Abit

MEHR ERFAHREN

Mathemati

Gymnasium

Baden-Württemberg

ab 2023

Das musst du können!

STARK

Inhalt

Analysis

Analytische Geometrie

Stochastik

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur im Leistungsfach benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Ein Großteil der Inhalte dieses Heftes wird auch im Pflichtteil abgefragt. Durch den klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen die Lerninhalte.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch das Symbol gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

STARK Verlag

Ausführliche Erläuterungen sowie viele Übungsaufgaben finden Sie in unseren Abitur-Trainingsbänden:

- Abitur-Training Analysis (Bestell-Nr. 840068)
- Abitur-Training Analytische Geometrie (Bestell-Nr. 840078)
- Abitur-Training Stochastik (Bestell-Nr. 840088)

Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre und weitere Übungsaufgaben für die Prüfung mit vollständigen Lösungen enthält das Buch „Abiturprüfung Baden-Württemberg, Mathematik Leistungsfach“.

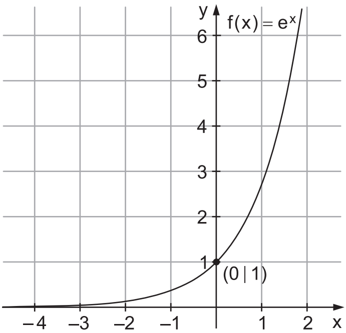
2.4 Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion

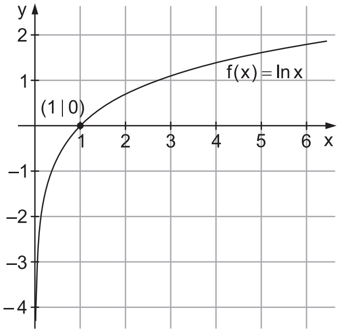
Natürliche Exponentialfunktion

- Die natürliche Exponentialfunktion lautet $f(x) = e^x$.
- Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
  Wertemenge: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$ ($e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$)
- Die e-Funktion hat keine Nullstellen.
- Wichtige Grenzwerte:
  $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ ($y = 0$ ist waagerechte Asymptote) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Natürliche Logarithmusfunktion

- Die natürliche Logarithmusfunktion lautet $f(x) = \ln x$.
- Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$
  Wertemenge: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$
- Die ln-Funktion hat eine Nullstelle bei $x = 1$.
- Wichtige Grenzwerte:
  $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ ($x = 0$ ist senkrechte Asymptote) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$





Die natürliche Exponential- und die natürliche Logarithmusfunktion sind Umkehrfunktionen voneinander (vgl. Abschnitt 2.9).

1. Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion $f(x) = (x+1) \cdot e^x$; $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+1) \cdot e^x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x + 1 = 0 \qquad \text{da } e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1 \end{aligned}$$

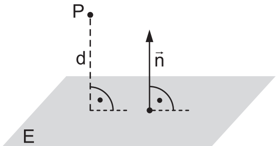
5 Abstände zwischen geometrischen Objekten

5.1 Abstand zu einer Ebene

Abstand Punkt – Ebene

Der Abstand des Punktes $P(p_1|p_2|p_3)$ zur Ebene $E\colon n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = a$ kann mithilfe der HNF von E ermittelt werden (vgl. Abschnitt 3.5):

$$d(P; E) = \frac{|n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - a|}{|\vec{n}|}$$

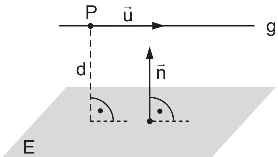


Die Berechnung des Abstands einer Geraden zu einer parallel verlaufenden Ebene bzw. zweier paralleler Ebenen lässt sich jeweils zurückführen auf die Berechnung des Abstands eines Punktes zu einer Ebene.

Abstand Gerade – Ebene

Der Abstand einer zur Ebene E parallel verlaufenden Geraden g zur Ebene E entspricht dem Abstand eines beliebigen Punktes P der Geraden zur Ebene:

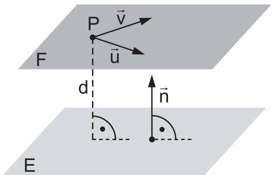
$d(g; E) = d(P; E)$ mit $P \in g$ beliebig



Abstand Ebene – Ebene

Der Abstand einer zur Ebene E parallel verlaufenden Ebene F zur Ebene E entspricht dem Abstand eines beliebigen Punktes P der Ebene F zur Ebene E:

$d(F; E) = d(P; E)$ mit $P \in F$ beliebig



Berechnen Sie den Abstand der beiden parallelen Ebenen

$E_1\colon -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -9$ und $E_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$; $s, t \in \mathbb{R}$.

Der Abstand der parallelen Ebenen entspricht dem Abstand des Stützpunktes $P(1|2|4)$ der Ebene E_2 zur Ebene E_1:

$$d(E_2; E_1) = d(P; E_1) = \frac{|-2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 4 + 9|}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|15|}{\sqrt{9}} = \frac{15}{3} = 5$$

3 Zufallsgrößen

3.1 Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **Zufallsgröße** ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zu.
Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** einer Zufallsgröße X gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Zufallsgröße die möglichen Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ annimmt; in Tabellenform:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Dabei muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten stets 1 ergeben:
$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ (Normierungsbedingung)
Die Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch ein Stabdiagramm oder ein Histogramm erfolgen.

Vorgehensweise
Schritt 1: Werte, die die Zufallsgröße X annehmen kann, auflisten

Schritt 2: Zugehörige Wahrscheinlichkeiten berechnen

Schritt 3: Tabelle und ggf. Stabdiagramm bzw. Histogramm erstellen

Bei einem gezinkten Würfel wird die Augenzahl 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 geworfen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X, die die Anzahl der Sechser beim zweimaligen Werfen dieses Würfels angibt.

Schritt 1:
Die Zufallsgröße X kann folgende Werte annehmen:
$x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 2$
Schritt 2:
Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Werte von X können mithilfe der Bernoulli-Formel (vgl. S. 64) ermittelt werden:

$$P(X = x_1) = P(X = 0) = P(\text{„keine 6“}) = \binom{2}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}7^2 = 0{,}49$$

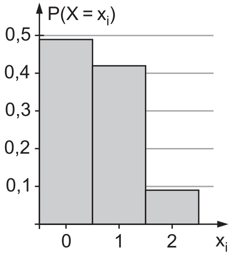
$$P(X = 1) = \binom{2}{1} \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^1 = 0{,}42 \qquad P(X = 2) = \binom{2}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^0 = 0{,}09$$

Schritt 3:

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,49	0,42	0,09

Histogramm:



3.2 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X gibt an, welcher Mittelwert bei oftmaliger Wiederholung des Zufallsexperiments zu erwarten ist.

$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n) = x_1 \cdot p_1 + \ldots + x_n \cdot p_n$

Varianz und Standardabweichung

Die Varianz und die Standardabweichung einer Zufallsgröße X erfassen die Streuung der Werte um den Erwartungswert von X.

$Var(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + \ldots + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n$

$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

Bemerkungen:

- Der Erwartungswert μ einer Zufallsgröße X ist häufig kein Wert, den die Zufallsgröße tatsächlich annimmt.
- Ein Spiel ist **fair**, wenn der Erwartungswert des Gewinns für jeden Spieler gleich null ist.

Ein Englischlehrer stellt für die Notenverteilung der nächsten Schulaufgabe zwei mögliche Szenarien gegenüber.

Szenario A

Note x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,1	0,15	0,5	0,2	0	0,05