GYMNASIUM

SCHULAUF

MEHR ERFAHREN

Mathematik 9. K

Bayern

Carlo Vöst

passend zu LehrplanPLUS

STARK

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Mit diesem Heft kannst du dich ideal auf die Schul- und Stegreifaufgaben am Gymnasium vorbereiten. Alle Schul- und Stegreifaufgaben richten sich inhaltlich nach dem neuen LehrplanPlus.

Wenn du eine Schulaufgabe oder Stegreifaufgabe gelöst hast, kannst du deine Rechenschritte mit denen im Lösungsheft vergleichen. Damit du deine Leistung auch richtig einschätzen kannst, gibt es in diesem Heft zu jeder Aufgabe weitere Hinweise: Im Angabenteil findest du die Punkte der einzelnen Teilaufgaben und einen Notenschlüssel. Im Lösungsheft ist der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben angegeben und die Zeitangaben verraten dir, wie lange du ungefähr zum Lösen einer Teilaufgabe brauchen darfst. Die Gesamtzeitangabe für jede Schul- und Stegreifaufgabe ist die Summe der Zeitangaben für die einzelnen Aufgaben plus ein paar zusätzliche Minuten für ein abschließendes „Kontrolllesen".

Viel Erfolg bei deinen Schulaufgaben!

Carlo Vöst

Inhaltsverzeichnis

Zeichenerklärung

Zeitangabe   Leichte Aufgabe   Mittelschwere Aufgabe   Schwere Aufgabe

Stegreifaufgabe 3

Inhalte: Quadratische Funktionen

Zeitbedarf: 20 Minuten

1. Gegeben ist die Funktion f durch: f: $x \mapsto (x+4)^2 - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Die zu f gehörige Parabel wird mit G_f bezeichnet.

Ergänze zu wahren Aussagen (evtl. Nebenrechnungen beifügen).

a) G_f ergibt sich aus der Normalparabel ($y = x^2$) durch ________________________ um ________________________ und um ________________________. ___ von 2

b) Die Nullstellen von f sind x_1 = ____________ und x_2 = ____________. ___ von 2

c) G_f ist streng monoton steigend in ________________ und streng monoton fallend in ________________. ___ von 1

d) Die Wertemenge der Funktion f ist ________________________. ___ von 1

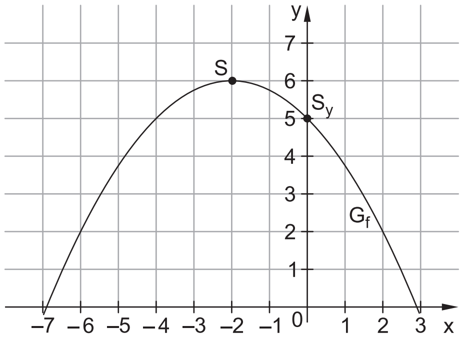
e) G_f ist achsensymmetrisch zur ____ durch den Punkt _________. ___ von 2

f) Der Punkt P(–1,5 | ______) liegt auf G_f. ___ von 2

g) Der Graph der Funktion g, gegeben durch g: $x \mapsto x^2 - 8x + 17$, $x \in \mathbb{R}$, geht aus G_f hervor durch ____ und ____. ___ von 3

Für Nebenrechnungen:

2. Rechts ist der Graph einer Funktion f abgebildet.



5

a) Bestimme die Funktionsgleichung von f durch Ablesen der Koordinaten der eingetragenen Punkte in der „Normalform“ $f(x) = ax^2 + bx + c$.

___ von 5

b) Berechne die Nullstellen.

___ von 4

Notenschlüssel

1	2	3	4	5	6
22–19	18,5–15,5	15–12	11,5–8	7,5–4	3,5–0

So lange habe ich gebraucht: ______________

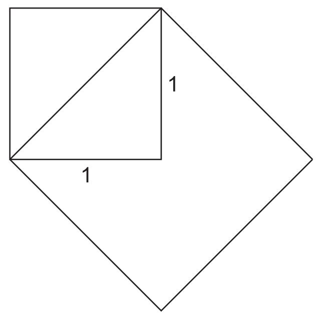
So viele Punkte habe ich erreicht: ______________

Schulaufgabe 1

Inhalte: Quadratwurzeln, Beweise, quadratische Funktionen

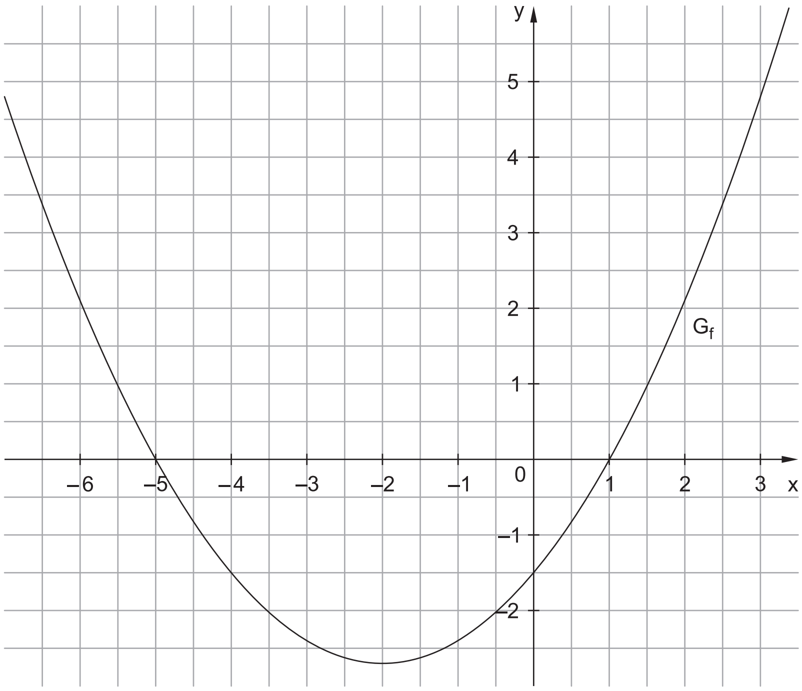
Zeitbedarf: 45 Minuten

1. Erkläre anhand der abgebildeten Skizze, wie man geometrisch plausibel machen kann, dass die Zahl $\sqrt{2}$ existieren muss. ___ von 7



2. Beweise, dass die Gleichung $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ keine Lösung hat, dass also damit $\sqrt{2}$ irrational sein muss. ___ von 10

3. Nachfolgend ist der Graph G_f einer quadratischen Funktion f abgebildet. 7



a) Lies die Achsenschnittpunkte ab und bestimme aus diesen Werten den Funktionsterm f(x) der Funktion f in der sogenannten „allgemeinen Form“. ___ von 6

b) Ermittle rechnerisch die Scheitelkoordinaten und vergleiche diese mit der Zeichnung. ___ von 5

c) In der allgemeinen Form der Funktionsgleichung ist hier: $a = 0{,}3$; $b = 1{,}2$; $c = -1{,}5$. ___ von 9

Gib jeweils eine Funktion an, die keine Nullstellen hat und
(1) den gleichen a-Wert und x-Wert des Scheitels,
(2) den gleichen Scheitel,
(3) den gleichen y-Achsen-Schnittpunkt
hat.

4. Vereinfache folgende Terme so weit wie möglich. Verlangt ist jeweils eine nachvollziehbare, schrittweise Berechnung.

a) $(5\sqrt{6} - 2\sqrt{3})(\sqrt{3^3} + 7\sqrt{6})$ ___ von 5

b) $\sqrt{\frac{25}{16} + \frac{4}{9}}$ ___ von 4

Notenschlüssel

1	2	3	4	5	6
46–39	38,5–31,5	31–24	23,5–16,5	16–8,5	8–0

So lange habe ich gebraucht: ______________

So viele Punkte habe ich erreicht: ______________

1. a) 2 Minuten,

G_f ergibt sich aus der Normalparabel ($y = x^2$) durch **Verschiebung** um **4 Einheiten nach links** und um **3 Einheiten nach unten**.

b) 2 Minuten,

Die Nullstellen von f sind $x_1 = \sqrt{3} - 4$ und $x_2 = -\sqrt{3} - 4$.

Nebenrechnung:

$(x+4)^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+4)^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x + 4 = \pm\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{3} - 4$

c) 1 Minute,

G_f ist streng monoton steigend in $]-4; \infty[$ und streng monoton fallend in $]-\infty; -4[$.

d) 1 Minute,

Die Wertemenge der Funktion f ist $[-3; \infty[$ (Alternative: $\{y \mid y \geq -3\}$).

e) 2 Minuten,

G_f ist achsensymmetrisch zur **Parallelen zur y-Achse** durch den Punkt **S(–4|–3)**.

Anmerkung: Es sind sämtliche Punkte $S(-4 \mid y)$ mit $y \in \mathbb{R}$ möglich. Wichtig ist –4 als x-Koordinate.

f) 1 Minute,

Der Punkt **P(–1,5|3,25)** liegt auf G_f.

Nebenrechnung:

$f(-1{,}5) = (-1{,}5 + 4)^2 - 3 = 2{,}5^2 - 3 = 3{,}25$

g) 3 Minuten,

Der Graph der Funktion g, gegeben durch $g\colon x \mapsto x^2 - 8x + 17,\ x \in \mathbb{R}$, geht aus G_f hervor durch **Verschiebung um 8 Einheiten nach rechts** und **um 4 Einheiten nach oben**.

Nebenrechnung:

$x^2 - 8x + 17 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 17 = (x-4)^2 + 1$

2. a) 4 Minuten,

$S(-2 \mid 6) \in G_f$: $f(x) = a \cdot (x+2)^2 + 6$

$S_y(0 \mid 5) \in G_f$: $5 = a \cdot (0+2)^2 + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 4a = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{4}$

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 6 = -\frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4) + 6$$
$$= -\frac{1}{4}x^2 - x - 1 + 6 = -\frac{1}{4}x^2 - x + 5$$

b) 3 Minuten,

Nullstellen:

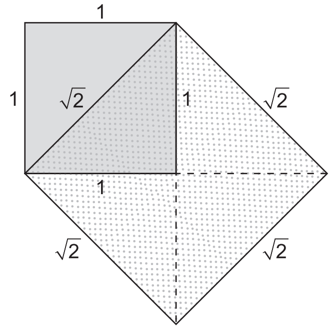
$$f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4}(x+2)^2 = -6 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)^2 = 24$$

$$x + 2 = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$$

$$x_1 = 2\sqrt{6} - 2; \; x_2 = -2\sqrt{6} - 2$$

1. 6 Minuten,

Wenn man aus der Diagonale des Quadrates mit der Seitenlänge 1 (grau) ein neues Quadrat (gepunktet) bildet, dann hat dieses den doppelten Flächeninhalt des grauen Quadrates, also $2 \cdot 1 = 2$, weil es aus vier halben grauen Quadraten besteht.
Demnach muss das gepunktete Quadrat eine Seite mit einer Länge, deren Wert im Quadrat 2 ergibt, haben.
Damit ist geometrisch plausibel gemacht, dass es eine Zahl wie $\sqrt{2}$ geben muss.



2. 10 Minuten,

Behauptung: Die Gleichung $x^2 = 2$ hat in $\mathbb{Q}$ keine Lösung.

Beweis
Annahme: Es gibt eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$, die quadriert 2 ergibt.

Also: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, wobei $\frac{p}{q}$ vollständig gekürzt ist.

$\Leftrightarrow \quad p^2 = 2 \cdot q^2 \quad \Rightarrow \quad p^2$ ist durch 2 teilbar. $\Rightarrow$ p ist durch 2 teilbar (gerade).
Wäre p nicht durch 2 teilbar, dann müsste es zwingend ungerade sein. Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist aber wieder stets ungerade, sodass ein Widerspruch zu „$p^2 = \text{gerade}$“ entstünde.

$p = 2 \cdot k$ eingesetzt in die Ausgangsgleichung folgt:

$4k^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad 2k^2 = q^2 \quad \Rightarrow \quad q^2$ ist durch 2 teilbar $\Rightarrow$ q ist durch 2 teilbar.

Dies kann aber nicht sein, da nicht p und q durch 2 teilbar sein können, dann könnte man ja wieder entsprechend kürzen. Also muss die Annahme falsch gewesen sein und keine rationale Zahl ergibt quadriert 2, also ist $\sqrt{2}$ irrational.

3. a) 6 Minuten,

Abgelesene Achsenschnittpunkte: $N_1(-5|0)$, $N_2(1|0)$, $S_y(0|-1{,}5)$

Nullstellenform von f(x):
$f(x) = a \cdot (x - (-5)) \cdot (x - 1) = a \cdot (x + 5) \cdot (x - 1)$

$S_y \in G_f: f(0) = -1{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 5 \cdot (-1) = -1{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0{,}3$

Es folgt:
$f(x) = 0{,}3 \cdot (x + 5)(x - 1)$ (Nullstellenform)
$f(x) = 0{,}3 \cdot (x^2 - x + 5x - 5) = 0{,}3x^2 + 1{,}2x - 1{,}5$ (allgemeine Form)

b) 4 Minuten,

$$
\begin{aligned}
0{,}3x^2+1{,}2x-1{,}5 &= 0{,}3\cdot[x^2+4x-5] \\
&= 0{,}3\cdot[x^2+4x+4-4-5] \\
&= 0{,}3\cdot[(x+2)^2-9] \\
&= 0{,}3\cdot(x+2)^2-2{,}7
\end{aligned}
$$

Also ist der Scheitel S(–2|–2,7). Das stimmt mit der Zeichnung überein.

c) 8 Minuten,

(1) z. B.: $g(x)=0{,}3\cdot(x+2)^2+1$ $(=0{,}3x^2+1{,}2x+2{,}2)$
Die Parabel ist nach oben geöffnet und der Scheitel hat eine positive y-Koordinate.

(2) z. B.: $h(x)=-0{,}3(x+2)^2-2{,}7$ $(=-0{,}3x^2-1{,}2x-3{,}9)$
Die Parabel ist nach unten geöffnet und der Scheitel hat eine negative y-Koordinate.

(3) z. B.: $i(x)=-x^2+x-1{,}5=-[x^2-x+0{,}25+1{,}25]=-(x-0{,}5)^2-1{,}25$
Die Parabel ist nach unten geöffnet und der Scheitel hat eine negative y-Koordinate.

Hinweis: Es genügt jeweils die Angabe einer Gleichung (egal welche Form) ohne Erklärung.

4. a) 5 Minuten,

$$
\begin{aligned}
(5\sqrt{6}-2\sqrt{3})(\sqrt{3^3}+7\sqrt{6}) &= (5\sqrt{6}-2\sqrt{3})(3\sqrt{3}+7\sqrt{6}) \\
&= 15\sqrt{18}+35\sqrt{36}-6\sqrt{9}-14\sqrt{18} \\
&= 15\sqrt{18}+210-18-14\sqrt{18} \\
&= \sqrt{18}+192 = 3\sqrt{2}+192 = 3(\sqrt{2}+64)
\end{aligned}
$$

b) 3 Minuten,

$$\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{225+64}{144}}=\sqrt{\frac{289}{144}}=\frac{17}{12}$$