x) = \frac{1}{2}\cos(2x)$ hat den Wertebereich $[-0{,}5; 0{,}5]$; f mit $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - 1$ hat den Wertebereich $[-0{,}5 - 1; 0{,}5 - 1] = [-1{,}5; -0{,}5]$, damit hat f keine Nullstelle.

3 Die abgebildeten Graphen der Funktionen f und g schneiden sich in $x = \frac{\pi}{4}$.
Bestimmen Sie f(x) und g(x).
Geben Sie weitere Schnittstellen an.

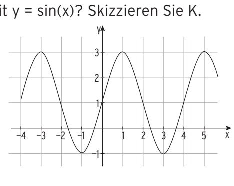
$f(x) = 2\sin(x)$; $g(x) = 2\cos(x)$

weitere Schnittstellen: $\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$; $k \in \mathbb{Z}$



4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2} \cdot x) + 1$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

a) Wie entsteht das Schaubild K aus der Sinuskurve mit $y = \sin(x)$? Skizzieren Sie K.
Bestimmen Sie den Wertebereich von f.
K entsteht aus der Sinuskurve durch Streckung in y-Richtung mit Faktor 2 ($y = 2\sin(x)$), Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{2}{\pi}$ ($y = 2\sin(\frac{\pi}{2}x)$), und Verschiebung um 1 nach oben.
Da $\sin(\frac{\pi}{2}x)$ nur Werte zwischen -1 und 1 annimmt, gilt für den Wertebereich von f: $-1 \leq f(x) \leq 3$.



b) Die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ und das Schaubild K schneiden sich.
Bestimmen Sie zwei Schnittstellen.
$2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x) + 1 = 1 \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{2}x) = 0$ für $\frac{\pi}{2} \cdot x = 0; \pm\pi; \pm 2\pi; \ldots$
$x = 0; \pm 2; \pm 4; \ldots$
Zwei Schnittstellen: 0; 2

Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben

1 Welche Modellierung passt zur gegebenen Situation? Ordnen Sie zu, indem Sie die Koordinatenachsen benennen.

A: An einer Hafenmauer ändert sich die Meerestiefe ständig aufgrund der Gezeiten. Über einen gewissen Zeitraum wird die Meerestiefe gemessen und dargestellt.

Abb. 3

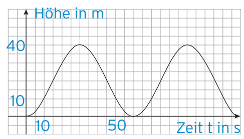


Abb. 1

B: Jannis fährt Riesenrad. Zu jedem Zeitpunkt nach dem Einsteigen wird seine Höhe über dem Boden dargestellt.

Abb. 1

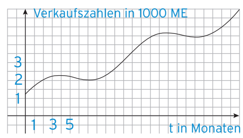


Abb. 2

C: Ein Unternehmen bietet erfolgreich Saisonware an. Die Entwicklung der monatlichen Verkaufszahl über mehrere Jahre wird dargestellt.

Abb. 2

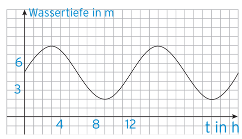


Abb.3

2 Die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion eines guten Brustschwimmers lässt sich näherungsweise beschreiben durch $v(t) = 0{,}4\sin(6t) + 1{,}5$.
(Zeit t in s, Geschwindigkeit v(t) in $\frac{m}{s}$).

a) Die Zeitspanne zwischen zwei Zügen beträgt $\frac{\pi}{3} \approx 1{,}05$ s.

b) Die maximale Geschwindigkeit des Schwimmers beträgt $1{,}9\ \frac{m}{s}$,
die minimale Geschwindigkeit beträgt $1{,}1\ \frac{m}{s}$.

c) Die mittlere Geschwindigkeit beträgt $1{,}5\ \frac{m}{s}$. Somit benötigt der Schwimmer für eine Strecke von 100 m 66,7 s.

d) Treffen Sie Annahmen darüber, welche Werte für einen guten Kraulschwimmer gelten könnten. Geben Sie einen entsprechenden Funktionsterm an.

Mittlere Geschwindigkeit: $1{,}8\ \frac{m}{s}$ Maximale Geschwindigkeit: $2{,}1\ \frac{m}{s}$

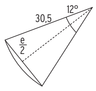
Zeitspanne zwischen zwei Zügen: 0,6 s $g(t) = 0{,}3\sin(\frac{2\pi}{0{,}6}t) + 1{,}8$

3 Das Riesenrad in Wien hat einen Durchmesser von 61 Meter.
Die Gondel erreicht (mit Ihrer Aufhängung A) eine Höhe von 64,75 Meter.
Eine Umdrehung dauert etwa 300 Sekunden.

a) Bestimmen Sie die Entfernung von zwei nebeneinander hängenden Gondeln, wenn 15 Gondeln angebracht sind. Vereinfacht nehmen wir an, eine Gondel entspricht einem Punkt.

$\frac{360°}{15} = 24°$; $r = 30{,}5$

Es gilt: $\sin(12°) = \frac{\frac{e}{2}}{30{,}5} \Rightarrow e = 12{,}68$



Die Gondeln haben eine Entfernung von etwa 12,7 m.

oder als Überschlag: Abstand = $\frac{\text{Umfang}}{15} \approx 12{,}77$

Ermitteln Sie die Länge der Strecke, die der Punkt A in einer Stunde zurücklegt.

Umfang der Umdrehung in m: $U = 2\pi \cdot 30{,}5 = 191{,}64$

Geschwindigkeit von Punkt A: $v = \frac{s}{t} = \frac{191{,}4\,m}{300\,s} = 0{,}638\,\frac{m}{s} = 2{,}2968\,\frac{km}{h}$

Punkt A legt in einer Stunde etwa 2,3 km zurück.

b) Beschreiben Sie die Höhe des Punktes A im Verlauf einer Umdrehung.
Stellen Sie die Höhe von A in Abhängigkeit von der Zeit in einem geeigneten Koordinatensystem dar und geben Sie einen passenden Funktionsterm an.
Bestimmen Sie die Höhe des Punktes A nach einer Minute.

Trigonometrische Funktion: $h(t) = a\cos(bt) + c$

wegen $h(0) = 64{,}75$ größter Wert

Größte Höhe: 64,75; kleinste Höhe: 3,75

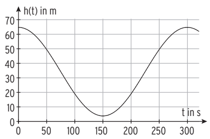
also Mittellinie $y = 34{,}25$: $\frac{64{,}75 + 3{,}75}{2} = 34{,}25$

Periode 300 s ergibt aus $p = \frac{2\pi}{b}$: $b = \frac{\pi}{150}$

Amplitude: $\frac{61}{2} = 30{,}5 = a$

$h(t) = 30{,}5\cos\left(\frac{\pi}{150}t\right) + 34{,}25$; $h(60) = 43{,}675$

A ist nach einer Minute 43,675 m hoch.



c) Jan behauptet, die Höhe des Punktes A im Verlauf einer Umdrehung kann durch eine Polynomfunktion beschrieben werden.
Diskutieren Sie diese Behauptung.

Die Polynomfunktion müsste zwei Maximalstellen und eine Minimalstelle besitzen, der Graph muss symmetrisch sein zur Geraden mit der Gleichung x = 150.
In Frage kommt eine Polynomfunktion 4. Grades.

2 Verknüpfung, Verkettung und Umkehrung von Funktionen

1 Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = x - 1$ und g mit $g(x) = \frac{1}{2}x^2$; $x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die Funktion mit dem Funktionsterm.

a) $f(x) + g(x) = x - 1 + \frac{1}{2}x^2$

b) $f(x) - g(x) = x - 1 - \frac{1}{2}x^2$

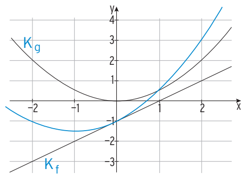
c) $f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot (x - 1)$

d) $f(g(x)) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

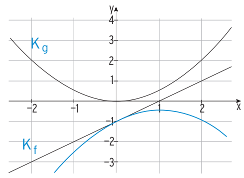
e) $g(f(x)) = \frac{1}{2}(x - 1)^2$

Zeichnen Sie das Schaubild der Funktionen a) bis d).

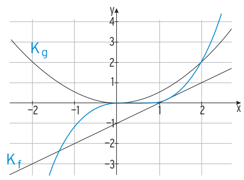
a)



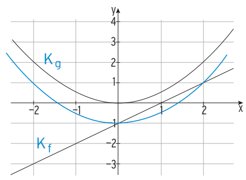
b)



c)



d)



3 Differenzialrechnung

Ableitung

1 Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate auf [a; b].

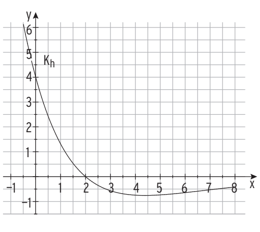
$f(x) = (x-3)^2$; [0; 3]	$\frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{0-9}{3} = -3$
$f(x) = 4x^2 - 2x^3$; [1; 3]	$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{-18-2}{2} = -10$
$f(x) = 3e^{\frac{1}{2}x}$; [− 1; 2]	$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{3e - 3e^{-0,5}}{3} = 2{,}11$
$f(x) = 2\sin(2x)$; $[0; \frac{\pi}{4}]$	$\frac{f(\frac{\pi}{4})-f(0)}{\frac{\pi}{4}-0} = \frac{2-0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{\pi}$

2 Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate in x_0.

$f(x) = x^2 + 2$; $x_0 = 2$	$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2+2-6}{h} = \frac{h^2+4h}{h} = h + 4$ $h + 4 \to 4$ für $h \to 0$ $m_t = f'(2) = 4$
$f(x) = 6x^2 - 2$; $x_0 = 1$	$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{6(1+h)^2-2-4}{h} = \frac{6h^2+12h}{h} = 6h + 12$ $6h + 12 \to 12$ für $h \to 0$ $m_t = f'(1) = 12$
$f(x) = x^2 - x$; $x_0 = 0$	$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h^2-h}{h} = h - 1$; $h - 1 \to -1$ für $h \to 0$ $m_t = f'(0) = -1$

3 Gezeichnet ist das Schaubild einer Funktion h mit der Definitionsmenge D = [− 0,5; 8].
Prüfen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

$h'(1) < 0$	☒ (w)	☐ (f)
Das Schaubild von h′ geht durch den Punkt Q(2 | 0).	☐ (w)	☒ (f)
$h'(7) = -0{,}5$	☐ (w)	☒ (f)
Es gibt ein $x \in D$ für das gilt: $h'(x) = 0$.	☒ (w)	☐ (f)
Die Gleichung $h'(x) = 1$ hat eine Lösung.	☐ (w)	☒ (f)



4 Bilden Sie die erste Ableitung.

$f(x) = 2\cos(x) + 1$	$f'(x) = -2\sin(x)$	
$f(x) = -3\sin(x) - x$	$f'(x) = -3\cos(x) - 1$	
$f(x) = \frac{1}{4}x^5 + x^3 - \frac{x}{3}$	$f'(x) = \frac{5}{4}x^4 + 3x^2 - \frac{1}{3}$	
$f(x) = \frac{1}{8}x^4 + 12x^2 + 4x - \frac{13}{8}$	$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 + 24x + 4$	
$f(x) = 5e^x + 2x - 1$	$f'(x) = 5e^x + 2$	
$f(x) = ae^x + b$	$f'(x) = ae^x$	
$f(x) = \frac{3}{x}$	$f'(x) = -\frac{3}{x^2}$	Bem.: $f(x) = 3x^{-1}$
$f(x) = -4\sqrt{x}$	$f'(x) = -2x^{-0,5}$	Bem.: $f(x) = -4x^{0,5}$

5 Bilden Sie die erste Ableitung mithilfe der Kettenregel.

$f(x) = 2\sin(3x)$	$f'(x) = 3 \cdot 2\cos(3x) = 6\cos(3x)$
$f(x) = \frac{5}{2}e^{4x} + 5x$	$f'(x) = 10e^{4x} + 5$
$f(x) = 0{,}25e^{x-1} + 2$	$f'(x) = 0{,}25e^{x-1}$
$f(x) = (2x-4)^3$	$f'(x) = 3(2x-4)^2 \cdot 2 = 6(2x-4)^2$
$f(x) = -1{,}2e^{2-3x} + x^3$	$f'(x) = -3 \cdot (-1{,}2e^{2-3x}) + 3x^2 = 3{,}6e^{2-3x} + 3x^2$
$f(x) = 2ae^{bx+c}$	$f'(x) = 2abe^{bx+c}$
$f(x) = -\pi\cos(0{,}5x)$	$f'(x) = 0{,}5\pi\sin(0{,}5x)$
$f(x) = x - \sin(0{,}3\pi x)$	$f'(x) = 1 - 0{,}3\pi\cos(0{,}3\pi x)$
$f(x) = \frac{9}{5}e^{x^2+1} + 2$	$f'(x) = 2x \cdot \frac{9}{5}e^{x^2+1} = \frac{18}{5}x \cdot e^{x^2+1}$
$f(x) = 4\sin(3 + 2x) + 1$	$f'(x) = 8\cos(3 + 2x)$
$f(x) = \pi - 2\cos(2(x+1))$	$f'(x) = 4\sin(2(x+1))$
$f(x) = 4\cos(\frac{x}{\pi})$	$f'(x) = -\frac{4}{\pi}\sin(\frac{x}{\pi})$