

Abit **MEHR**
ERFAHREN

Mathematik

Gymnasium

Baden-Württemberg

ab 2023

Das musst du können!

STARK

Inhalt

Analysis

1 Gleichungen	1
1.1 Quadratische Gleichungen	1
1.2 Exponentialgleichungen	2
1.3 Nullprodukt	3
2 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften	4
2.1 Potenzfunktionen	4
2.2 Ganzrationale Funktionen	5
2.3 Sinus- und Kosinusfunktion (trigonometrische Funktionen)	6
2.4 Natürliche Exponentialfunktion	7
2.5 Entwicklung von Funktionen	8
2.6 Einfache und mehrfache Nullstellen	10
2.7 Symmetrie	11
3 Ableitung	12
3.1 Ableitungen der Grundfunktionen	12
3.2 Ableitungsregeln	13
3.3 Tangente und Normale in einem Punkt des Graphen	14
3.4 Grafisches Ermitteln der Steigung	15
3.5 Berührung zweier Graphen	16
4 Eigenschaften von Funktionen und Graphen	17
4.1 Monotonieverhalten	17
4.2 Extrempunkte und Sattelpunkte	18
4.3 Krümmungsverhalten, Wendepunkte	21
5 Integralrechnung	23
5.1 Stammfunktion	23
5.2 Zusammenhang zwischen den Graphen von F und f	25
5.3 Integral	27
5.4 Flächenberechnungen mit Integral	29
5.5 Von der momentanen Änderungsrate zum Bestand	34

Analytische Geometrie

1 Vektoren	37
1.1 Grundlagen	37
1.2 Skalarprodukt	38
1.3 Vektorprodukt	39
2 Geraden und Ebenen	40
2.1 Geraden	40
2.2 Parametergleichung einer Ebene	42
2.3 Koordinatengleichung einer Ebene	42
2.4 Zeichnerische Darstellung von Ebenen	44
2.5 Umformung: Parameter- in Koordinatengleichung	46
3 Lagebeziehungen	48
3.1 Lage zweier Geraden	48
3.2 Lage einer Geraden zu einer Ebene	50
3.3 Lage zweier Ebenen	52
4 Abstände und Winkel	54
4.1 Abstand eines Punktes zu einer Ebene	54
4.2 Abstand Gerade–Ebene und Ebene–Ebene	55
4.3 Schnittwinkel	56
5 Spiegelungen	58

Stochastik

1 Zufallsexperimente und Ereignisse	59
2 Wahrscheinlichkeitsberechnungen	60
2.1 Wahrscheinlichkeit	60
2.2 Laplace-Experiment, Laplace-Wahrscheinlichkeit	60
2.3 Baumdiagramme und Pfadregeln	61
2.4 Vierfeldertafel	63
2.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit	64

3 Zufallsgrößen	66
3.1 Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung	66
3.2 Erwartungswert einer Zufallsgröße	67
4 Binomialverteilung	70
4.1 Bernoulli-Experiment, binomialverteilte Zufallsgrößen	70
4.2 Berechnungen mit dem Taschenrechner	72
4.3 Erwartungswert und Standardabweichung	74
5 Normalverteilung	75
5.1 Normalverteilte Zufallsgrößen	75
5.2 Erwartungswert und Standardabweichung	75
5.3 Wahrscheinlichkeiten als Flächeninhalte	77
5.4 Normalverteilung und Binomialverteilung im Vergleich	78
Stichwortverzeichnis	79

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur im Basisfach benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Durch den klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs, auch kurz vor dem Abitur.

- **Formeln** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen die Lerninhalte.
- Maßgeschnittene **Beispiele** verdeutlichen überall die Theorie. Sie sind durch das Symbol  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Allen Schülerinnen und Schülern wünschen wir eine gute Vorbereitung auf das Abitur und viel Erfolg bei der Prüfung!

Ihr Autorenteam

Attila Furdek, Matthias Benkeser, Diana Dragmann

Zahlreiche Beispielaufgaben mit vollständigen Lösungen für beide Teile der mündlichen Prüfung finden Sie im Buch „Abiturprüfung Baden-Württemberg, Mathematik Basisfach“ (Bestell-Nr. 85102).

Ausführliche Erläuterungen sowie viele weitere Übungsaufgaben finden Sie in den Abitur-Trainingsbänden:

- Abitur-Training Analysis (Bestell-Nr. 840068)
- Abitur-Training Analytische Geometrie (Bestell-Nr. 840078)
- Abitur-Training Stochastik (Bestell-Nr. 840088)

2.2 Ganzrationale Funktionen

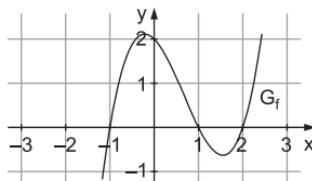
Unter einer ganzrationalen Funktion (oder Polynomfunktion) vom Grad n versteht man eine Funktion der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_n \neq 0.$$

Die Werte $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ heißen Koeffizienten.

Die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion können der Linearfaktorzerlegung entnommen werden (siehe auch Abschnitt 2.6).

 $f(x) = (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$
 $f(x) = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) = 0$
 Nullstellen bei $x = 2, x = -1$
 und $x = 1$



Wichtige Sonderfälle

Konstante Funktion:

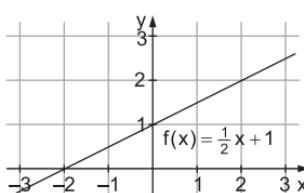
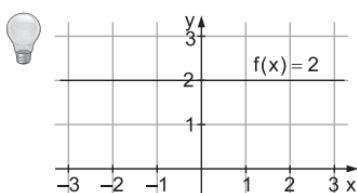
$$f(x) = c$$

Der Graph ist eine Parallele
zur x-Achse.

Lineare Funktion:

$$f(x) = mx + c$$

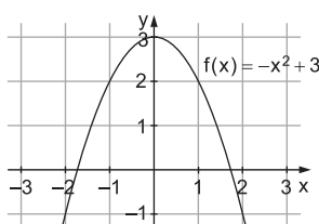
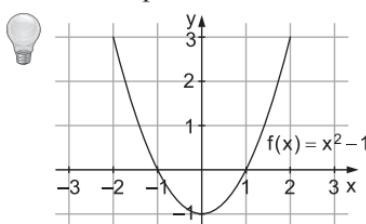
Der Graph ist eine Gerade.



Quadratische Funktion:

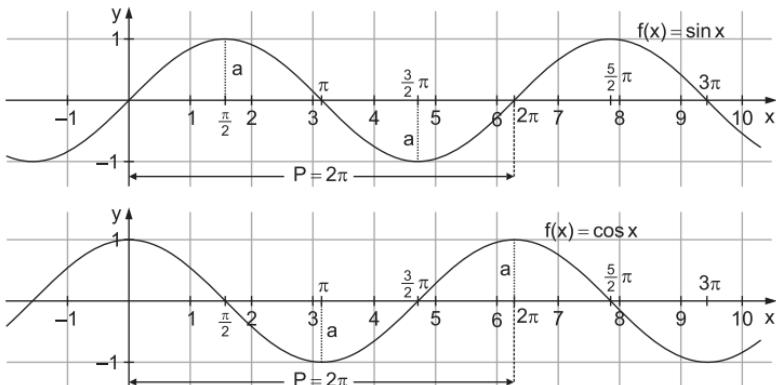
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Der Graph ist eine Parabel.



2.3 Sinus- und Kosinusfunktion (trigonometrische Funktionen)

Grundfunktionen $\sin x$ und $\cos x$



Für beide Funktionen gilt:

Die Periode beträgt 2π .

Der Abstand zwischen zwei benachbarten Nullstellen ist π .

Unter der allgemeinen Sinus- bzw. Kosinusfunktion versteht man Funktionen der Form

$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$
mit $a \neq 0, b \neq 0$.

Bedeutung der Parameter (siehe auch Abschnitt 2.5)

a: bestimmt die Amplitude

b: bestimmt die Periode: $P = \frac{2\pi}{|b|}$

c: Verschiebung entlang der x-Achse

d: Verschiebung entlang der y-Achse

Nullstellen

Es gilt:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow \dots, x = -2\pi, x = -\pi, x = 0, x = \pi, x = 2\pi, \dots$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow \dots, x = -\frac{3}{2}\pi, x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3}{2}\pi, \dots$$

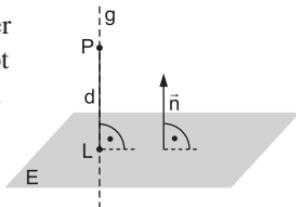
4 Abstände und Winkel

4.1 Abstand eines Punktes zu einer Ebene

Um den Abstand eines Punktes zu einer Ebene zu ermitteln, muss man das Lot von diesem Punkt auf die Ebene fällen.

Lotfußpunktverfahren

Der **Lotfußpunkt** L ist der Schnittpunkt der Lotgeraden g mit der Ebene, auf die das Lot gefällt wird. L ist der Ebenenpunkt mit dem kleinsten Abstand zum Punkt P. Dieser Abstand entspricht dem Abstand d des Punktes P zur Ebene E.



Vorgehensweise

Gegeben: Punkt P und Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Schritt 1: Gleichung der Lotgeraden g senkrecht zu E durch P aufstellen; der Normalenvektor der Ebene wird Richtungsvektor von g, der Punkt P wird Stützpunkt von g.

Schritt 2: Lotfußpunkt L als Schnittpunkt zwischen der Lotgeraden g und der Ebene E berechnen

Schritt 3: Abstand von P zu E als Abstand der Punkte P und L berechnen



Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P(7|2|5) von der Ebene E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$.

Schritt 1: Lotgerade g senkrecht zu E durch P

$$g: \bar{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Schnittpunkt von g und E (siehe Abschnitt 3.2)

$$2 \cdot (7 + 2t) - (2 - t) + 2 \cdot (5 + 2t) = 4$$

$$14 + 4t - 2 + t + 10 + 4t = 4$$

$$22 + 9t = 4$$

$$9t = -18$$

$$t = -2$$

3 Zufallsgrößen

3.1 Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **Zufallsgröße** ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Zahl zu. Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** einer Zufallsgröße X gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n die Zufallsgröße die möglichen Werte x_1, x_2, \dots, x_n annimmt; in Tabellenform:

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_n

Dabei muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten stets 1 ergeben:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Die Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch ein Histogramm erfolgen.



Bei einem gezinkten Würfel wird die Augenzahl 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 geworfen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X, die die Anzahl der Sechsen beim zweimaligen Werfen dieses Würfels angibt.

Für den gezinkten Würfel gilt: $P(6) = 0,3$; $P(\bar{6}) = 0,7$

Die Zufallsgröße X kann folgende Werte annehmen:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 2$$

Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Werte von X können mithilfe der Pfadregeln (siehe Abschnitt 2.3) ermittelt werden:

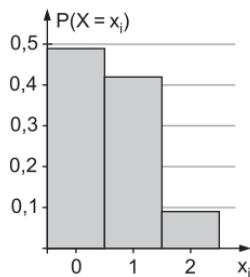
$$P(X=0) = P(\text{,,keine } 6\text{``}) = \underbrace{0,7}_{6} \cdot \underbrace{0,7}_{6} = 0,49$$

$$P(X=1) = \underbrace{0,3}_{6} \cdot \underbrace{0,7}_{6} + \underbrace{0,7}_{6} \cdot \underbrace{0,3}_{6} = 0,42$$

$$P(X=2) = \underbrace{0,3}_{6} \cdot \underbrace{0,3}_{6} = 0,09$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,49	0,42	0,09





© STARK Verlag

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK