

Bohner | Ott | Deusch | Rosner

Arbeitsheft Mathematik – Jahrgangsstufen 1 und 2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Berufliches Gymnasium
Baden-Württemberg

Analysis

Vektorielle Geometrie

Stochastik

Matrizen – Grundlagen



Merkur 
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis **Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †**

Verfasser:

Kurt Bohner

Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Ronald Deusch

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner

Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Umschlag: © frhuynk - Fotolia.com

* * * * *

1. Auflage 2022

© 2022 by Merkur Verlag Rinteln

Gesamtherstellung:

Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de

lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr: 2338-01

ISBN 978-3-8120-2338-2

Inhaltsverzeichnis

I	Analysis	4
1	Trigonometrische Funktionen und zugehörige Gleichungen	4
2	Verknüpfung, Verkettung und Umkehrung von Funktionen	18
3	Differenzialrechnung	20
4	Integralrechnung	47
II	Vektorielle Geometrie	70
1	Lineare Gleichungssysteme	70
2	Vertiefung der Vektoriellen Geometrie	75
III	Stochastik	105
1	Umgang mit Zufall und Wahrscheinlichkeit	105
2	Binomialverteilung und Normalverteilung	121
IV	Matrizen – Grundlagen	141
1	Rechnen mit Matrizen	141
2	Inverse Matrix	147

Lösungen herausnehmbar

Einleitung


Das Arbeitsheft dient zur Aufbereitung, Wiederholung und Festigung des im Schülerbuch behandelten Lernstoffs. Es soll parallel zum Schülerbuch verwendet werden. Die begleitende Unterstützung durch die Lehrkraft ist gewünscht und sehr sinnvoll.

Das Arbeitsheft enthält ergänzende Aufgaben zur Wiederholung und ermöglicht eine Lernkontrolle in Eigenverantwortung. Das im Vergleich zum Schülerbuch veränderte Format und die Form der Darstellung wirken motivierend auf Schüler/innen.

Einige Aufgaben beinhalten fächerübergreifende Aspekte in Handlungssituationen.

Das Arbeitsheft hilft, das Erlernete zu festigen und damit eine gute Grundlage für die Jahrgangsstufe und das schriftliche Abitur zu schaffen.

Die Lösungen sind eingelegt und damit herausnehmbar.

 Videos dienen der Veranschaulichung von Problemen und Erläuterung von Lösungswegen. Sie unterstützen die Lernenden beim Entdecken und Verstehen mathematischer Zusammenhänge. Damit ist das Arbeitsheft zum Fernlernen und Homeschooling bestens geeignet.

I Analysis

1 Trigonometrische Funktionen und zugehörige Gleichungen



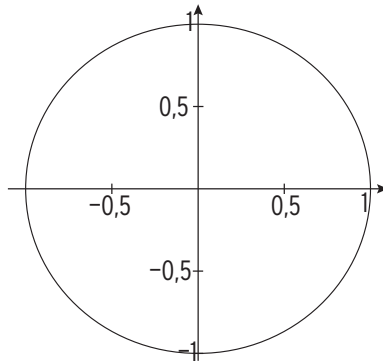
Definition der Winkelfunktionen

1 Zeichnen Sie den Winkel α ein und bestimmen Sie $\sin(\alpha)$ bzw. $\cos(\alpha)$.

a) $\alpha = 70^\circ$

$\sin(\alpha) \approx$

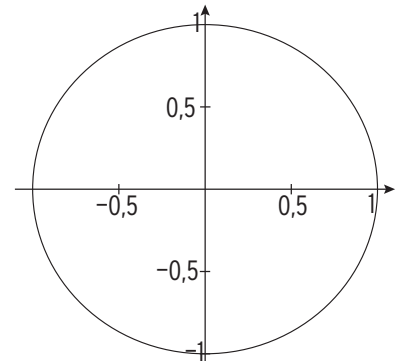
$\cos(\alpha) \approx$



b) $\alpha = 120^\circ$

$\sin(\alpha) \approx$

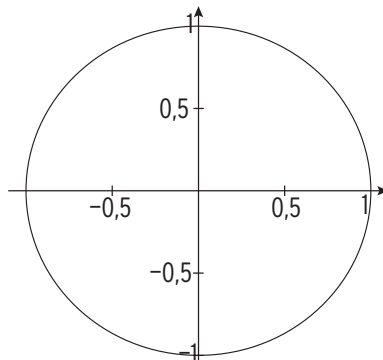
$\cos(\alpha) \approx$



c) $\alpha = 200^\circ$

$\sin(\alpha) \approx$

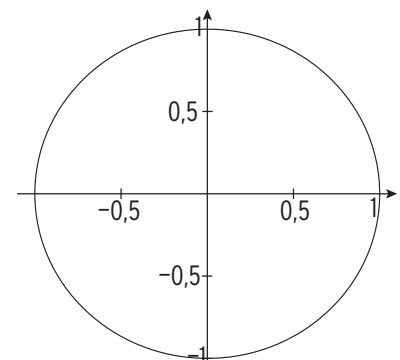
$\cos(\alpha) \approx$



d) $\alpha = 280^\circ$

$\sin(\alpha) \approx$

$\cos(\alpha) \approx$

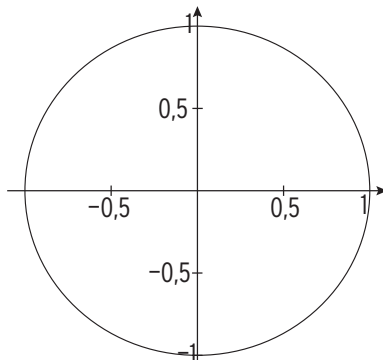


2 Zeichnen Sie den Winkel x (im Bogenmaß) ein und bestimmen Sie $\sin(x)$ bzw. $\cos(x)$.

a) $x = 0,7$

$\sin(0,7) \approx$

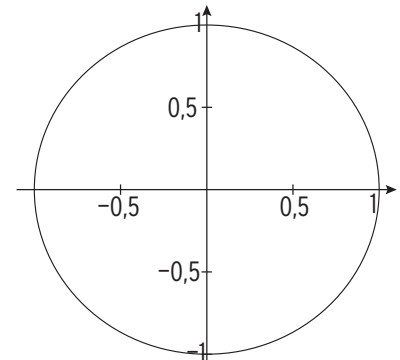
$\cos(0,7) \approx$



b) $x = \frac{\pi}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

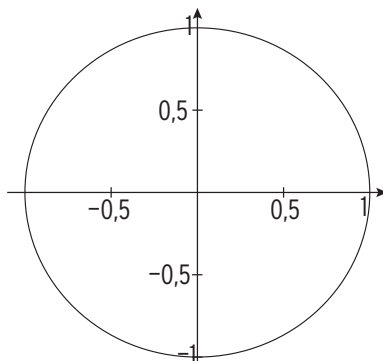
$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) =$



c) $x = 3,9$

$\sin(3,9) \approx$

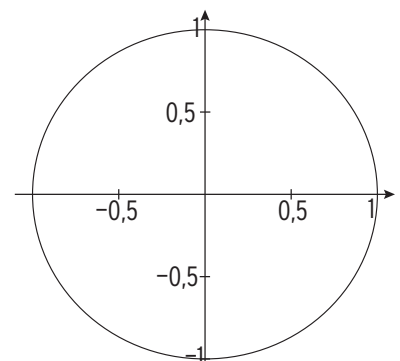
$\cos(3,9) \approx$



d) $x = 2\pi$

$\sin(2\pi) =$

$\cos(2\pi) =$



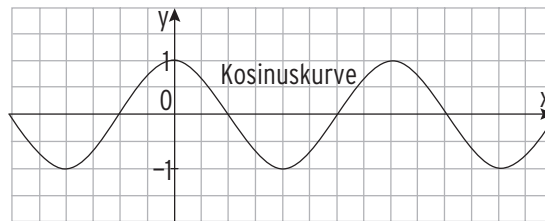
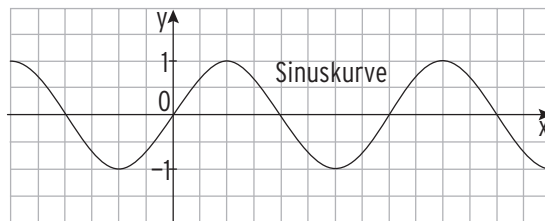
3 Vervollständigen Sie die Tabelle mithilfe eines Hilfsmittels.

α	x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
60°	$\frac{1}{3}\pi$	0,866	0,5
20°			
90°			
120°			

α	x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
	1		
	$\frac{1}{6}\pi$		
	2,5		
	5		

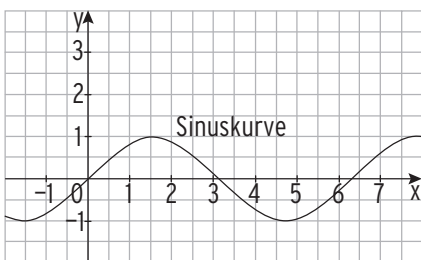
4 Vervollständigen Sie die Tabelle. Skalieren Sie die x-Achse.

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
2π		
π		
$\frac{1}{2}\pi$		
$-\frac{1}{2}\pi$		
$-\frac{3}{2}\pi$		
$\frac{5}{2}\pi$		
7π		
12π		

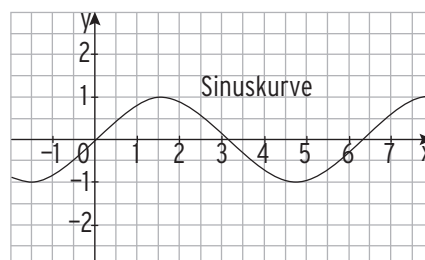


5 Zeichnen Sie den Graphen von f ein.

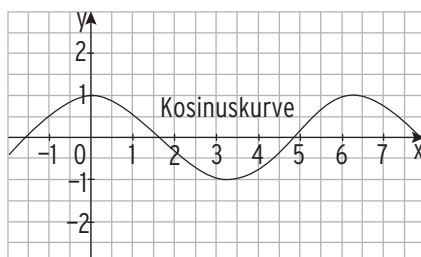
a) $f(x) = 2\sin(x) + 1$



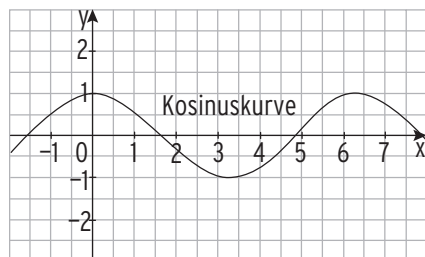
b) $f(x) = -1,5\sin(x)$



c) $f(x) = 0,5\cos(x)$



d) $f(x) = -\cos(x) - 1$



I Analysis

.....

6 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$.

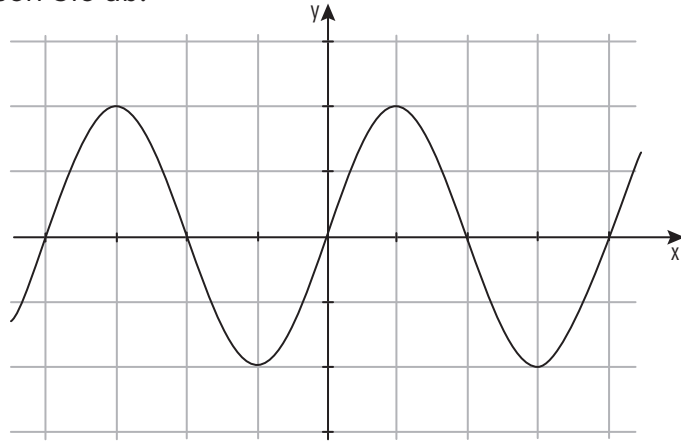
Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:

$$\sin(2\pi) =$$

$$\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) =$$

$$\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) =$$

$$\sin(-\pi) =$$



7 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Kosinusfunktion f mit $f(x) = \cos(x)$.

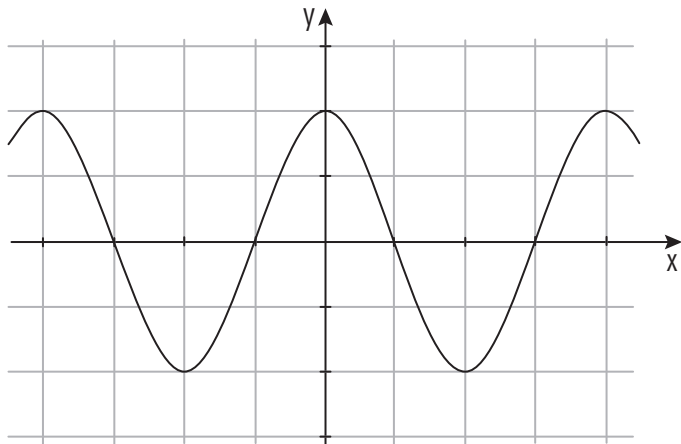
Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:

$$\cos(2\pi) =$$

$$\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) =$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) =$$

$$\cos(-\pi) =$$



8 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$.

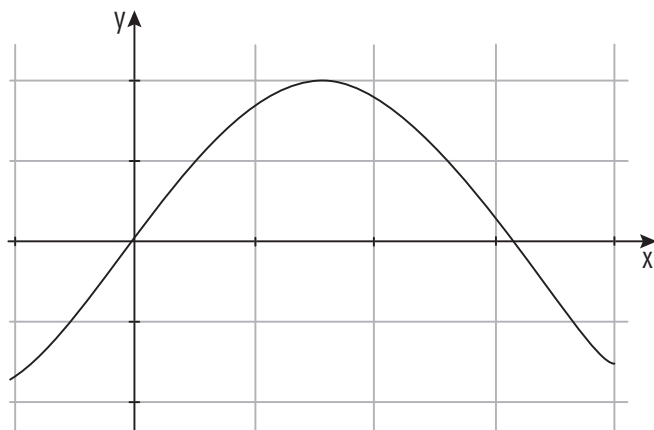
Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:

$$\sin(2) =$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) =$$

$$\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) =$$

$$\sin\left(-\frac{1}{2}\right) =$$





Transformationen

1 Geben Sie die Amplitude a und die Periode p der Funktion f an.

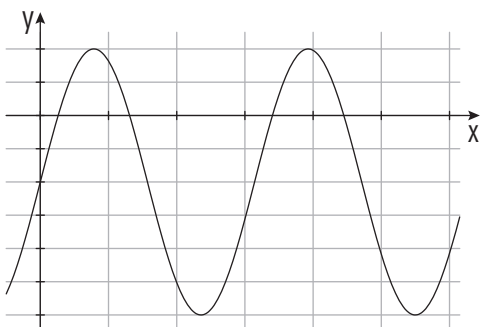
Funktionsterm	a	p	Funktionsterm	a	p
$f(x) = 0,25\sin(\pi x)$	$a = 0,25$	$\frac{2\pi}{\pi} = 2$	$f(x) = -5\cos(\frac{\pi}{2}x)$		
$f(x) = 6\cos(5x)$			$f(x) = 1,6\sin(3x)$		
$f(x) = -4\sin(\frac{x}{3})$			$f(x) = -\frac{4}{3}\sin(\frac{x}{2})$		
$f(x) = 3\cos(2x)$			$f(x) = \cos(x) + 1$		

2 Geben Sie den Funktionsterm einer Sinusfunktion bzw. einer Kosinusfunktion mit der Periode p und der Amplitude a an.

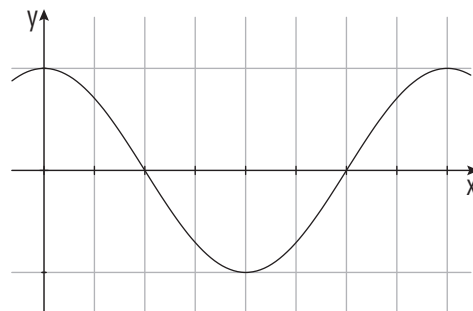
a	p	Sinusfunktion	a	p	Kosinusfunktion
$a = 2$	$p = 2$	$f(x) = 2\sin(\pi x)$	$a = 6$	$p = 4\pi$	$f(x) = 6\cos(\frac{x}{2})$
$a = \pi$	$p = 1$		$a = 4$	$p = 4$	
$a = 0,5$	$p = \frac{2}{3}\pi$		$a = \frac{5}{2}$	$p = \frac{3}{4}$	

3 Beschriften Sie die Koordinatenachsen.

$$f(x) = 4\sin(x) - 2$$



$$f(x) = 0,5\cos(0,5x)$$



4 Geben Sie den zugehörigen Funktionsterm an. Der Graph von f mit $f(x) = \sin(x)$ wird

a) um 2 nach links und um 0,5 nach unten verschoben. $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

b) an der x -Achse gespiegelt und dann um 1 nach oben verschoben. $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

c) mit Faktor 3 in y -Richtung gestreckt und dann um 3 nach links verschoben. $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

d) mit Faktor 2 in x -Richtung gestreckt und dann um 3 nach unten verschoben. $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

I Analysis

.....

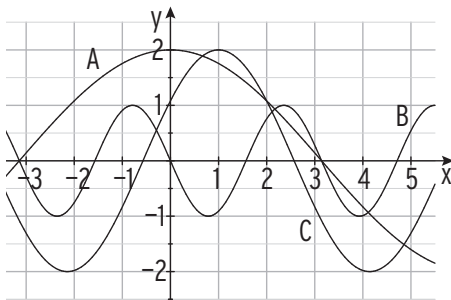
5 Ergänzen Sie die folgenden Sätze.

- a) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 0,5\sin(x) - 1$ entsteht aus der Sinuskurve ($y = \sin(x)$) durch Streckung mit dem Faktor ___ in ___-Richtung und durch Verschiebung um ___ nach _____.
- b) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -3\cos(2x) + 4$ entsteht aus der Kosinuskurve ($y = \cos(x)$) durch Spiegelung an der ___-Achse, durch Streckung mit dem Faktor ___ in ___-Richtung, Streckung mit dem Faktor ___ in ___-Richtung und durch Verschiebung um ___ nach _____.
- c) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2\cos(3(x + 4)) + 5$ entsteht aus der Kurve mit $y = \cos(x)$ durch Streckung mit dem Faktor ___ in ___-Richtung, durch Streckung mit dem Faktor ___ in ___-Richtung, durch Verschiebung um ___ nach ___ und durch Verschiebung um ___ nach _____.
- d) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = \sin(0,5x - 0,5)$ entsteht aus der Kurve mit $y = \sin(x)$ durch Streckung mit dem Faktor ___ in ___-Richtung und durch Verschiebung um ___ nach _____.

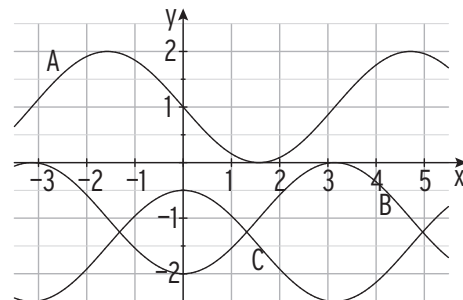
6 Wie geht der Graph von g aus dem Graphen von f mit $f(x) = \sin(x)$ hervor?

$g(x) = 2\sin(x) + 1$	
$g(x) = -3\sin(4x) + 2$	
$g(x) = 0,25\sin(x - 3) + 5$	
$g(x) = 2,5\sin(2x - 1) - 3$	
$g(x) = \cos(x) - 1$	

7 Ordnen Sie zu.



___: $f(x) = 2\cos(0,5x)$ ___: $g(x) = -\sin(2x)$
 ___: $h(x) = 2\cos(x-1)$

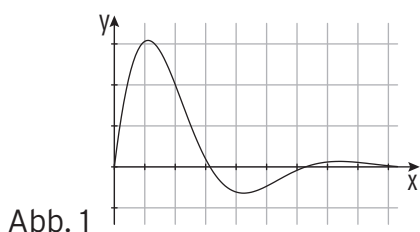


___: $f(x) = -\cos(x) - 1$; ___: $g(x) = \cos(x) - 1,5$
 ___: $h(x) = -\sin(x) + 1$

8 Sind die Aussagen falsch (f) oder wahr (w)?

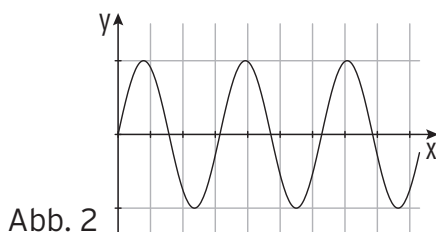
a) Durch eine Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{3}{2}$ vergrößert sich die Amplitude einer Funktion.	<input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f
b) Durch eine Streckung in x-Richtung mit Faktor 2 vergrößert sich die Periodenlänge einer Funktion.	<input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f
c) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 3\sin(3x)$ geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung mit Faktor 3 in x- und y-Richtung hervor.	<input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f
d) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = \sin(2x + 2)$ geht aus der Sinuskurve durch Streckung in x-Richtung und Verschiebung um eine Einheit nach links vor.	<input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f
e) f mit $f(x) = 2\sin(x) + 1$ hat den Wertebereich $[-2; 2]$.	<input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f
f) Die Funktion f mit $f(x) = a\sin(x) + 4$ hat für $a > 0$ den Wertebereich $[4 - a; 4 + a]$.	<input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f

9 Die Abbildungen zeigen Ausschnitte von Schaubildern.
Welche der Schaubilder gehören zu periodischen Funktionen?
Entscheiden und begründen Sie.



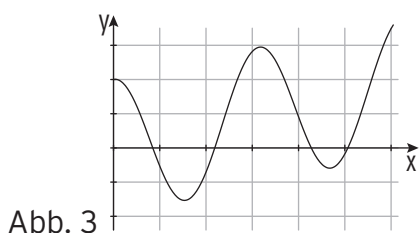
- periodisch
 nicht periodisch

Begründung:



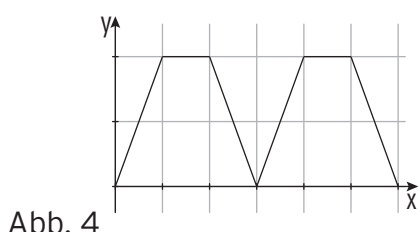
- periodisch
 nicht periodisch

Begründung:



- periodisch
 nicht periodisch

Begründung:



- periodisch
 nicht periodisch

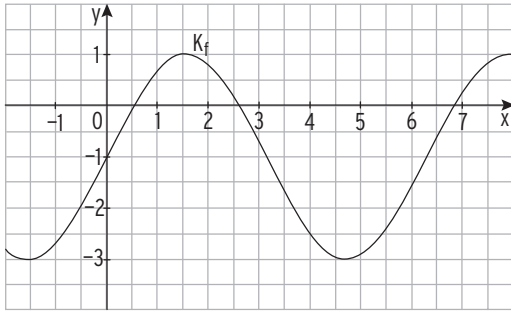
Begründung:

 **Aufstellen von Funktionstermen**

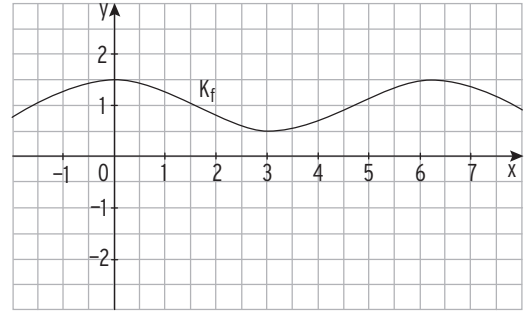
mvurl.de/fd9k

1 Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm der Form $f(x) = a \sin(x) + c$
bzw. $f(x) = a \cos(x) + c$.

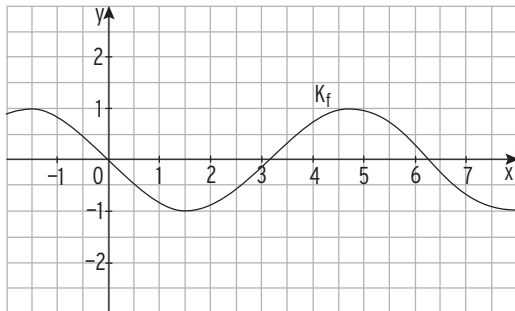
a) $f(x) =$ _____



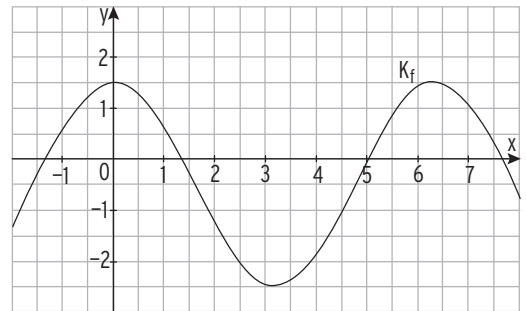
b) $f(x) =$ _____



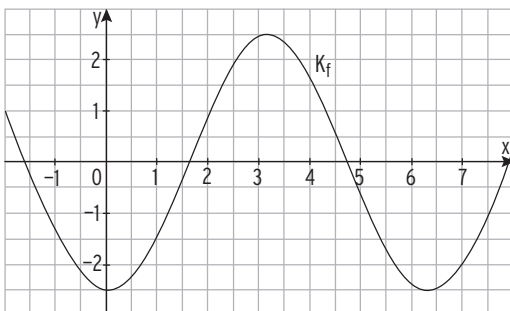
c) $f(x) =$ _____



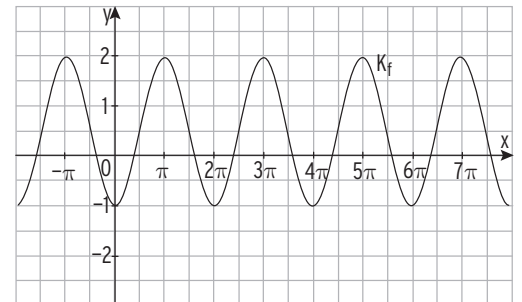
d) $f(x) =$ _____



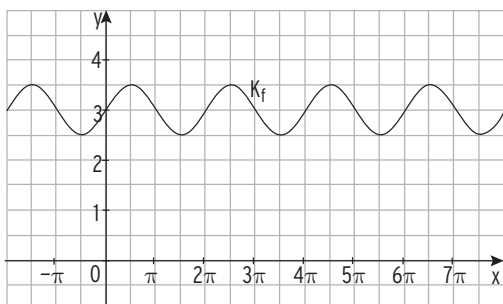
e) $f(x) =$ _____



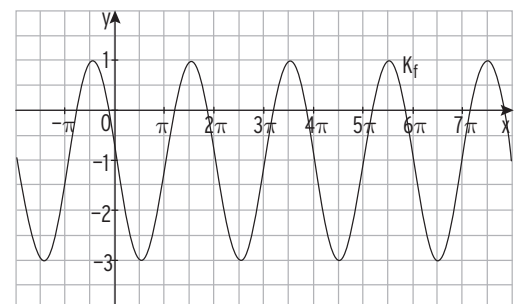
f) $f(x) =$ _____



g) $f(x) =$ _____

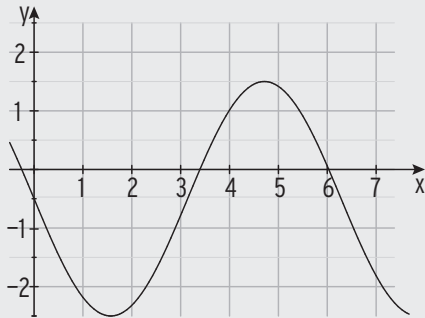


h) $f(x) =$ _____



2 Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm.

$g(x) = -2\sin(x) - 0,5$



$g(x) = a\sin(bx) + c$

Durch Ablesen:

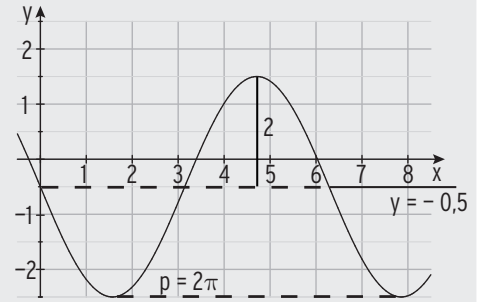
$c = -0,5$

$|a| = 2$

$a = -2$

$p = 2\pi;$

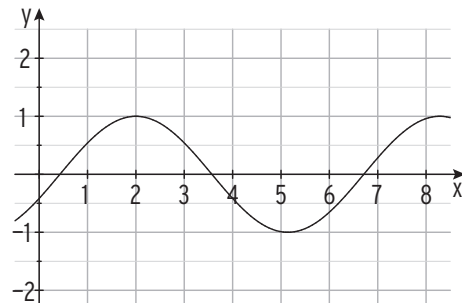
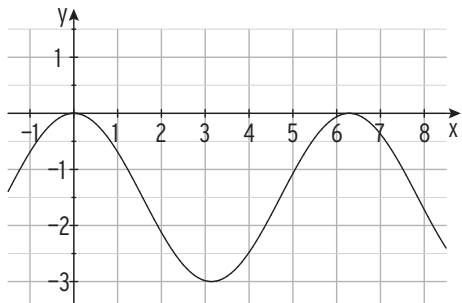
$b = \frac{2\pi}{p} = 1$



$g(x) = -2\sin(x) - 0,5$

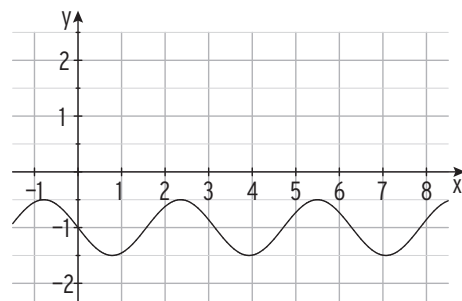
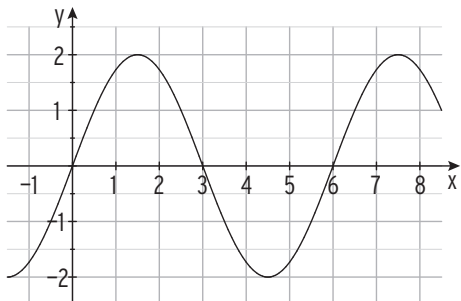
$g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$



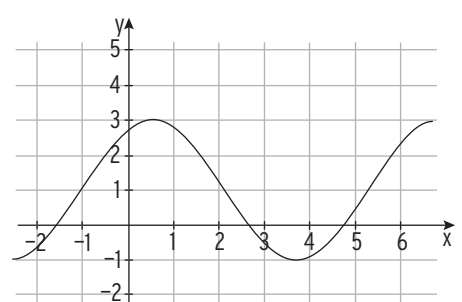
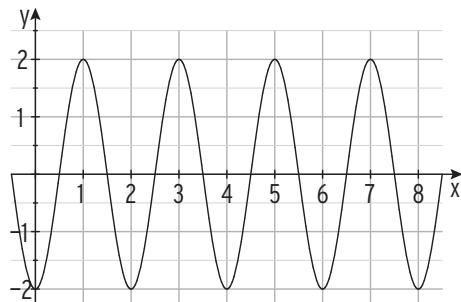
$g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$



$g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$



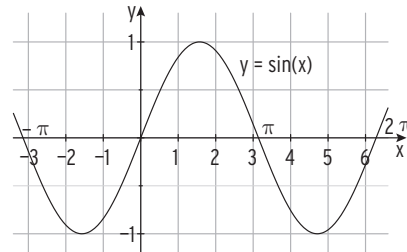
Trigonometrische Gleichungen

1 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$. Lesen Sie alle Lösungen der Gleichungen im Intervall $[-\pi; 2\pi]$ aus der Zeichnung ab.

a) $\sin(x) = -1 \Rightarrow x =$

b) $\sin(x) = 0,5 \Rightarrow x =$

c) $\sin(x) = -0,5 \Rightarrow x =$



2 Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

$2\sin(x) = \sqrt{2}$	$\cos(x) = 0,5$	$2\sin(x) = -1$	$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ Sinuskurve: $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{4}; x_2 = \frac{3\pi}{4}$	WTR: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $x_2 = -\frac{\pi}{3}$ Periode: 2π Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ $x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$		

3 Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

$2\sin(2x) = \sqrt{2}$	$\cos(\frac{x}{2}) = 0,5$	$2\sin(\frac{\pi}{3}x) = -1$	$\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{4}$ Sinus(z)-Kurve: $z_2 = \frac{3\pi}{4}$ Mit $z = 2x$: $x_1 = \frac{\pi}{8}; x_2 = \frac{3\pi}{8}$ Periode: $\frac{2\pi}{2} = \pi$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{8}; x_2 = \frac{3\pi}{8}$ $x_3 = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$ $x_4 = \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11\pi}{8}$	$\cos(z) = 0,5$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $z_2 = -\frac{\pi}{3}$ Mit $z = \frac{x}{2}$: $x_{1 2} = \pm \frac{2\pi}{3}$ Periode: $\frac{2\pi}{0,5} = 4\pi$ Lösung: $x_1 = \frac{2\pi}{3}$		

Gemeinsame Punkte

- 1 Lösen Sie die Gleichung $f(x) = 0$, indem Sie drei Lösungen angeben.

$$f(x) = 3\sin(3x)$$

$$f(x) = -\cos(x - 1)$$

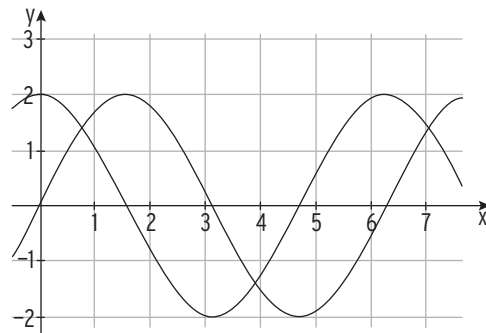
$$f(x) = 1 + \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

--	--	--

- 2 Begründen Sie: Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - 1$; $x \in \mathbb{R}$ hat keine Nullstelle.

--

- 3 Die abgebildeten Graphen der Funktionen f und g schneiden sich in $x = \frac{\pi}{4}$.
Bestimmen Sie $f(x)$ und $g(x)$.
Geben Sie weitere Schnittstellen an.



--

- 4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(x - 1)\right) + 1$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K .

- a) Wie entsteht das Schaubild K aus der Sinuskurve mit $y = \sin(x)$? Skizzieren Sie K .
Bestimmen Sie den Wertebereich von f .

--

- b) Die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ und das Schaubild K schneiden sich.
Bestimmen Sie zwei Schnittstellen.

--



Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben

1 Welche Modellierung passt zur gegebenen Situation? Ordnen Sie zu, indem Sie die Koordinatenachsen benennen.

A: An einer Hafenumauer ändert sich die Meerestiefe ständig aufgrund der Gezeiten. Über einen gewissen Zeitraum wird die Meerestiefe gemessen und dargestellt.

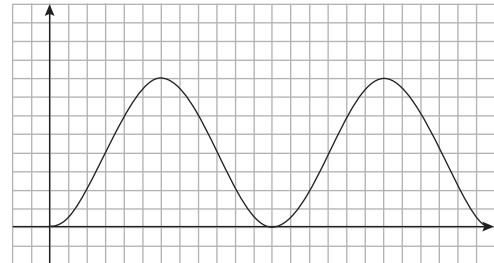


Abb.1

B: Jannis fährt Riesenrad. Zu jedem Zeitpunkt nach dem Einsteigen wird seine Höhe über dem Boden dargestellt.

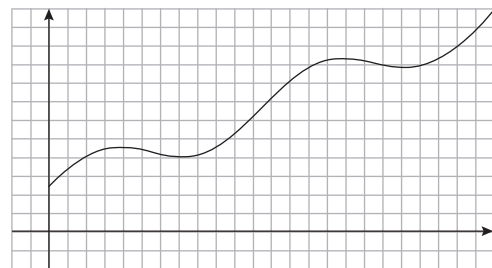


Abb.2

C: Ein Unternehmen bietet erfolgreich Saisonware an. Die Entwicklung der monatlichen Verkaufszahl über mehrere Jahre wird dargestellt.

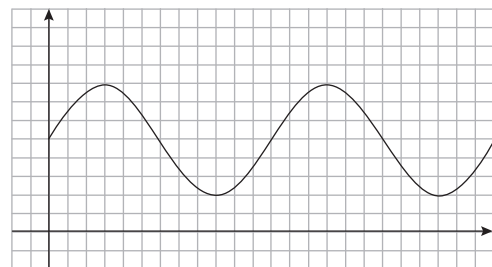


Abb.3

2 Die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion eines guten Brustschwimmers lässt sich näherungsweise beschreiben durch $v(t) = 0,4\sin(6t) + 1,5$. (Zeit t in s, Geschwindigkeit $v(t)$ in $\frac{m}{s}$).

- a) Die Zeitspanne zwischen zwei Zügen beträgt _____ s.
- b) Die maximale Geschwindigkeit des Schwimmers beträgt _____, die minimale Geschwindigkeit beträgt _____.
- c) Die mittlere Geschwindigkeit beträgt _____. Somit benötigt der Schwimmer für eine Strecke von 100 m _____ s.
- d) Treffen Sie Annahmen darüber, welche Werte für einen guten Kraulschwimmer gelten könnten. Geben Sie einen entsprechenden Funktionsterm an.

Mittlere Geschwindigkeit: _____ Maximale Geschwindigkeit: _____

Zeitspanne zwischen zwei Zügen: _____ s $g(t) =$ _____

2 Verknüpfung, Verkettung und Umkehrung von Funktionen

1 Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = x - 1$ und g mit $g(x) = \frac{1}{2}x^2$; $x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die Funktion mit dem Funktionsterm.

a) $f(x) + g(x) =$

b) $f(x) - g(x) =$

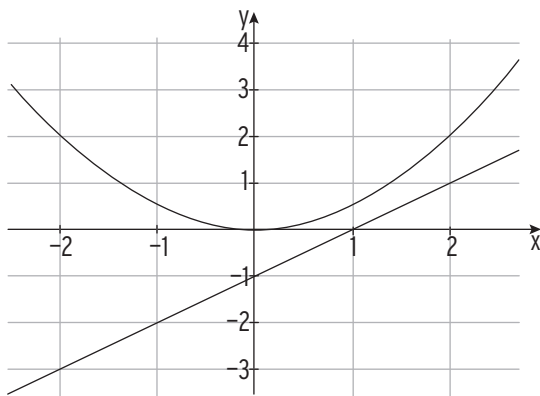
c) $f(x) \cdot g(x) =$

d) $f(g(x)) =$

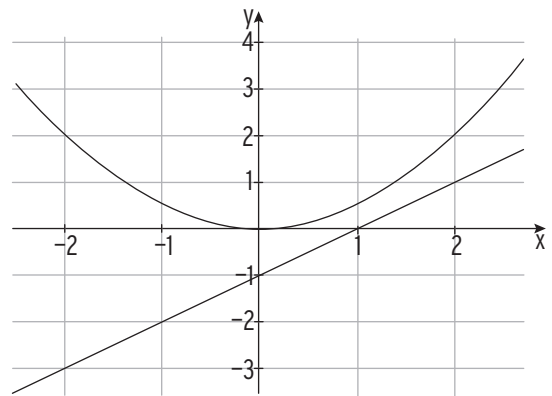
e) $g(f(x)) =$

Zeichnen Sie das Schaubild der Funktionen a) bis d).

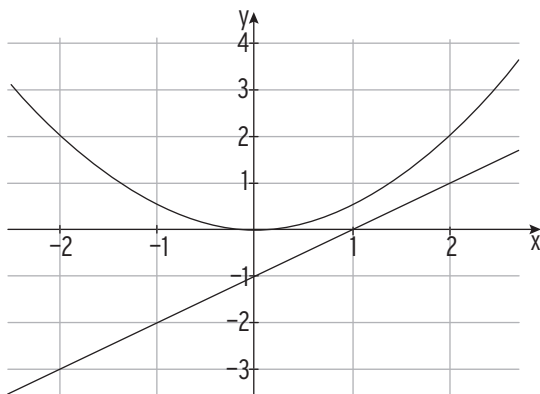
a)



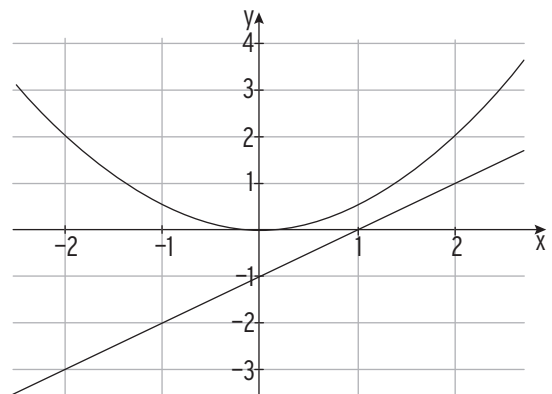
b)



c)

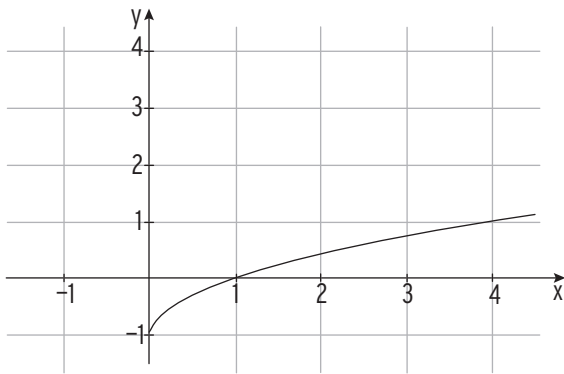


d)

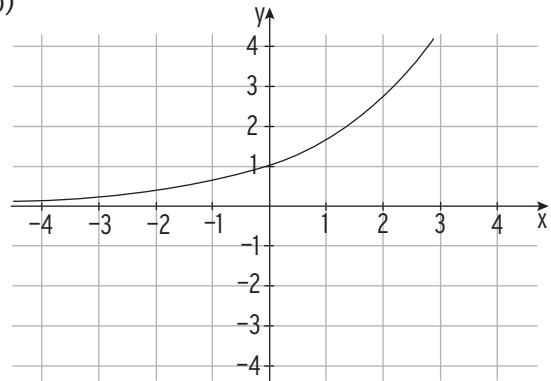


2 Zeichnen Sie das Schaubild der Umkehrfunktion der abgebildeten Funktion.

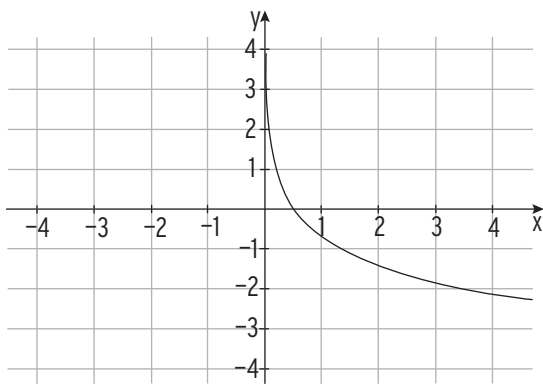
a)



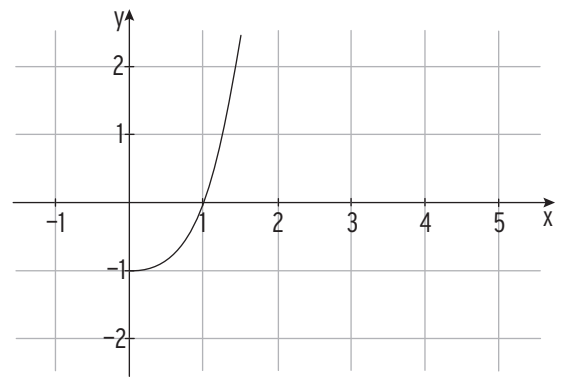
b)



c)



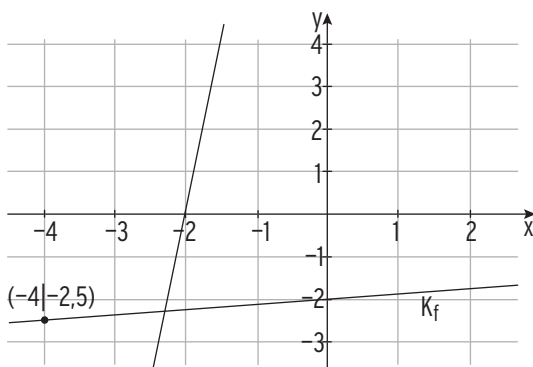
d)



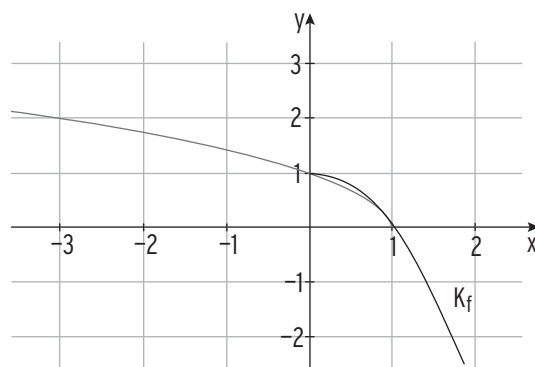
3 Die Abbildung zeigt die Graphen von f und f^{-1} .

Bestimmen Sie $f(x)$ und $f^{-1}(x)$.

a)



b)



3 Differenzialrechnung



Ableitung

1 Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate auf $[a; b]$.

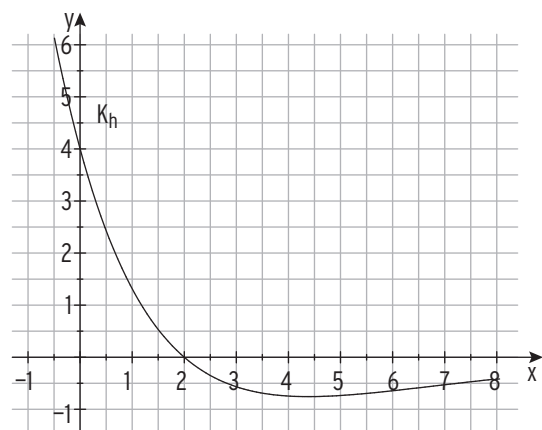
$f(x) = (x - 3)^2; [0; 3]$	$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{0 - 9}{3} = -3$
$f(x) = 4x^2 - 2x^3; [1; 3]$	
$f(x) = 3e^{\frac{1}{2}x}; [-1; 2]$	
$f(x) = 2\sin(2x); [0; \frac{\pi}{4}]$	

2 Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate in x_0 .

$f(x) = x^2 + 2; x_0 = 2$	$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 + 2 - 6}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$ $h + 4 \rightarrow 4$ für $h \rightarrow 0$ $m_t = f'(2) = 4$
$f(x) = 6x^2 - 2; x_0 = 1$	
$f(x) = x^2 - x; x_0 = 0$	

3 Gezeichnet ist das Schaubild einer Funktion h mit der Definitionsmenge $D = [-0,5; 8]$. Prüfen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

$h'(1) < 0$	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
Das Schaubild von h' geht durch den Punkt $Q(2 0)$.	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
$h'(7) = -0,5$	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
Es gibt ein $x \in D$ für das gilt: $h'(x) = 0$.	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
Die Gleichung $h'(x) = 1$ hat eine Lösung.	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)

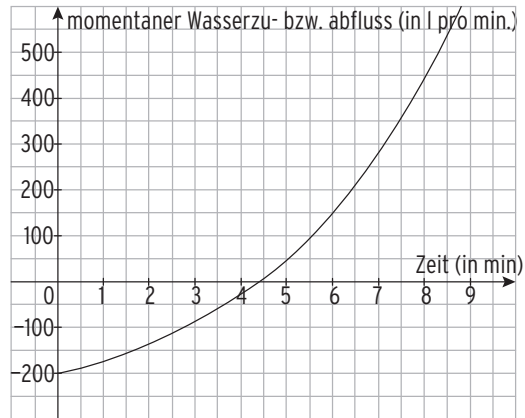




2 Die Funktion f mit $f(t) = 100e^{0,25t} - 300$ gibt für die ersten 9 Minuten den momentanen Wasserzu- bzw. abfluss in einem Wasserspeicher an. Das zugehörige Schaubild ist nebenstehend dargestellt. Positive Werte stehen hierbei für einen Wasserzufluss, negative für einen Wasserabfluss.

a) Zu welchem Zeitpunkt fließt am meisten Wasser ab?

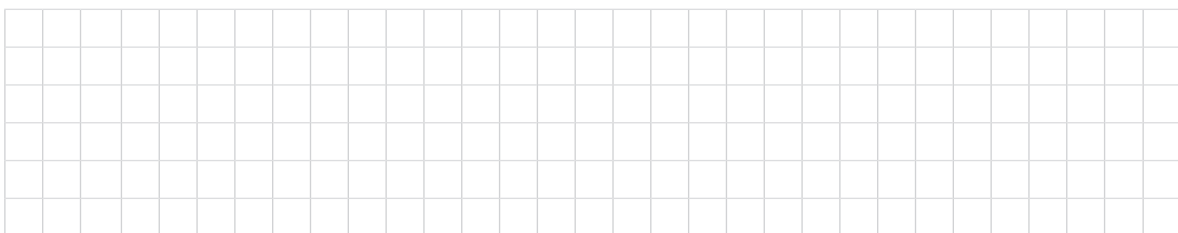
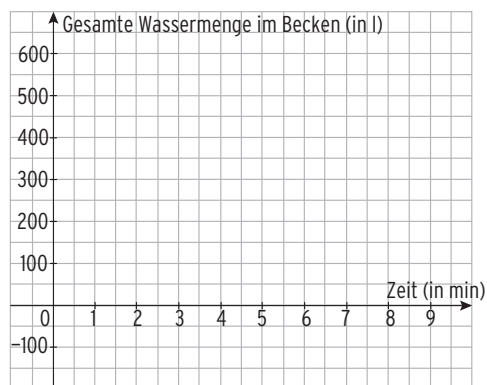
b) In welchem Zeitraum fließt Wasser ab?



c) Welche gesamte Wassermenge fließt ab?

d) Wie ändert sich die vorhandene Wassermenge im Becken zwischen $t=3$ und $t=6$?

e) Zu Beginn befanden sich 550 l Wasser im Becken. Ermitteln Sie den Term der Funktion, welche für jeden Zeitpunkt die gesamte Wassermenge im Becken angibt. Zeichnen Sie diese in das Koordinatensystem ein.

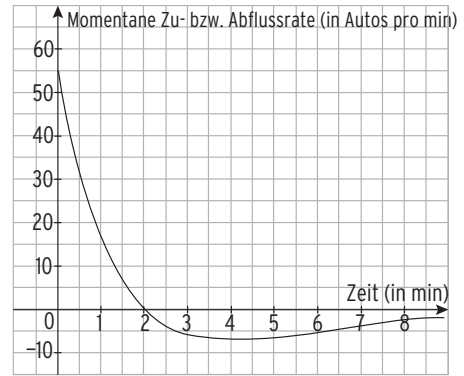


I Analysis

.....

3 Auf der Autobahn A8 bildet sich ein Stau.

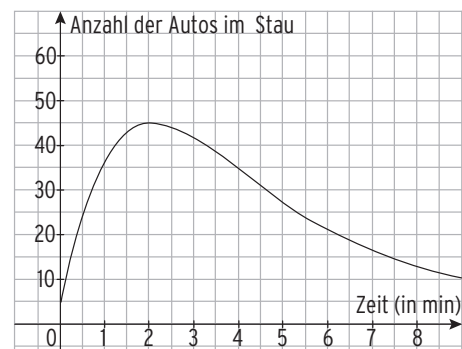
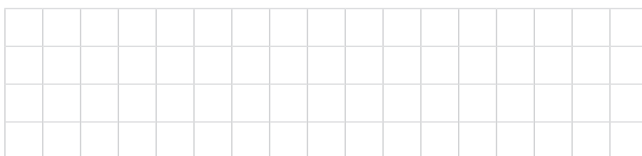
Das Koordinatensystem zeigt den Graphen der Funktion f, welche die momentane Zu- bzw. Abflussrate an Autos dargestellt.



a) Ergänzen Sie eine passende Aufgabenformulierung bzw. einen Rechenansatz.

Rechenansatz	Aufgabenformulierung
$\int_0^1 f(t)dt$	Wie viele Autos stehen in $t = 1$ mehr im Stau als in $t = 0$?
$\int_1^6 f(t)dt$	Wie ist die momentane Zuflussrate im Stau in $t = 1,4$?
	Zu welchem Zeitpunkt fahren genau so viele Autos in den Stau ein, wie aus diesem heraus?
$f'(t) = 0$	Zu welchem Zeitpunkt stehen ebenso viele Autos im Stau, wie zum Zeitpunkt 0?
$\int_0^{t_1} f(t)dt = -10$	

b) Das Koordinatensystem zeigt den Graphen der Funktion g, welche die Anzahl der Autos im Stau angibt. In welchem Zusammenhang stehen die Funktion f (aus a) und die Funktion g zueinander?



	Zu welchem Zeitpunkt stehen genau 30 Autos im Stau?
$g'(t) = 0$	Die Anzahl der Autos im Stau verringert sich.



Rotationskörper

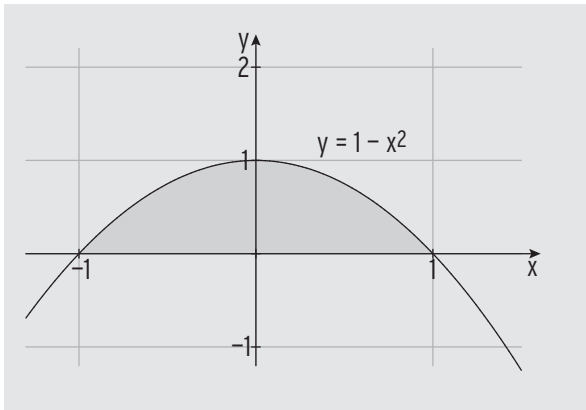
- 1 Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, wenn das Schaubild der Funktion f im Intervall $[a; b]$ um die x -Achse rotiert.

$f(x) = 3 - x^2$ $[a; b] = [-1; 1]$	$V = \pi \int_{-1}^1 (3 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (9 - 6x^2 + x^4) dx$ $V = \pi \left[9x - 2x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^1 = \pi \left(9 - 2 + \frac{1}{5} - (-9 + 2 - \frac{1}{5}) \right) = \frac{72}{5} \pi$
$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x$ $[a; b] = [-2; 1]$	
$f(x) = 1 + x^2$ $[a; b] = [-3; 0]$	
$f(x) = e^{-0,5x}$ $[a; b] = [0; 2]$	

- 2 Entscheiden Sie, ob die Behauptung richtig oder falsch ist.

	richtig	falsch
Eine Funktion hat genau eine Ableitungsfunktion und somit auch genau eine Stammfunktion.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die von den Kurven $K: f(x) = x^2$ und $G: g(x) = x$ eingeschlossene Fläche rotiert um die x -Achse. Mit dem Term $V = \pi \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx$ lässt sich das Rotationsvolumen berechnen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die von den Kurven $K: f(x) = x^2$ und $G: g(x) = x$ eingeschlossene Fläche rotiert um die x -Achse. Mit dem Term $V = \pi \int_0^1 ((g(x))^2 - (f(x))^2) dx$ lässt sich das Rotationsvolumen berechnen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

3 Die markierte Fläche rotiert um die x-Achse.
Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.



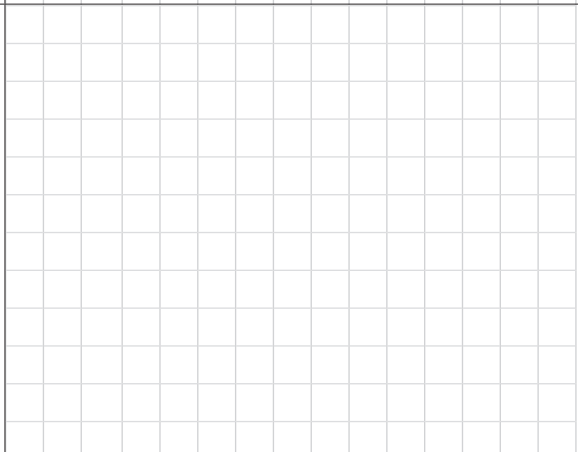
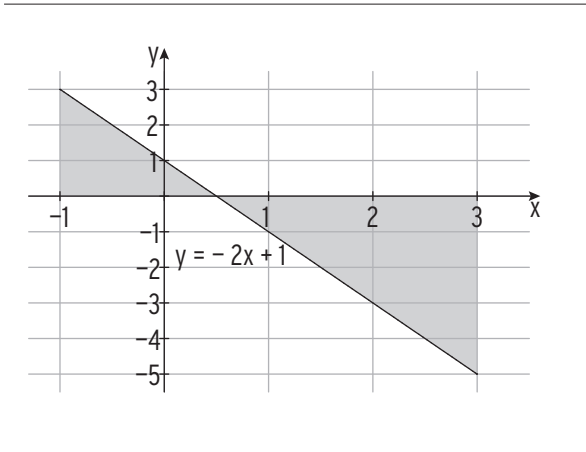
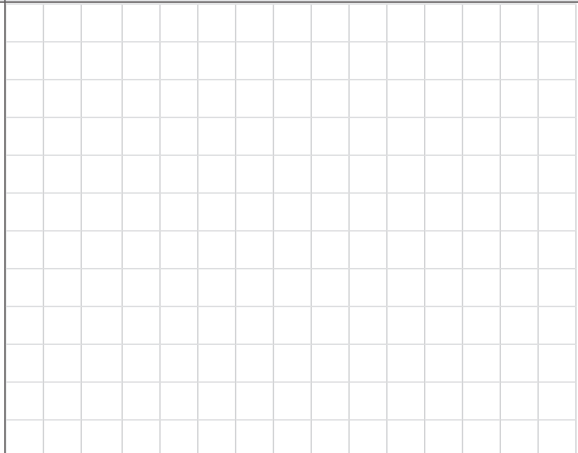
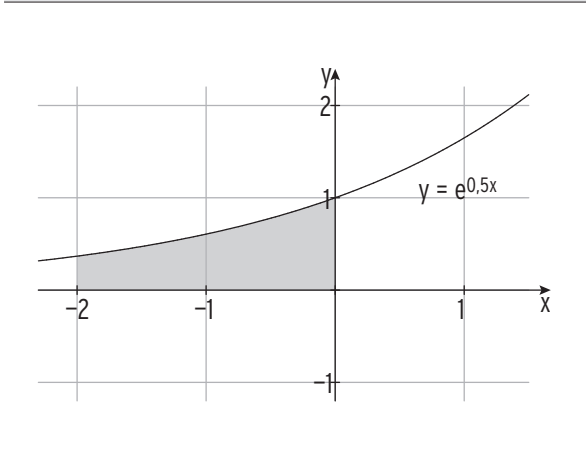
$$V = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^1 (1 - 2x^2 + x^4) dx$$

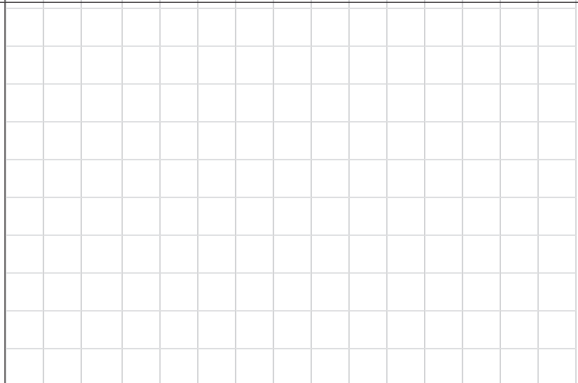
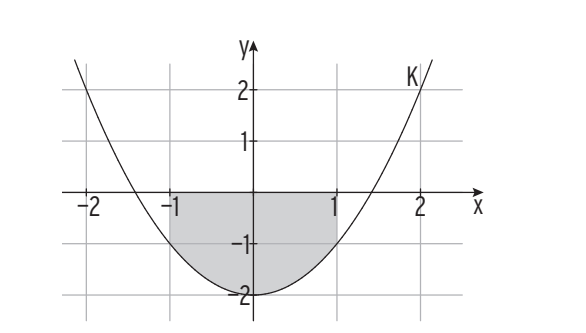
$$V = \pi \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^1$$

$$V = \pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) \right) = \frac{16}{15} \pi$$

Volumen $V = \frac{16}{15} \pi$

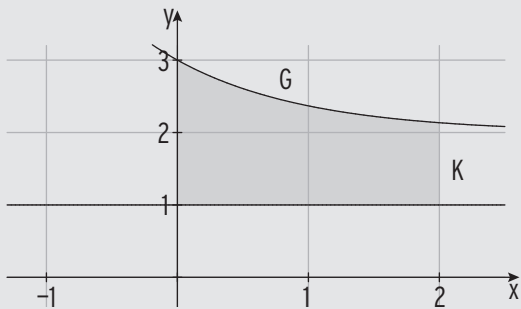


K: $f(x) = x^2 - 2$



4 Die markierte Fläche rotiert um die x-Achse.
Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

K: $f(x) = 1$; G: $g(x) = e^{-x} + 2$



$$V = \pi \int_0^2 ((g(x))^2 - (f(x))^2) dx$$

$$(g(x))^2 = (e^{-x} + 2)^2 = e^{-2x} + 4e^{-x} + 4$$

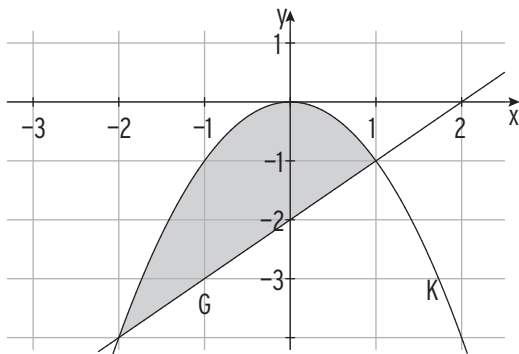
$$V = \pi \int_0^2 (4 + 4e^{-x} + e^{-2x} - 1) dx$$

$$V = \pi \left[3x - 4e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^2 \approx 9,95\pi$$

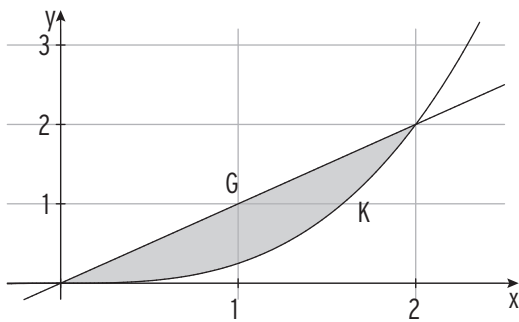
Volumen $V = 9,95\pi$

Hinweis: $V = V_{\text{außen}} - V_{\text{innen}}$

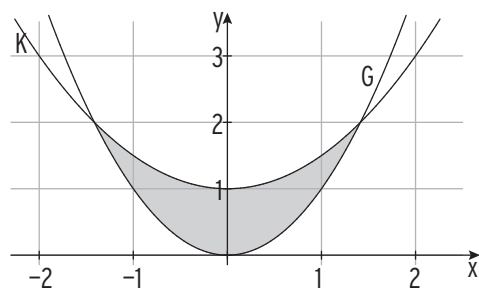
K: $f(x) = -x^2$; G: $g(x) = x - 2$



K: $f(x) = 0,25 x^3$; G: $g(x) = x$



K: $f(x) = 0,5x^2 + 1$; G: $g(x) = x^2$



II Vektorielle Geometrie



mvurl.de/t56e

1 Lineare Gleichungssysteme

1 Lösen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3 .

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 4 & 3 & 2 & -9 \\ -3 & -4 & -3 & 6 \end{array} \right)$$

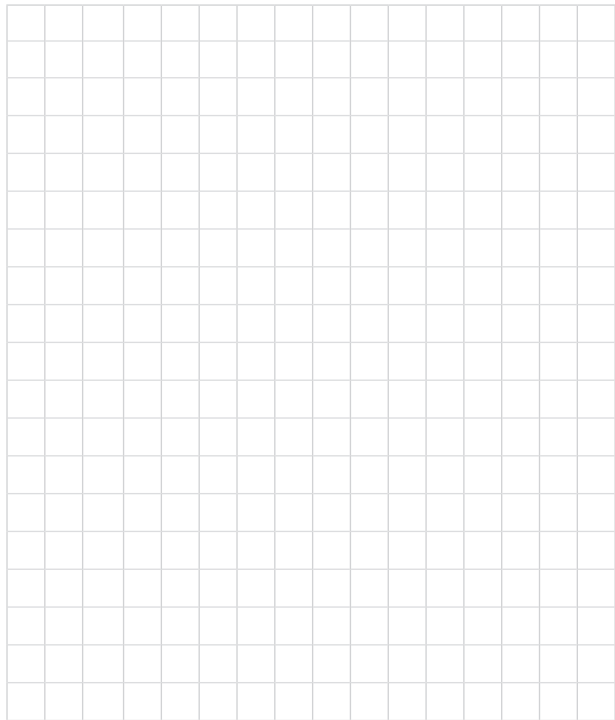
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 4 & 3 & 2 & -9 \\ -3 & -4 & -3 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-2) \\ \leftarrow \cdot 3 \\ \leftarrow \cdot 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -8 & -35 \\ 0 & -5 & 9 & 51 \end{array} \right) \leftarrow \cdot 5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -8 & -35 \\ 0 & 0 & -31 & -124 \end{array} \right)$$

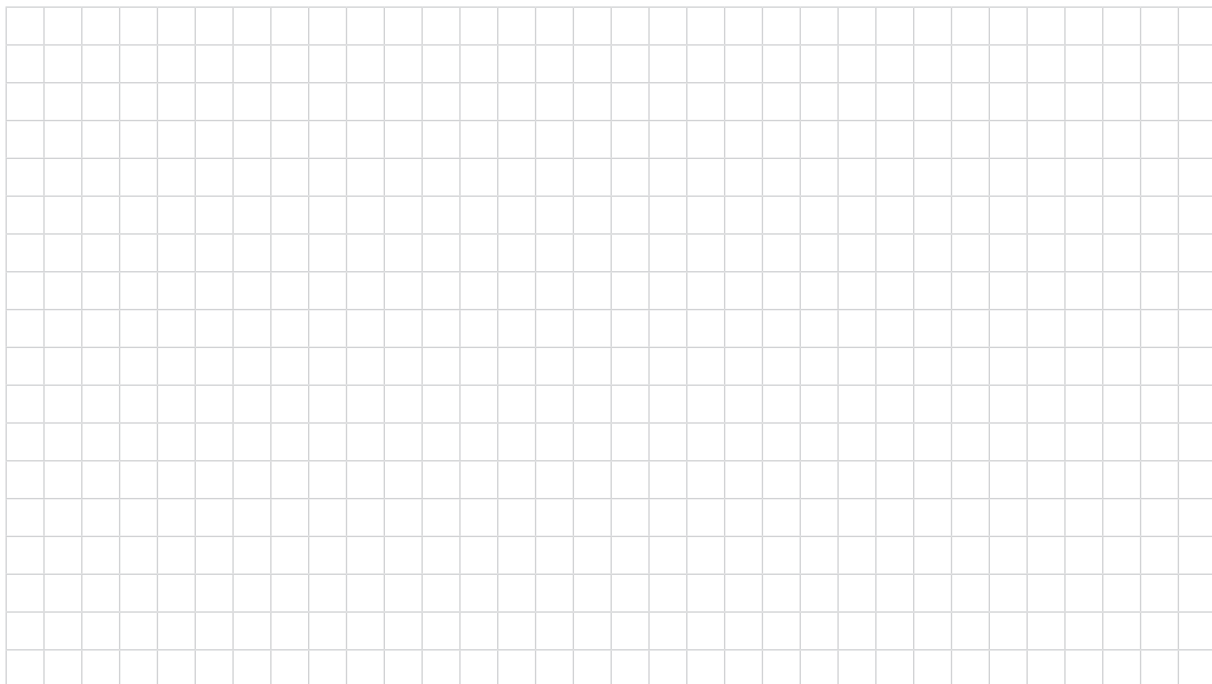
$-31x_3 = -124 \Rightarrow x_3 = 4$
 Einsetzen in $x_2 - 8x_3 = -35$ ergibt:
 $x_2 - 32 = -35 \Rightarrow x_2 = -3$
 Einsetzen in $2x_1 + x_2 + 5x_3 = 13$
 ergibt: $2x_1 - 3 + 5 \cdot 4 = 13$
 $x_1 = -2$
 Lösung: $(-2; -3; 4)$

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right)$$



c)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

d)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 & -5 \end{array} \right)$$



2 Das lineare Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3 ist mehrdeutig lösbar. Bestimmen Sie die Lösung.

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -9 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -9 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-2) \\ \leftarrow \cdot 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -15 \end{array} \right) \leftarrow \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

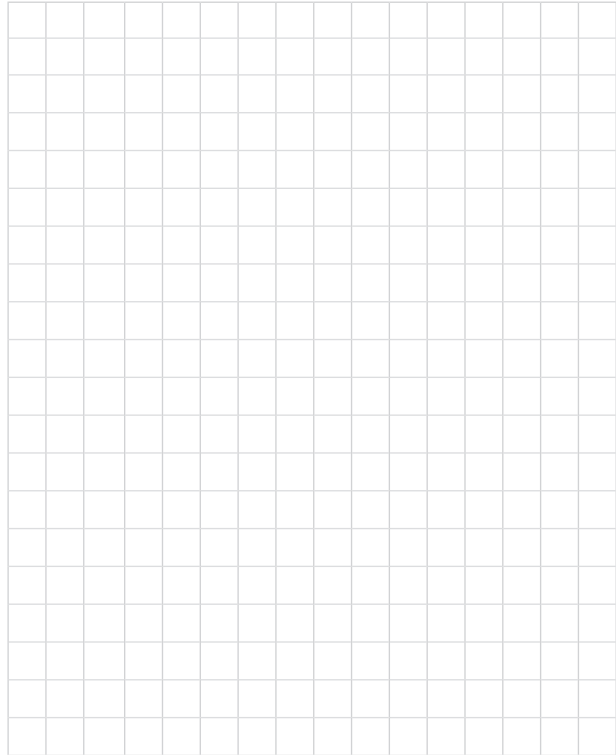
Wählen Sie: $x_3 = r$

Einsetzen in $-x_2 - x_3 = 5$ ergibt:
 $-x_2 - r = 5 \Rightarrow x_2 = -r - 5$

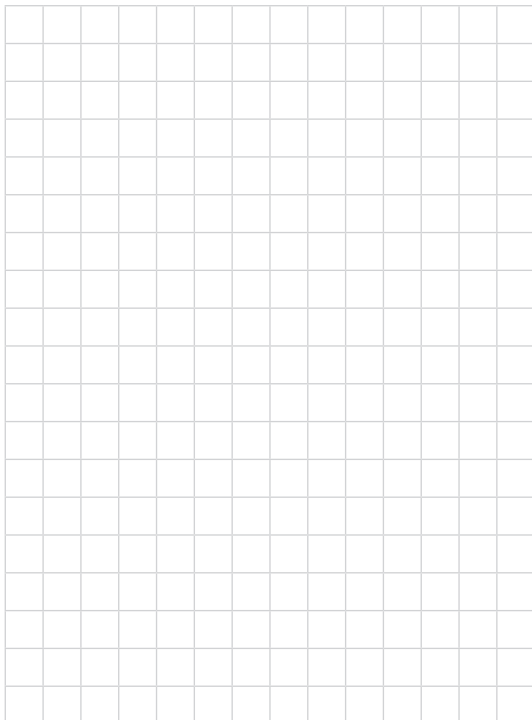
Einsetzen in $x_1 + x_2 + x_3 = -2$ ergibt:
 $x_1 + (-r - 5) + r = -2 \Rightarrow x_1 = 3$

Lösung: $(3; -r - 5; r)$

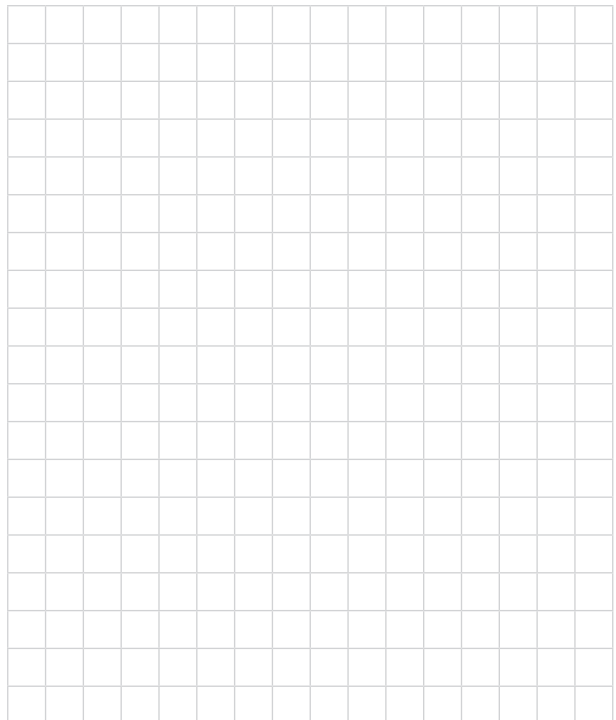
b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 13 \\ 4 & -5 & 0 & -9 \\ -3 & 4 & -2 & -2 \end{array} \right)$$



c)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \end{array} \right)$$



d)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -6 & 24 \end{array} \right)$$



II Vektorielle Geometrie

.....

3 Das lineare Gleichungssystem wird mit dem Gaußverfahren gelöst. Ergänzen Sie die fehlenden Zahlen.

$$a) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & \square \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \square \\ 0 & 0 & \square & -9 \end{array} \right)$$

$$b) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & -5 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & \square & -3 & 7 \\ 0 & -8 & \square & -11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 14 & -3 & 7 \\ 0 & \square & 0 & \square \end{array} \right)$$

4 Das lineare Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3 hat genau eine Lösung. Bestimmen Sie die Lösung.

a) $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right)$	$3x_3 = -3; x_3 = -1$ $2x_2 = 3; x_2 = 1,5$ Eingesetzt in $x_1 + 2x_3 = 1$ ergibt: $x_1 + 2 \cdot (-1) = 1 \Rightarrow x_1 = 3$	Lösung: $(3; 1,5; -1)$ oder: $x_1 = 3; x_2 = 1,5; x_3 = -1$
b) $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right)$		

5 Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

a) $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$	Wählen Sie: $x_3 = r$ Eingesetzt in $x_2 - x_3 = 2: x_2 = 2 + r$ Eingesetzt in $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ $x_1 - 2(2+r) + r = 0: x_1 = 4 + r$	Lösung: $(4 + r; 2 + r; r)$ oder: $x_1 = 4 + r; x_2 = 2 + r;$ $x_3 = r$
b) $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$		
c) $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$		

6 Ist die dargestellte Umformung beim Gauß-Verfahren korrekt? Beschreiben Sie ansonsten den Fehler.

Umformung	Umformung ist	Fehlerbeschreibung
$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) -1$	<input type="checkbox"/> richtig	
$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right)$	<input type="checkbox"/> falsch	
$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \cdot 0$	<input type="checkbox"/> richtig	
$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	<input type="checkbox"/> falsch	
$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \left[\begin{array}{l} \uparrow \\ \leftarrow \end{array} \right]$	<input type="checkbox"/> richtig	
$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$	<input type="checkbox"/> falsch	

7 Ergänzen Sie die Werte in der erweiterten Koeffizientenmatrix so, dass das LGS
a) eindeutig lösbar b) mehrdeutig lösbar c) unlösbar ist.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare \end{array}\right)$$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{array}\right)$$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{array}\right)$$

8 Gegeben ist die allgemeine Lösung eines linearen Gleichungssystems.
Ist der gegebene Vektor eine Lösung?

allgemeine Lösung	Lösungsvektor?	Lösungsvektor?
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2r-1 \\ r-1 \\ r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ <input type="checkbox"/> ist Lösung <input type="checkbox"/> ist keine Lösung	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ <input type="checkbox"/> ist Lösung <input type="checkbox"/> ist keine Lösung
$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r \\ 4r \\ -r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ <input type="checkbox"/> ist Lösung <input type="checkbox"/> ist keine Lösung	$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ <input type="checkbox"/> ist Lösung <input type="checkbox"/> ist keine Lösung
$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ r+1 \\ 3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ <input type="checkbox"/> ist Lösung <input type="checkbox"/> ist keine Lösung	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ <input type="checkbox"/> ist Lösung <input type="checkbox"/> ist keine Lösung

II Vektorielle Geometrie

.....

9 Dargestellt ist ein LGS in Matrixform. Ordnen Sie dieses bezüglich der Lösbarkeit ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Anzahl Unbekannte = Anzahl Gleichungen

a)	LGS in Matrixform	Lösbarkeit	Begründung
	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$	<input type="checkbox"/> eindeutig lösbar <input type="checkbox"/> mehrdeutig lösbar <input type="checkbox"/> unlösbar	
	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$	<input type="checkbox"/> eindeutig lösbar <input type="checkbox"/> mehrdeutig lösbar <input type="checkbox"/> unlösbar	
	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 2,5 \end{array}\right)$	<input type="checkbox"/> eindeutig lösbar <input type="checkbox"/> mehrdeutig lösbar <input type="checkbox"/> unlösbar	
	$\left(\begin{array}{ccc c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$	<input type="checkbox"/> eindeutig lösbar <input type="checkbox"/> mehrdeutig lösbar <input type="checkbox"/> unlösbar	
	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$	<input type="checkbox"/> eindeutig lösbar <input type="checkbox"/> mehrdeutig lösbar <input type="checkbox"/> unlösbar	
	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$	<input type="checkbox"/> eindeutig lösbar <input type="checkbox"/> mehrdeutig lösbar <input type="checkbox"/> unlösbar	

b) Anzahl Unbekannte < Anzahl Gleichungen

$\left(\begin{array}{cc c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{array}\right)$	<input type="checkbox"/> eindeutig lösbar <input type="checkbox"/> mehrdeutig lösbar <input type="checkbox"/> unlösbar	
$\left(\begin{array}{cc c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$	<input type="checkbox"/> eindeutig lösbar <input type="checkbox"/> mehrdeutig lösbar <input type="checkbox"/> unlösbar	

c) Anzahl Unbekannte > Anzahl Gleichungen

$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$	<input type="checkbox"/> eindeutig lösbar <input type="checkbox"/> mehrdeutig lösbar <input type="checkbox"/> unlösbar	
$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right)$	<input type="checkbox"/> eindeutig lösbar <input type="checkbox"/> mehrdeutig lösbar <input type="checkbox"/> unlösbar	



2 Vertiefung der Vektoriellen Geometrie

Geraden im Anschauungsraum

1 Gegeben ist die Gerade g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie für die angegebenen Parameterwerte die zugehörigen Geradenpunkte.

a) $r = -2$	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ A(4 - 5 8)
b) $r = 3$	
c) $r = -1$	

2 Der Punkt A liegt auf der Geraden g. Vervollständigen Sie.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; A(3 _ _)$	Aus $x_1 = 3: r = 4$ Einsetzen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ A(3 - 5 1)
b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; A(- 2 _ _)$	
c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; A(_ 6 _)$	

3 Untersuchen Sie, ob die Punkte auf der Geraden g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$ liegen.

a) A(0 1 - 2)	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} 0 &= -2 + 2r & r &= 1 \\ 1 &= 3 - 2r & r &= 1 \\ -2 &= 2 - 7r & r &= \frac{4}{7} \end{aligned}$	Der Punkt A liegt nicht auf g.
-------------------	---	--	--------------------------------

b) B(- 12 | 13 | 37)

$\begin{pmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} _ &= _ & r &= \\ _ &= _ & r &= \\ _ &= _ & r &= \end{aligned}$	Der Punkt A liegt _____
--	---	-------------------------

II Vektorielle Geometrie

.....

4 Ermitteln Sie die Koordinaten des gesuchten Punktes auf $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$.

a) Punkt mit x_3 -Koordinate -9

$$-9 = -3 - 3r \Rightarrow r = 2 \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \\ -9 \end{pmatrix}; A(-6 | 16 | -9)$$

b) Punkt mit x_1 -Koordinate -2 :

c) Spurpunkt mit x_1x_2 -Ebene:

d) Spurpunkt mit der x_1x_3 -Ebene:

e) Punkt mit der x_2 -Koordinate 10 :

5 Ermitteln Sie eine mögliche Geradengleichung.

a) Die Gerade g verläuft durch $A(-1 | 0 | -3)$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}. \quad (\text{Aufpunktvektor} + r \cdot \text{Richtungsvektor})$$

b) Die Gerade g verläuft durch $A(1 | 4 | -3)$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$g: \vec{x} =$$

c) Die Gerade g verläuft durch $A(-3 | 1 | -3)$ parallel zu $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$

$$g: \vec{x} =$$

d) Die Gerade g verläuft durch $A(-3 | 1 | 1)$ parallel zur x_3 -Achse

$$g: \vec{x} =$$

e) Die Gerade g verläuft durch $A(0 | 2 | -1)$ parallel zur x_1x_3 -Ebene

$$g: \vec{x} =$$

f) Die Ursprungsgerade g verläuft durch $A(6 | 2 | -4)$

$$g: \vec{x} =$$

II Vektorielle Geometrie

.....

8 Ist hierdurch eine Ebene eindeutig festgelegt?

Drei verschiedene Punkte.

ja nein

Drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

ja nein

Zwei echt parallele Geraden.

ja nein

Zwei sich schneidende Geraden.

ja nein

Eine Gerade und ein Punkt, der nicht auf der Geraden liegt.

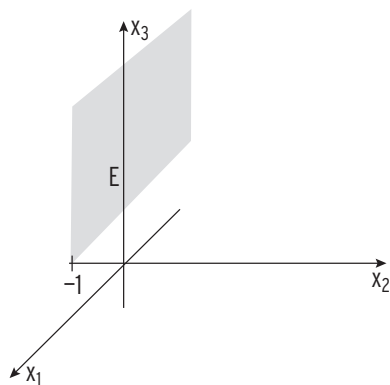
ja nein

Zwei windschiefe Geraden.

ja nein

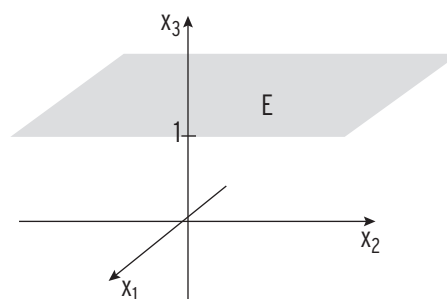
9 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene mit Hilfe der Abbildung.

a)



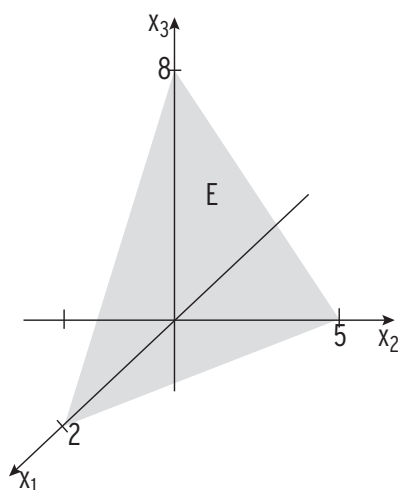
E:

b)



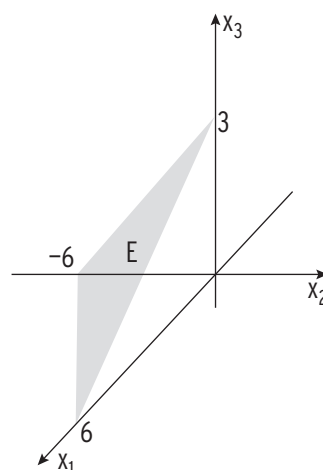
E:

c)



E:

d)



E:



Gegenseitige Lage einer Geraden und einer Ebene

1 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene E zur Geraden g. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S.

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

Gleichsetzen ergibt ein LGS für r, s, t: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$

Auflösen: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right)$

Das LGS ist eindeutig lösbar mit $t = 2$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $S(10 \mid -2 \mid -1)$

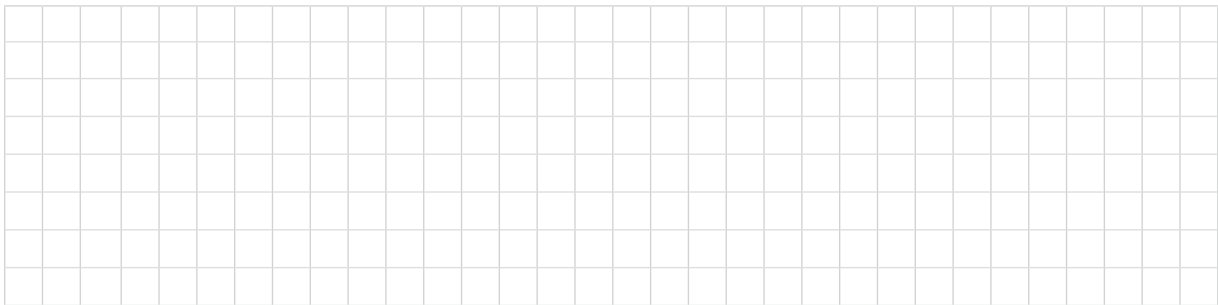
b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

Gleichsetzen ergibt ein LGS für r, s, t: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$

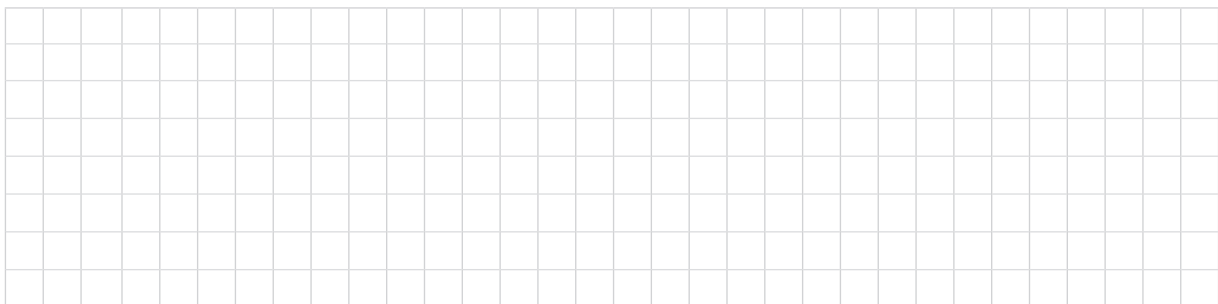
Auflösen: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$

Das LGS ist unlösbar, die Gerade g und die Ebene E verlaufen echt parallel zueinander.

c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$



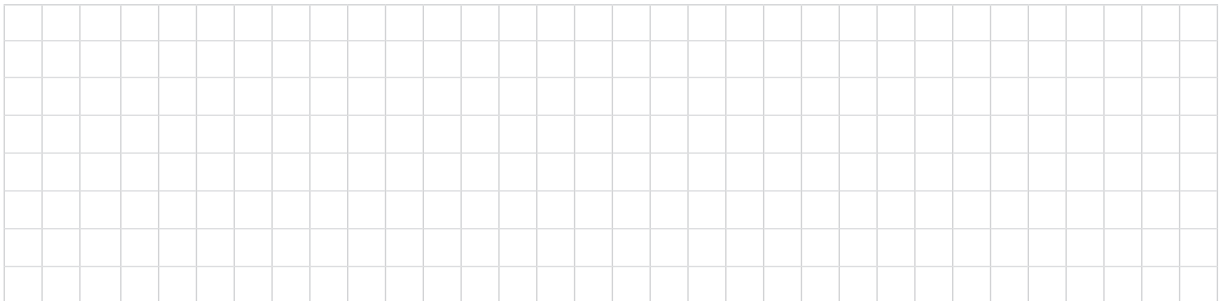
d) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$



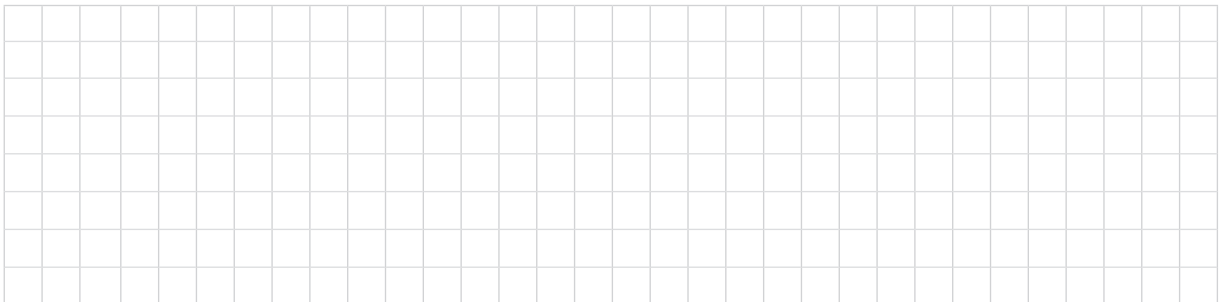
2 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene E zur Geraden g. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S.

a) E: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -6$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$
 Einsetzen von $x_1 = 5 + 2r$, $x_2 = 8 + 4r$, $x_3 = 5 + 6r$ (aus der Geradengleichung)
 in die Ebenengleichung $5 + 2r + 2(8 + 4r) + 3(5 + 6r) = -6$
 $r = -1,5$
 Einsetzen von $r = -1,5$ in g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} - 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$
 E und g schneiden sich in $S(2 \mid 2 \mid -4)$.

b) E: $x_1 + x_2 - x_3 = -2$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$



c) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$



d) E: $\frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{-4} = 1$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$



II Vektorielle Geometrie

.....

3 Tragen Sie ein, welche Bedingungen in der jeweiligen Lagebeziehung gelten.

Lagebeziehung	Bedingungen
g ist echt parallel zu E <input type="checkbox"/> I. <input type="checkbox"/> II. <input type="checkbox"/> III. <input type="checkbox"/> IV.	I. Der Richtungsvektor von g und der Normalenvektor von E sind Vielfache voneinander.
g schneidet E senkrecht <input type="checkbox"/> I. <input type="checkbox"/> II. <input type="checkbox"/> III. <input type="checkbox"/> IV.	II. Der Aufpunkt von g liegt auf E. III. Der Normalenvektor von E steht senkrecht auf dem Richtungsvektor von g.
g liegt in E <input type="checkbox"/> I. <input type="checkbox"/> II. <input type="checkbox"/> III. <input type="checkbox"/> IV.	IV. Eine Linearkombination aus den beiden Richtungsvektoren von E ergibt den Richtungsvektor von g.

4 Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E in Parameterform. Die Untersuchung auf gemeinsame Punkte ergibt folgendes Gleichungssystem. Wie liegen g und E zueinander? Begründen Sie Ihre Antwort.

	Lage	Begründung
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & & 2 \\ 0 & 1 & 1 & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \end{pmatrix}$	E und g schneiden sich in S.	Das LGS ist eindeutig lösbar.
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & & 2 \\ 0 & 1 & 1 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 3 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & & 2 \\ 0 & 1 & 0 & & 1 \\ 0 & 3 & 0 & & 3 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & & 2 \\ 0 & 1 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & -1 & & 0 \end{pmatrix}$		

5 Gegeben sind die Gerade g (Parameter r) und die Ebene E in Koordinatenform. Die Untersuchung auf gemeinsame Punkte ergibt die folgende Gleichung in r. Beschreiben Sie, wie g und E zueinander liegen. Begründen Sie Ihre Antwort.

$r = 2$	$0 \cdot r = 1$	$1 = 1$	$4 \cdot r = 0$
E und g	E und g	E und g	E und g
denn:	denn:	denn:	denn:



Gegenseitige Lage von zwei Ebenen

1 Die Ebene E und die Ebene F schneiden sich in einer Geraden.

Berechnen Sie die Gleichung der Schnittgeraden.

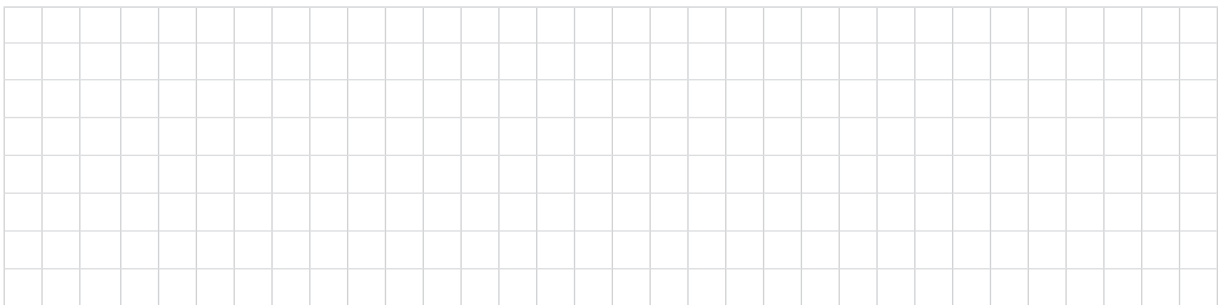
a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; u, v \in \mathbb{R}$ $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R},$

Gleichsetzen ergibt ein LGS für u, v, r, s: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar; s ist frei wählbar; $r - s = -1 \Rightarrow r = s - 1$

Gleichung der Schnittgeraden: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + (s - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R},$ $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; u, v \in \mathbb{R}$



2 Die Ebene E und die Ebene F schneiden sich in einer Geraden.

Berechnen Sie die Gleichung der Schnittgeraden.

a) $E: x_1 + x_2 + x_3 = 2$ $F: x_2 + 2x_3 = 6$

Das LGS $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right)$ ist mehrdeutig lösbar. $x_3 = r$ frei wählbar

Einsetzen in $x_2 + 2x_3 = 6$ ergibt: $x_2 + 2r = 6 \Rightarrow x_2 = 6 - 2r$

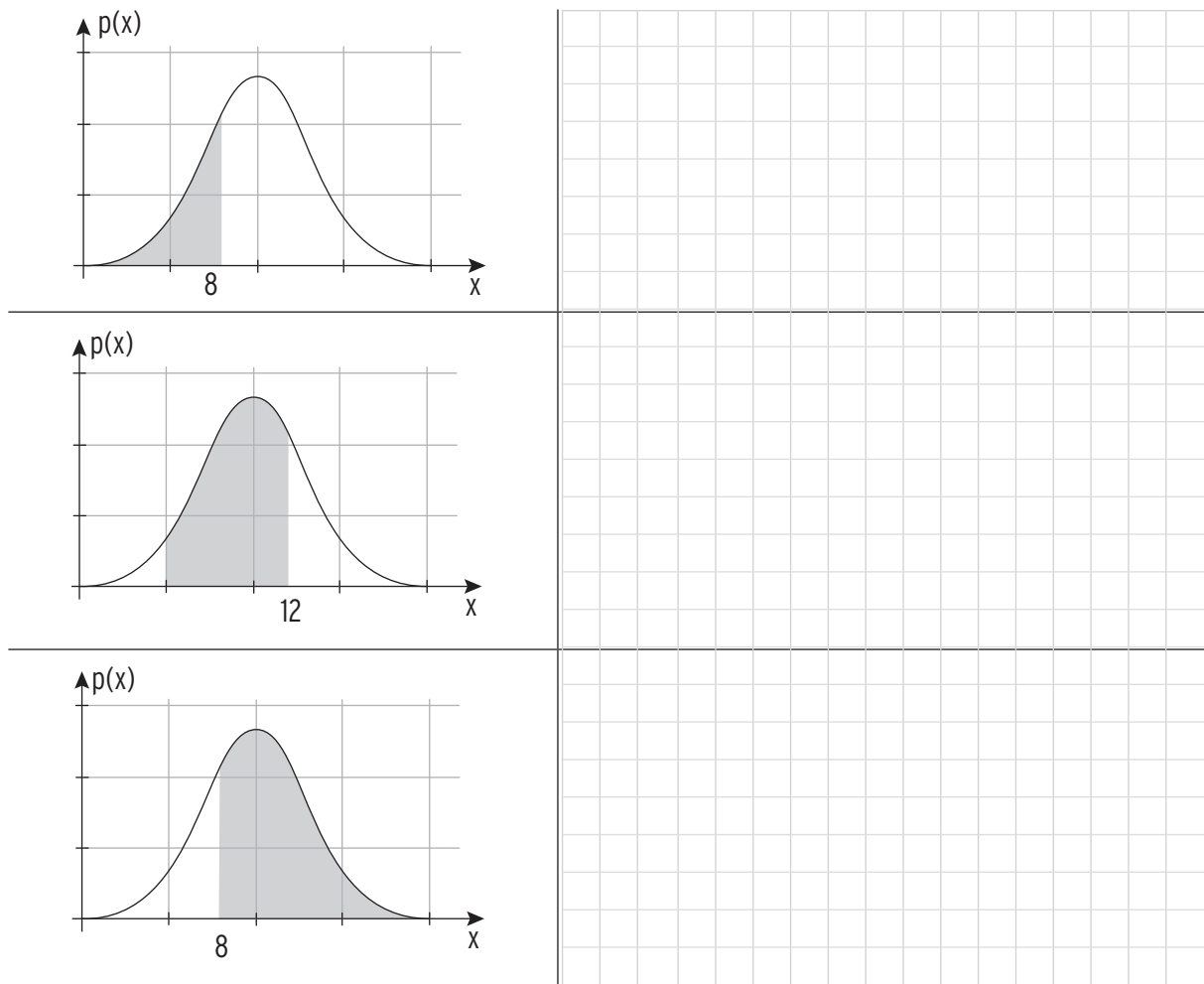
Einsetzen in $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ ergibt: $x_1 + 6 - 2r + r = 2 \Rightarrow x_1 = -4 + r$

Schnittgerade: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4+r \\ 6-2r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

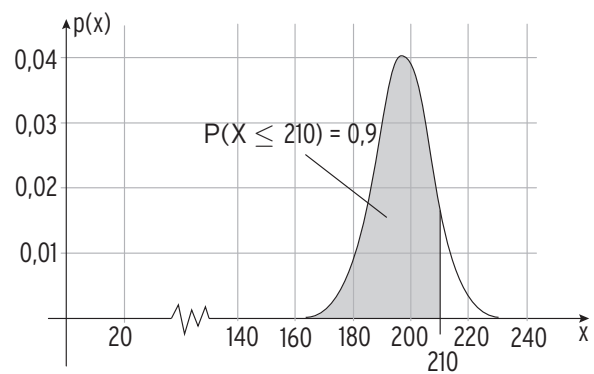
b) $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$ $F: 2x_2 + x_3 = 2$



- 4 Die Abbildungen zeigen die Normalverteilung einer Zufallsgröße X mit $\sigma = 3,2$. Berechnen Sie die dargestellten Wahrscheinlichkeiten.



- 5 Für die Kaffeemaschine NESTO wurde die normalverteilte Füllmenge für einen Becher mit einem Sollwert von 200 ml untersucht. Erläutern Sie drei wesentliche Informationen, die in der Graphik enthalten sind.



2 Eine Münze wird 150 Mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft Wappen geworfen wurde.

X ist binomialverteilt mit $n = \underline{\hspace{2cm}}$ und $p = \underline{\hspace{2cm}}$.

Somit beträgt der Erwartungswert $\mu = \underline{\hspace{2cm}}$

und die Standardabweichung $\sigma = \underline{\hspace{3cm}}$.

Nach der σ -Regel nimmt X einen Wert an, welcher mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3 % im Intervall $[\underline{\hspace{2cm}}; \underline{\hspace{2cm}}]$,

mit einer Wahrscheinlichkeit

von 95,4 % im Intervall $[\underline{\hspace{2cm}}; \underline{\hspace{2cm}}]$

und mit einer Wahrscheinlichkeit

von 99,7 % im Intervall $[\underline{\hspace{2cm}}; \underline{\hspace{2cm}}]$

liegt.

3 Sind die Aussagen, bezogen auf eine binomialverteilte Zufallsvariable, wahr (w) oder falsch (f)?

Der Erwartungswert gibt stets die Trefferanzahl an, die die höchste Wahrscheinlichkeit aufweist.	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung der Werte einer Zufallsvariablen um den Erwartungswert.	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
Die Standardabweichung misst die Breite der Verteilung.	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
Ein Intervall, das mithilfe der Sigmaregeln berechnet wird, ist stets symmetrisch zum Erwartungswert.	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
Eine Binomialverteilung ist annähernd normalverteilt für $\sigma > 5$.	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
Die Sigmaregeln treffen umso besser zu, je größer der Stichprobenumfang ist.	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
Mit den Sigmaregeln können Wahrscheinlichkeiten abgeschätzt werden.	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)

2 An einer großen beruflichen Schule wird der Schülersprecher gewählt, wobei jeder Schüler einen Wahlzettel mit seinem gewünschten Kandidaten abgegeben hat. Nachdem 100 Stimmzettel ausgezählt sind, wird eine erste „Hochrechnung“ gemacht. 47 Stimmzettel entfallen auf den Kandidaten Vincent.

Geben Sie ein Intervall an, in welchem der Stimmenanteil von Vincent nach Auszählung aller Stimmzettel mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegen wird.

$n =$; $h =$; $\gamma =$; $c =$

Vertrauensintervall:

Der gesamte Stimmenanteil für Vincent wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % zwischen und liegen.

3 Ein Unternehmen möchte den neuen Joghurt „choco-mint“ am Markt platzieren und bietet diesen hierzu einen Monat lang in einem Testsupermarkt an. 253 der insgesamt 1572 Testkunden haben den Joghurt in diesem Zeitraum gekauft.

a) Ermitteln Sie zum Vertrauensniveau $\gamma = 95\%$ ein Vertrauensintervall für den gesamten Marktanteil des neuen Joghurts.

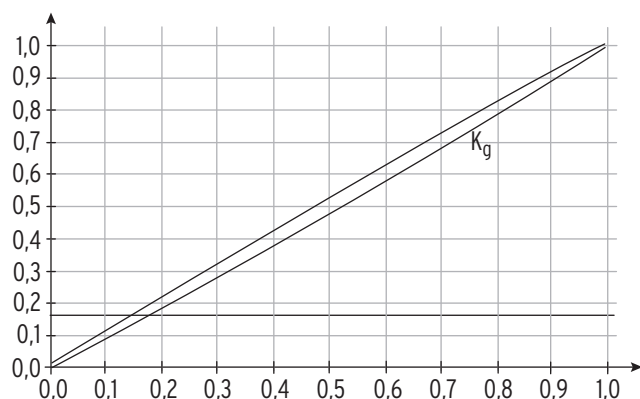
- Mit dem WTR:
- Mithilfe einer Konfidenzellipse.
Beschriften Sie die Abbildung.
Kennzeichnen Sie das Konfidenzintervall.

$f(p) =$

$g(p) =$

$h =$

$VI =$



b) Deutschlandweit rechnet das Unternehmen mit 14 Millionen Personen, welche durchschnittlich einen Joghurt pro Woche kaufen. Gemäß a) kann das Unternehmen also mit mindestens _____ und höchstens _____ verkauften „choco-mint“- Joghurts pro Woche rechnen. An einem verkauften Joghurt verdient das Unternehmen 0,11 EUR. Das Unternehmen wird durch die Einführung des Joghurts (mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %) also mindestens _____ EUR und höchstens _____ EUR Gewinn pro Woche erwirtschaften.

Bohner | Ott | Deusch | Rosner

Arbeitsheft

Mathematik – Jahrgangsstufen 1 und 2 erhöhtes Anforderungsniveau

Berufliches Gymnasium

Baden-Württemberg

Analysis

Vektorielle Geometrie

Stochastik

Matrizen – Grundlagen

Lösungen

Merkur 
Verlag Rinteln