

Kate Kitagawa und Timothy Revell
Die großen Unbekannten der Mathematik



KATE KITAGAWA
TIMOTHY REVELL

DIE GROSSEN UNBEKANNTEN DER MATHEMATIK

WARUM DIE GESCHICHTE DER
MATHEMATIK ÄLTER, ÖSTLICHER UND
WEIBLICHER IST, ALS WIR GLAUBEN

Aus dem Englischen
von Nastasja S. Dresler

GOLDMANN

Die englische Originalausgabe erschien 2023 unter dem Titel *The Secret Lives of Numbers* bei Viking, einem Verlag der Penguin General.
Penguin General ist Teil der Penguin Random House Verlagsgruppe.

Der Verlag behält sich die Verwertung der urheberrechtlich geschützten Inhalte dieses Werkes für Zwecke des Text- und Data-Minings nach § 44 b UrhG ausdrücklich vor.
Jegliche unbefugte Nutzung ist hiermit ausgeschlossen.



Penguin Random House Verlagsgruppe FSC® N001967

1. Auflage

Deutsche Erstausgabe Oktober 2023

Copyright © Kate Kitagawa and Timothy Revell, 2023

Copyright © 2023 der deutschsprachigen Ausgabe:

Wilhelm Goldmann Verlag, München,

in der Penguin Random House Verlagsgruppe GmbH,

Neumarkter Str. 28, 81673 München

Umschlag: Uno Werbeagentur, München

Umschlagmotiv: FinePic®, München

Redaktion: Regina Carstensen

Satz: Uhl + Massopust, Aalen

Druck und Bindung: GGP Media GmbH, Pößneck

Printed in Germany

SB · CF

ISBN 978-3-442- 31684-7

www.goldmann-verlag.de

INHALT

Vorwort	7
1 Am Anfang	15
2 Die Schildkröte und der Kaiser	33
3 Eine Stadt namens Alex	62
4 Der Anbruch der Zeit	83
5 Über die Ursprünge der Null	103
6 Das Haus der Weisheit	126
7 Der unmögliche Traum	145
8 Die (ersten) Pioniere der Infinitesimalrechnung	164
9 Newtonismus für Damen	193
10 Eine große Synthese	217
11 Die mathematische Meerjungfrau	236
12 Revolutionen	262
13 =	286
14 Sterne kartieren	303
15 Codes entschlüsseln	321
Epilog	349
Danksagung	365
Quellenverzeichnis	369
Bildnachweis	377
Weiterführende Literatur	381
Stichwortverzeichnis/Personenverzeichnis	393/397

VORWORT

In einer Szene des US-amerikanischen Politdramas *The West Wing – Im Zentrum der Macht* starren zwei hochrangige Regierungsmitarbeiter ungläubig auf die Folie einer Präsentation. Eine Gruppe von Kartografen versucht zu erklären, dass die Weltkarte, wie sie sie ihr ganzes Leben lang gekannt und auf die sie vertraut haben, nur eine unter vielen ist. »Wollen Sie damit sagen, dass die Karte falsch ist?«, fragt ein Berater fassungslos.

Keine Karte unseres Planeten fällt wirklich ganz genau aus: Das ist schlichtweg mathematisch nicht möglich. Die Oberfläche einer Kugel lässt sich nicht ohne Verzerrungen auf eine zweidimensionale Zeichnung übertragen. Doch wie die Kartografen erklären, vermittelt diejenige Karte, die sie betrachten, eine eurozentrische Sicht auf die Welt. Europa scheint größer zu sein als Südamerika, aber in Wirklichkeit ist Südamerika doppelt so groß. Deutschland liegt auf der Karte in der Mitte, obwohl es sich eigentlich im nördlichsten Viertel der Erde befindet. Es ist ein gänzlich verfälschtes Bild von der Welt.

Gezeichnet wurde ebenjene Karte von dem flämischen Kartografen Gerardus Mercator im 16. Jahrhundert. Sie war ursprünglich für Seeleute gedacht, und nicht für politische Strategen, die geopolitische Erwägungen anstellten. Sie wurde über Generationen hinweg weitergegeben und hat Menschen auf der ganzen Welt den Eindruck vermittelt, dass die Welt tatsächlich genau so aussähe, und nicht, dass es sich hierbei nur um eine Sichtweise handelt.



Die Mercator-Projektion.

Die Geschichte der Mathematik verläuft ähnlich. Obwohl ihr der Ruf vorausseilt, ein Studium grundlegender Wahrheiten, kühler solider Berechnungen und unwiderlegbarer Beweise zu sein, ist die Mathematik den mächtigen Personen und Strukturen, die Wahrheit und Wissen modelliert haben, nicht entronnen. Ganz im Gegenteil: Die Geschichte der Mathematik hat über Jahrtausende hinweg Vorurteile angehäuft – von der Art und Weise, wie wir bestimmten mathematischen Grundlagen und Mathematikern selbst huldigen, bis hin zu den Geschichten, die über ihre Ursprünge kolportiert werden. Es ist an der Zeit, dieses Muster einer Revision zu unterziehen und die Geschichte neu zu erzählen.

Als wir, Kate und Timothy, uns das erste Mal getroffen

haben, um ein gemeinsames Buchprojekt zu besprechen, konnten wir nicht ahnen, wohin dies führen würde. Bei einer Tasse Tee in einer Buchhandlung in Charing Cross, London, sprachen wir über unsere gemeinsame Liebe zur Mathematik und darüber, dass wir eine leicht zugängliche Geschichte des Fachs schreiben sollten. Da wir uns auf Kates Fachwissen als Mathematikhistorikerin und Timothys mathematische und journalistische Qualifikationen berufen konnten, dachten wir, dass es ein leichtes Unterfangen werden würde.

Wir haben uns geirrt. Je mehr wir uns mit der Geschichte der Mathematik auseinandersetzten, desto mehr fanden wir heraus, wie diese verzerrt worden war. Und umso mehr sahen wir uns dazu veranlasst, dem etwas entgegenzusetzen.

Die Ursprünge der Mathematik sind äußerst vielfältig. Ihre Ideen sind keineswegs nur einem Ort entsprungen, sondern wurden im Laufe der Geschichte immer wieder abgewandelt, was aufzeigt, wie stark doch die menschliche Neigung zum Denken ausgeprägt ist. Ideen ignorieren oft nationale Grenzen, und so hat sich die Mathematik über Handelswege und kulturellen Austausch von einem Ort zum anderen verbreitet. Der Fortschritt der Mathematik verläuft allerdings nicht linear. Sie hat sich vorwärts und rückwärts bewegt, ist um den Planeten gesprungen, hat sich auf abenteuerliche Tangenten begeben und ist manchmal in Sackgassen geraten. Und dadurch wird sie umso reicher. Trotz ihres Rufs, sich logisch weiterzuentwickeln, ist die Mathematik eine weitaus chaotischere Angelegenheit.

Dabei wird die Geschichte der Mathematik so üblicherweise natürlich nicht erzählt. Die alten Griechen werden auf ein Podest gestellt, als wären sie in irgendeiner Weise die Urheber der modernen Mathematik, dabei stammt so vieles von dem, was heute in unser weltumspannendes Wissen einfließt, ebenso

aus vielen anderen Regionen, wie dem alten China, Indien und der arabischen Halbinsel. Diese Annahme, dass die europäische Art, Dinge zu tun, überlegen ist, hat ihren Ursprung nicht in der Mathematik – sie ist das Ergebnis des jahrhundertelangen westlichen Imperialismus –, aber sie hat diese gleichermaßen durchdrungen. Die Mathematik außerhalb des antiken Griechenlands wird oft als »Ethnomathematik« abgetan, als ob es sich um ein separates Fach handelte, eine Nebengeschichte zur eigentlichen Geschichte.

Während wir uns durch die Jahrtausende der Mathematik gearbeitet haben, wurde fast alles, was wir zu wissen glaubten, auf die eine oder andere Weise infrage gestellt. Manche bekannten Geschichten entpuppten sich als falsche Darstellungen und andere als komplette Erfindungen, und viele Mathematiker und ihre Beiträge wurden zu Unrecht aus der Geschichte ausgeschlossen. Auf den folgenden Seiten werden wir einige der Pfade aufzeigen, auf denen die Geschichte der Mathematik verzerrt wurde. Die wahre Geschichte ist die eines weltumspannenden Unternehmens. In der Mathematik geht es um Ideen und darum, Wege zu sondieren, diese bis in letzter Konsequenz zu durchdenken. Die Vielfalt des Denkens ist in der Mathematik nicht nur wichtig, sie ist grundlegend.

Denken Sie nur an die Infinitesimalrechnung. Diese mathematische Theorie zur Beschreibung und Bestimmung, wie sich Dinge im Laufe der Zeit verändern, ist eine der nützlichsten Errungenschaften der Menschheitsgeschichte. Sie ist für technische Konstruktionen von wesentlicher Bedeutung – ohne sie könnten wir keine Brücken oder Raketen bauen –, und sie findet in fast allen wissenschaftlichen Disziplinen Anwendung, um die Welt besser zu verstehen. Viele Aspekte unseres heutigen Lebens wären ohne sie nicht möglich.

Wem gebührt also das Verdienst? Die gängige Variante der

Geschichte lautet, dass Isaac Newton, ein englischer Mathematiker, und Gottfried Wilhelm Leibniz, ein deutscher Mathematiker, etwa zeitgleich im 17. Jahrhundert unabhängig voneinander ihre eigenen Versionen der Infinitesimalrechnung entwickelt haben. Das stimmt soweit auch, aber sich auf diesen Wissensstand allein zu berufen, ist in etwa so, als würde man Mercators Karte betrachten – es handelt sich um eine verzerrte Sichtweise. Die Ideen, die der Infinitesimalrechnung zugrunde liegen, entstanden schon viel früher.

Im 14. Jahrhundert wurde eine Schule in Kerala, Indien, zum Schmelztiegel für Mathematiker. Ihr Gründer, Madhava von Sangamagrama, war ein brillanter Mathematiker des Mittelalters, zu dessen Leistungen auch die Beschreibung einer Theorie der Infinitesimalrechnung gehört. Er erforschte die Schlüsselideen, die die Infinitesimalrechnung möglich machen, und die dann von den nachfolgenden Mathematikern der Schule von Kerala ausgefeilt wurden. Diese Theorie war weder vollständig noch perfekt, aber das ist bei etwas Neuem immer der Fall. Viele der ersten Glühbirnen brannten aufgrund von Konstruktionsfehlern zu schnell durch und das Glas wurde schwarz, aber der US-amerikanische Unternehmer Thomas Edison wird immer noch zu Recht als deren Erfinder im 19. Jahrhundert anerkannt. Es ist an der Zeit, dass wir auch Madhava anerkennen.

In der Geschichte der Mathematik stehen die Ideen im Vordergrund, aber man kann sie nicht von den Menschen trennen, die diese gehabt haben. Um die Ursprünge der Mathematik wirklich und wahrhaftig darzustellen, müssen wir auch die Herkunft der Mathematiker in den Blick nehmen – und Mathematiker:*innen* Einige der in diesem Buch vorkommenden Personen waren nicht nur beeindruckende Mathematiker:*innen*, sondern haben auch Hürden niedergeworfen und dazu beigetragen, die Mathematik zu einem inklu-

siven und globalen Fach zu machen. Im Folgenden rücken wir diese vergessenen Mathematiker:innen stärker in den Vordergrund und erklären, wo sie ihren Platz in der traditionellen Geschichte finden sollten, und korrigieren Unwahrheiten und falsche Darstellungen über sie. Bedeutende Menschen, die nicht in das gängige Bild eines Mathematikers passten, wurden nicht nur zu Lebzeiten unterdrückt, sondern waren seither immer wieder dem Angriff von Historikern und Kommentatoren ausgesetzt.

Schauen wir uns nur einmal Sophie Kowalewski an, die 1850, kurz vor dem Krimkrieg, in Moskau geboren wurde.* Ihr ganzes Leben lang hat man sie immerzu entmutigt und ihr verboten, sich mit Mathematik zu beschäftigen. Ihr Vater verweigerte ihr den Zugang zu einer angemessenen Ausbildung, da er der Meinung war, dass eine Tochter, die eine gelehrte Frau war, ihm Schande bereiten würde. Solche Ansichten waren zu dieser Zeit weit verbreitet. Sie widmete sich der Mathematik nichtsdestotrotz und legte Arbeiten vor, die ohne Weiteres für einen Dokortitel ausgereicht hätten. Doch wegen ihres Geschlechts ließen viele Universitäten sie nicht zu der notwendigen Prüfung zu, um einen solchen Titel zu erwerben.

Aufgrund ihrer außerordentlichen Entschlossenheit gelang es Kowalewski dann schließlich doch, eine Stelle an der Universität Stockholm zu erhalten und die weltweit erste Mathematikprofessorin zu werden. Doch ihre Professur war unbezahlt – sie musste von ihren Studenten persönlich Geld einsammeln, um ihr Auskommen zu sichern. Einigen Leute missfiel, dass sie überhaupt eine solche Position erlangt hatte. Der berühmte

* Für Kowalewskis Namen gibt es verschiedene Schreibweisen. In ihren akademischen Veröffentlichungen verwendete sie meist »Sophie Kowalewski«, weshalb auch wir uns für diese Variante entschieden haben.

schwedische Dramatiker August Strindberg bezeichnete die Idee einer weiblichen Professorin als eine »gefährliche und unerfreuliche Erscheinung«.¹

Nach ihrem Tod wurde Kowalewskis Vermächtnis von einigen Biografen entstellt, die sich viel öfter auf Geschlechterstereotypen beriefen, um ihre Geschichte zu erzählen, anstatt die Tatsachen ihres Lebens wiederzugeben. Sie war eine außergewöhnliche Mathematikerin, wurde jedoch als eine Art *Femme fatale* dargestellt, die sich auf ihr Aussehen und ihren Charme verließ, um voranzukommen, obwohl es hierfür kaum Beweise gibt. Es ist an der Zeit, verunglimpfenden Narrativen wie dem von Kowalewski ein Ende zu bereiten.

Wir sind der Überzeugung, dass diese Nacherzählung der Geschichte der Mathematik von Wichtigkeit ist, aber wir hoffen, dass sie mehr sein wird als das. Die Mathematik ist seit Jahrtausenden voll von faszinierenden Charakteren. Sie ist ein Fach auf der Suche nach der Wahrheit, nach augenöffnenden Denkweisen und Theoremen, um Sie in Erstaunen zu versetzen. Es ist keine leidenschaftslose, sondern eine kreative Suche. Wie Kowalewski einmal sagte: »Sie ist eine Wissenschaft, die gehörig viel Vorstellungskraft erfordert.«² Die Historie der Mathematik ist eine unübersehbare Saga von größtem Format.

Kein Buch allein kann alles Unrichtige berichtigen oder die Geschichte wirklich vollumfänglich rekapitulieren, aber so wie eine neue Karte unsere Sicht auf die Welt verändern kann, kann dies auch eine neue Geschichtsversion. In unserem Buch erzählen wir die Historie der Mathematik so, wie sie wirklich ist – herrlich chaotisch und kollaborativ. Die Mathematik von heute ist eine beeindruckende Verschmelzung von Konzeptionen aus aller Welt, die von einer Gruppe mathematischer Grenzgänger vorgebracht wurden, von Menschen, die

sich über die Einschränkungen hinweggesetzt haben, die ihnen die Gesellschaft aufgrund ihrer Ethnie, ihres Geschlechts und ihrer Nationalität auferlegt hat. Die Mathematik ist ein Fach mit einer ereignisreichen und vielfältigen Geschichte. Es ist an der Zeit, sie zu erzählen.

1 AM ANFANG

Unsere Spezies, der *Homo sapiens*, existiert seit 300 000 Jahren, aber soweit wir wissen, ist die Mathematik eine relativ junge Erfindung. Viele Artefakte sind verloren gegangen oder schlichtweg nicht mehr erhalten, sodass wir nur ein unvollständiges Bild vorliegen haben. Die ersten Spuren menschlicher mathematischer Aktivitäten tauchen vor etwa 20 000 Jahren auf, und zwar in Form von eingeritzten Strichzeichen auf Tierknochen.

Einer der ältesten und berühmtesten ist der Ishango-Knochen, der an der Grenze zwischen dem heutigen Uganda und der Demokratischen Republik Kongo gefunden wurde und aus der Zeit zwischen 20 000 und 18 000 v. Chr. stammt. Bei dem Knochen handelt es sich wahrscheinlich um das Wadenbein eines Pavians, er könnte aber auch von einem Wolf oder einem vergleichbar großen Tier stammen. An der Spitze des Knochens ist ein Quarzstück befestigt, was auf seine Verwendung als Werkzeug hinweist. Über die gesamte Längsseite hinweg verlaufen drei Spalten, die voller Striche sind. Die Einkerbungen könnten einfach dazu gedient haben, das Werkzeug zu greifen, aber es könnte auch mehr dahinterstecken.

Die Summe der Markierungen in der ersten Spalte ergibt 48, die Markierungen in der zweiten und dritten Spalte wiederum ergeben 60. Jede der Spalten erscheint in verschiedenen Abschnitten, wobei der dritte am interessantesten ist. Die 60 Einkerbungen dort finden sich in die Gruppen 11, 13, 17 und



Ishango-Knochen (Vorder- und Rückseite).

19 aufgeteilt. Hierbei handelt es sich um Primzahlen – Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind. Primzahlen gehören zweifelsohne zu den wichtigsten Zahlen der Mathematik. Wie spätere Mathematiker:innen entdecken werden, bilden sie die Bausteine aller anderen Zahlen. Sie hier zu sehen, auf einer mehr als 20 000 Jahre alten Schnitzarbeit, ist, als würde man eine Botschaft von einem Außerirdischen empfangen. Es ist aufregend und überraschend – aber es ist genauso schwierig zu ermitteln, was es genau zu bedeuten hat.

Die mathematischen Muster könnten sich rein zufällig ergeben haben, aber sie könnten auch die numerische Raffinesse unserer alten Vorfahren aufzeigen. Die Zahlen 48 und 60 ergeben sich aus 4×12 beziehungsweise 5×12 , was darauf hindeutet, dass die Menschen, die die Gravuren vorgenommen haben, über ein Zahlensystem verfügt haben, das auf der Zahl 12 basierte (und nicht auf der 10, wie es bei uns heute gebräuchlich ist). Eines der frühesten Zahlensysteme, die wir

kennen, war wiederum auf der 60 aufgebaut, sodass diese Deutung alles andere als unwahrscheinlich ist. Eine andere Möglichkeit ist, dass es sich bei dem Knochen um einen sechsmonatigen Mondkalender gehandelt hat, bei dem die Einkerbungen Mondphasen darstellen. Eine weitere Möglichkeit, wie sie die US-amerikanische Mathematikerin Claudia Zaslavsky im 20. Jahrhundert vorgeschlagen hat, besteht wiederum darin, dass der Knochen von einer Frau benutzt worden sein könnte, um ihren Menstruationszyklus zu eruieren. Auch die Bestimmung der anbrechenden und vergehenden Jahreszeiten für die Aussaat von Samen oder die Ermittlung des Zeitpunkts, zu dem Flüsse Hochwasser führen würden, scheinen plausible Möglichkeiten zu sein. Ähnliche Knochen wurden auch in anderen Teilen Afrikas und anderswo entdeckt. Es scheint, dass der Vorgang des Zählens seit Zehntausenden von Jahren ein fester Bestandteil des Menschseins ist.

Die allerfrühesten überlieferten Zeichen der Mathematik ähneln allesamt denen der Ishango-Knochen. Solche Relikte können demonstrieren, wie unsere Spezies einen riesigen konzeptionellen Sprung getan hat: einen Moment aufzeigen, in dem wir begonnen haben, mathematisch abstrakt zu denken – oder es handelt sich eben einfach nur um ein paar Kratzer. Überreste altertümlicher Denkmäler und Töpferwaren weisen oft ausgefeilte geometrische Muster auf, aber hat das auch zu bedeuten, dass ihre Hersteller die mathematischen Prinzipien verstanden haben, die in diesen Darstellungen stecken – oder fanden sie einfach nur Gefallen an den Mustern?

Die frühesten mathematischen Grundlagen, die unsere Spezies entwickelt hat, wurden vielleicht nicht unbedingt aufgeschrieben oder haben keine physischen Spuren hinterlassen. Vielmehr liegen uns Belege vor, dass sich ein tiefes mathematisches Verständnis allein durch Sprache entwickeln kann. Das

Volk der Akan in Westafrika beispielsweise verfügte über ein elaboriertes mathematisches Instrumentarium für den Umgang mit Gewichten und Maßen, das mündlich weitergegeben wurde. Durch seinen mündlichen Charakter war ihr mathematisches System hervorragend geeignet, um zwischen dem 15. und dem späten 19. Jahrhundert Geschäfte mit arabischen und europäischen Händlern zu machen. Dies hatte aber auch zu bedeuten, dass es durch den jahrhundertelangen atlantischen Sklavenhandel abgeschliffen wurde. Nachdem es Forschern im Jahr 2019 gelang, die Funktionsweise des Systems anhand der wenigen in Museen aufbewahrten Artefakte zu rekonstruieren, schlugen sie vor, dieses zum UNESCO-Weltkulturerbe zu erklären, da es so spektakulär war.

In diesem Fall war das System bis vor Kurzem noch gebräuchlich, aber es gab wahrscheinlich noch viele andere mündlich überlieferte mathematische Systeme, die mittlerweile der Zeit zum Opfer gefallen sind. Die Praxis des Zählens sowie ihre Folgen waren wahrscheinlich integraler Bestandteil vieler Gemeinschaften und Zivilisationen, ohne dass die Notwendigkeit bestanden hat, etwas in dieser Art zu verschriftlichen. Und falls es doch geschehen sein sollte, so ist jede Spur davon verloren gegangen. Diese ersten Lichtblicke der Mathematik sind vage und werden es für immer bleiben. Mit dem Aufkommen der Schriftsprache und dem Aufstieg einiger der größten Zivilisationen der Welt wird das Bild jedoch etwas klarer.

An den Flüssen von Babylon

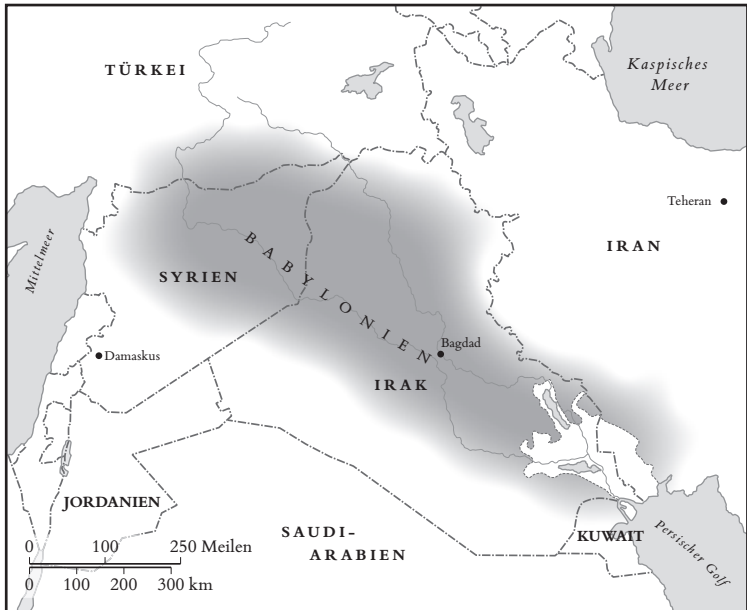
Zwischen den Flüssen Tigris und Euphrat erstreckt sich ein Stück fruchtbares Land, auf dem zahlreiche alte Hochkulturen ansässig waren. Die Flüsse entspringen getrennt in der heuti-

gen Türkei und schlängeln sich durch den heutigen Irak, Syrien und Iran, bevor sie in den Persischen Golf münden. Zusammen bilden sie eine natürliche Begrenzung desjenigen Gebiets, das einst als Mesopotamien bekannt war.

Um 3000 v. Chr. blühte hier die sumerische Zivilisation. Die Sumerer errichteten komplexe Städte mit riesigen Bewässerungssystemen. Sie verfügten auch über eines der frühesten Rechtssysteme mitsamt Gerichten, Gefängnissen und amtlichen Dokumenten. Sie haben das älteste uns bekannte und für diese Aufzeichnungen erforderliche Schriftsystem, die Keilschrift, entwickelt, und obendrein ein Zählsystem. Sogar einen Postdienst haben sie ins Leben gerufen.

Im Laufe der nächsten tausend Jahre taten sich die Akkader als vorherrschende Macht in der Region hervor. Sie brachten ihre eigene Technologie mit, darunter den Abakus – ein von ihnen erfundenes Werkzeug. (Seine Funktionsweise unterscheidet sich geringfügig von späteren Versionen, wie etwa der chinesischen.) Ihr Reich sollte schließlich untergehen, zurückblieben zwei unterschiedliche, Akkadisch sprechende Gruppen: die Assyrer im Norden und die Babylonier im Süden. Aus jeder von ihnen ging eine eigenständige Hochkultur hervor, aber erst im Süden kam die Mathematik so richtig in Fahrt.

Die Stadt Babylon, etwa hundert Kilometer südlich vom heutigen Bagdad gelegen, war die Hauptstadt des babylonischen Reichs. Unter der Führung von König Hammurabi, der von etwa 1792 v. Chr. bis 1750 v. Chr. regierte, stieg Babylonien zu einer Macht auf, mit der man zu rechnen hatte. Er kontrollierte mehrere Stadtstaaten in der Region und sorgte dafür, dass Babylonien außerordentlich reich und einflussreich wurde. Damit waren die Stabilität und die Ressourcen gewährleistet, die für die Entwicklung und das Gedeihen einer Gemeinschaft vonnöten waren, die Mathematik betrieb.



Karte von Mesopotamien.

Eine umfangreiche Sammlung von Tontafeln, die heute noch erhalten ist, enthält viele Details über Babylonien in dieser Zeit. Die Schreiber ritzten das, was sie aufzuzeichnen gedachten, mit einem angespitzten Stock in den nassen Ton und ließen ihn dann in der Sonne aushärten. Diese Tafeln waren für die Babylonier das, was für uns heute Papier und Kalkulationstabellen sind – wichtige Instrumente, um etwas schriftlich festzuhalten. Sie hielten Hammurabis Rechtssystem fest, das als Kodex des Hammurabi bekannt ist und aus 282 schriftlichen Gesetzen bestand sowie eines der frühesten Beispiele für den Grundsatz lieferte, dass man unschuldig war, bis die Schuld bewiesen war – wobei die Schuldfrage allerdings davon abhing, ob man eine Person mit Eigentum, frei oder ein Sklave war. Die Tafeln zeichneten außerdem Transaktionen auf und erzählten

Geschichten, einschließlich Schöpfungsmythen, und dienten der Übermittlung von Nachrichten.

Bei einer der erhaltenen Tafeln handelt es sich im Grunde genommen um eine Reklamation. Sie wurde um 1750 v. Chr. geschrieben und stammt von einem unzufriedenen Kunden namens Nanni, der sich bereit erklärt hatte, Kupferbarren von einem Händler namens Ea-nasir zu kaufen. Als die Barren jedoch ankamen, waren sie nicht nach Nannis Geschmack. In seinem Beschwerdeschreiben monierte er, dass er mit dem Kupfer unzufrieden sei und der Verkäufer bei der Abwicklung des Geschäfts sich unhöflich gegenüber seinem Diener verhalten habe. Das Einschnitzen und Ausbacken einer Kundenbeschwerde in einer materiellen Form, die Tausende von Jahren überdauern würde, ist eine beispiellose Demonstration der Macht der Verbraucher:innen.*

Die Babylonier nutzten die Mathematik für viele praktische Zwecke, unter anderem für die Aufteilung von Grundstücken und die Berechnung von Steuern. Einige Tontafelschreiber vermerkten Einnahmen und zeichneten Haushaltspläne auf, und machten sich so mit Zahlen vertraut. Leider unterschrieben sie nicht mit ihren Namen, sodass wir fast nichts über einzelne Mathematiker aus dieser Zeit wissen. Einige studierten jedoch systematisch Mathematik, beschäftigten sich mit Themen wie Algebra und entdeckten den berühmten Satz über Dreiecke, der oft nach Pythagoras (der viel später lebte) benannt wurde. Sie haben auch die Quadratwurzel aus zwei auf sechs Dezimalstellen genau geschätzt.

Das auf den Tagesverlauf bezogene Zählsystem stammt

* Und natürlich wären wir und künftige Archäologen Ihnen sehr dankbar, wenn Sie die Macht der Verbraucher:innen nutzen würden, um eine positive Rezension dieses Buchs zu fabrizieren.

von den Sumerern und war sexagesimal – basierend auf der Zahl 60. Unsere Vorliebe für die Unterteilung von Kreisen in 360 Grad und von Stunden in sechzig Minuten geht auf dieses System zurück. Nachfolgend finden sich die Keilschriftsymbole, welche die Babylonier für die Zahlen 1 bis 59 verwendet haben:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	

Babylonische Ziffern, in Keilschrift geschrieben.

Das babylonische Zahlensystem war ein Positionssystem wie das unsere, das heißt, die Anordnung der Zahlen gibt Aufschluss über die Beträge, die sie ergeben. Wenn wir zum Beispiel die Zahl 271 schreiben, heißt das, dass die am weitesten rechts stehende Zahl mit dem Wert 1 die Anzahl der Einer darstellt, gefolgt von 7 Zehnern und 2 Hundertern, wobei die Leserichtung links beginnt. Oder, in Zahlen geschrieben:

$$271 = (2 \times 10^2) + (7 \times 10^1) + (1 \times 10^0)$$

In ähnlicher Weise verwendeten die Babylonier Positionen, um Potenzen von 60 darzustellen, womit sich die 271 wiedergeben ließe als

$$271 = (4 \times 60^1) \times (31 \times 60^0)$$

Oder, in Keilschrift:



Der größte Unterschied zwischen dem babylonischen und unserem Zahlensystem besteht darin, dass es keine Null gab – eine echte Null wurde erst viel später eingeführt. Das hatte zu bedeuten, dass sich die Babylonier die Größe einer Zahl oft aus dem Kontext erschließen mussten. Lasen sie beispielsweise das Keilschriftzeichen für 42, konnten sie daraus folgern, dass es sich um 42 oder 42×60^1 oder aber 42×60^2 oder auch $\frac{42}{60^1}$, $\frac{42}{60^2}$ handelte, um nur einige der Möglichkeiten zu nennen. Obwohl dies manchmal Fehlschlüsse mit sich brachte, ist es nicht so unvernünftig, wie es auf den ersten Blick erscheinen mag. Wenn Sie jemanden sagen hören, dass ein Haus »300« einer bestimmten Währung kostet, können Sie, je nachdem, wo Sie sich auf der Welt gerade befinden, wahrscheinlich ermitteln, ob damit 300, 300 000, drei Millionen oder mehr gemeint sind.

Ein System zur Basis 60 mag im Vergleich zur Basis 10 zunächst kompliziert erscheinen, aber sie verschaffte den Babyloniern einen mathematischen Vorsprung. Die Zahl 60 ist eine vielfach zusammengesetzte Zahl, das heißt, sie enthält viele Faktoren: Sie kann durch 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 und 60

geteilt werden. Das macht es einfach, mit ihr zu operieren, besonders beim Schreiben von Brüchen.

Erinnern Sie sich daran, dass die Positionen links vom Dezimalpunkt Zehner, Hunderter, Tausender usw. bezeichnen. Die Zahl 0,347 zum Beispiel ist in Wirklichkeit eine Abkürzung für

$$0,347 = \frac{0}{10^0} + \frac{3}{10^1} + \frac{4}{10^2} + \frac{7}{10^3}$$

Nehmen Sie nun den Bruch $\frac{1}{3}$. In Dezimalzahlen ausgedrückt wird dieser geschrieben als

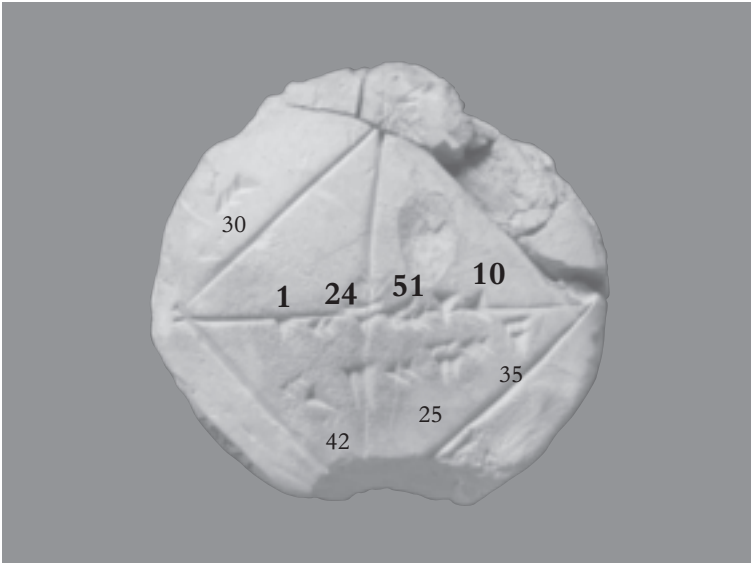
$$0,333\dots = \frac{0}{10^0} + \frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3}$$

Wir sind so daran gewöhnt, eine solche Terz im Dezimalsystem zu schreiben, dabei ist diese tatsächlich eine Eigenart unseres Zahlensystems. Die unendlichen Wiederholungen rühren daher, dass 10 nicht durch 3 teilbar ist, im Gegensatz zur 60. Eine Terz ist das Gleiche wie $\frac{20}{60}$, was bedeutet, dass sie im Sexagesimalsystem einfach als 20 geschrieben werden könnte, oder anders beziffert:

$$\frac{1}{3} = \frac{0}{60^0} + \frac{20}{60^1}$$

Da 60 wie erwähnt eine vielfach zusammengesetzte Zahl ist, gibt es mehr Brüche, die sich besser in einem System zur Basis 60 ausdrücken lassen als zur Basis 10.

Die alten Ägypter machten um diese Zeit ähnliche Fort-

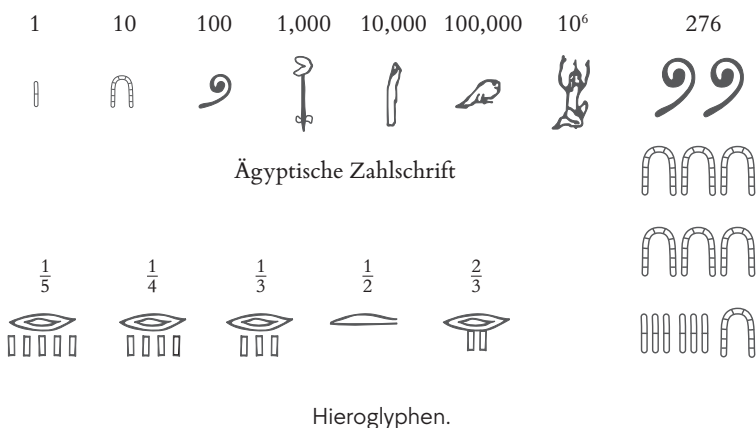


Babylonischer Näherungswert für $\sqrt{2}$. Im Sexagesimalsystem:
124 5110. Im Dezimalsystem etwa 1,414213.

schritte. Ab etwa 3000 v. Chr. verfügten die Menschen dort über spezielle Symbole zur Abbildung verschiedener Zahlen als Teil eines Dezimalsystems. Ein einzelner senkrechter Strich stand für die Zahl 1, zwei Striche für die Zahl 2 und so weiter, bis zur Zahl 9. Dann gab es spezielle Hieroglyphen für Zahlen wie 10, 100, 1000 und so fort sowie Symbole für Brüche. Um eine bestimmte Zahl zu schreiben, führten die alten Ägypter einfach die richtige Kombination von Hieroglyphen auf.

Vieles davon findet sich auf dem Papyrus Rhind* zusammengestellt, einem Manuskript, das von einem Schreiber na-

* Der Name geht auf den schottischen Archäologen Alexander Henry Rhind zurück, der den Papyrus 1863 erworben hat. Der größte Teil davon wird heute im Britischen Museum in London aufbewahrt.



mens Ahmes verfasst wurde. Hierbei handelt es sich um das älteste erhaltene und bekannte Mathematiklehrbuch, das mit der bemerkenswerten Aussage beginnt: »Genaueres Rechnen. Der Zugang zum Wissen über alle seienden Dinge und obskuren Geheimnisse.«¹ Ahmes verfasste das Manuskript um 1550 v. Chr. und sagt, er habe für dessen Zusammenstellung auf Texte aus der Zeit um 2000 v. Chr. zurückgegriffen. Dass die darin enthaltenen mathematischen Grundlagen mindestens 4000 Jahre alt sein könnten, lässt sich schwer greifen, vor allem, wenn man bedenkt, dass so viel von dem, was darin steckt, der Mathematik ähnelt, wie wir sie heute kennen.

Das Lehrbuch listet vierundachtzig mathematische Probleme und mögliche Lösungswege auf. Bei sechs der Aufgaben geht es darum, die Neigung einer Pyramide aus ihrer Höhe und Breite zu berechnen, indem man auf Leitsätze zurückgreift, die Ähnlichkeit mit denen der Trigonometrie haben. Die Mathematik wird von den Menschen geprägt, die sie entwickeln, und so ist es nicht verwunderlich, dass sich die ägyptischen Mathematiker für die mathematischen Grundlagen von Pyramiden interessierten, als die Pharaonen so beses-

sen davon waren, eine nach der anderen zu bauen. Aber mathematische Ideen sind auch universell. Viele andere Kulturen stießen ganz unabhängig voneinander auf die Mathematik der Trigonometrie, vom alten China bis zum Europa der Renaissance, nur mit anderen Beweggründen. Der Papyrus enthält auch Divisions- und Multiplikationstabellen sowie Erklärungen zur Berechnung von Volumen und Fläche. Viele unserer heutigen Ansätze und Ideen rund um Arithmetik, Algebra und Geometrie tauchen in der einen oder anderen Form hier schon auf.

Es finden sich einige Überschneidungen zwischen den Überlegungen, wie sie auf dem Papyrus Rhind festgehalten sind, und denen auf den babylonischen Tafeln. Die beiden Hochkulturen verfügten über unterschiedliche Zahlensysteme, Überzeugungen und Kulturen, und doch stießen beide auf ähnliche mathematische Wahrheiten. Und es wird allgemein angenommen, dass dieser Umstand nicht auf einen aktiven Austausch zurückzuführen ist, sondern lediglich darauf, dass sie eben unabhängig voneinander an einigen der grundlegendsten mathematischen Ansätze geforscht haben.

Eine Schriftrolle unter dem Arm

Etwa zur gleichen Zeit entwickelte sich jenseits des Atlantiks eine andere Zivilisation mit einer abweichenden Auffassung von Mathematik, die aus der Astronomie hervorging. Die Hochkultur der Maya entstand um 2600 v. Chr. Es handelte sich nicht um ein zusammenhängendes Reich, sondern um eine Ansammlung unabhängiger Herrscher, die Stadtstaaten des heutigen Mexiko bis Honduras regierten, die kulturelle Gepflogenheiten und mythologische Vorstellungen mitei-

nander teilten und einen gemeinsamen Kalender hatten. Es gab Tempel, die nach den Bewegungen der Sonne, des Mondes und der Planeten ausgerichtet waren, und riesige Städte, die noch weiter expandierten. Das im heutigen Norden Guatemalas gelegene Tikal zählte schätzungsweise etwa 50 000 Einwohner und 3000 einzelne Gebäude, die von Palästen und Heiligenstätten bis hin zu Häusern, Plätzen und Wasserreservoirs reichten. Die Stadt bildete ein wirtschaftliches und zeremonielles Zentrum, in dem ein reger Handel mit wertvollen Gütern wie Jade, Quetzalfedern und Kakao betrieben wurde. Wie andere Hochkulturen verfügten auch die Maya über ausgeklügelte Bewässerungssysteme, um ihr Getreide zu versorgen. Sie entwickelten sogar ein System zur Reinigung des Trinkwassers mit Zeolithmineralien, das noch heute Anwendung findet.

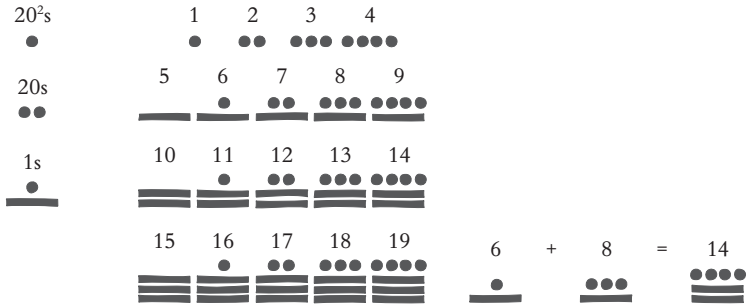


Die Maya-Zivilisation. Das Gebiet erstreckt sich über den heutigen Südosten Mexikos, ganz Guatemala, Belize, Honduras und El Salvador.



Kopf-Varianten der Zahlenglyphen.

Mathematiker waren wichtig und berühmt genug, um auf Wandgemälden in Erscheinung zu treten, abgebildet mit Schriftrollen unter den Armen. Diese Mathematiker profitierten von bestimmten zufälligen Eigenheiten der Maya-Kultur. So gab es, obwohl die Maya je nach Region viele verschiedene Sprachen sprachen, nur ein einziges Schriftsystem, das aus Hieroglyphen für Silben und Profilbildern von Göttern für Zahlen bestand (siehe Abbildung oben). Die meisten Menschen waren Analphabeten, aber die Schriftgelehrten konnten sich unabhängig von der Sprache, in der sie kommunizierten, durch Schriftstücke verständigen, die in Hieroglyphenschrift auf Papier verfasst waren, das aus der Innenrinde von Feigenbäumen gewonnen wurde.



Maya-Ziffern und eine Beispiel-Addition.

Die Maya verfügten auch noch über ein anderes Zahlensystem, das weniger dekorativ und mehr praktisch orientiert war. Es verwendete zwei Symbole: einen Punkt und einen Balken. Der Punkt stand für die 1 und der Balken für die 5. Das Maya-Zahlensystem war nicht wie das Dezimal- und Sexagesimalsystem um 10 oder 60 herum aufgebaut, sondern vigesimal, das heißt um die Zahl 20.

Leider ist die genaue Funktionsweise dieses Zahlensystems mit ein wenig Rätselraten verbunden. Als die spanischen Eroberer im 16. Jahrhundert in Mittelamerika einfielen, gab es noch zahlreiche Feigenrindenbücher der Maya, aber die katholischen Priester glaubten, sie enthielten die »Lügen des Teufels«, sodass viele von ihnen verbrannt wurden.

Nichtsdestotrotz wissen wir, dass die Zahlensysteme der Maya sehr erfolgreich eingesetzt wurden. Eine der zentralen Funktionen der Maya-Mathematiker war die des Astronomen. Ihre Aufgabe war es, dabei zu helfen, heilige Rituale so zu planen, dass sie mit himmlischen Ereignissen zusammenfielen. Die Maya bauten einfache, aber funktionale Observatorien, um den Wechsel der Jahreszeiten und den besten Zeitpunkt für die Aussaat vorherzusagen. Obwohl das Gebäude selbst erst später

errichtet wurde, boten viele der Fenster des Caracol-Observatoriums in Chichén Itzá im heutigen Mexiko eine hervorragende Aussicht auf wichtige astronomische Ereignisse wie den Untergang der Sonne zur Tagundnachtgleiche im Frühjahr.

Die Überreste einer Schreibstube der Maya-Schriftgelehrten, die als Haus der Kalender bekannt ist, zeigen uns, wie die Astronomen den Überblick über die von ihnen erhobenen Daten behielten. Die aus dem frühen 9. Jahrhundert v. Chr. stammende Wand und die Decke sind mit bunten Malereien verziert, darunter mehrere menschliche Figuren, Zahlen und Glyphen. Die Wand wurde wahrscheinlich wie eine Tafel verwendet. Sie ist mit farbigen Hieroglyphen verziert, mit denen kalendarische und astronomische Berechnungen angestellt wurden. Die Überreste von zwei Rechentafeln liefern einen Hinweis auf die Bewegung des Mondes, möglicherweise auch von Mars und Venus.

Die meisten Mathematiker und Astronomen der Maya gehörten der Priesterklasse an und genossen hohes Ansehen. Sie waren in der Lage, eine Sonnenfinsternis genau vorherzusagen, und es gelang ihnen sogar, die sonderbaren Bewegungen der Venus am Himmel zu verfolgen, die sich in einem Turnus von acht Jahren wiederholen, was teilweise darauf zurückzuführen ist, dass die Sonne unsere Sicht auf sie versperrt. Sie betrachteten die Venus als einen Begleiter der Sonne und gaben ihr den Namen »Chak Ek'«, was so viel wie »Großer Stern« bedeutet.

Die Maya nahmen unglaublich genaue Messungen der Bewegungen des Mondes und der Sterne vor: Sie berechneten beispielsweise, dass 149 Mondmonate 4400 Tage dauerten; in unserer Schreibweise macht dies einen Mondmonat von 29,5302 Tagen aus, und wir geben ihn heute mit 29,5306 Tagen an. In ähnlicher Weise errechneten sie die Länge eines Jahres mit 365,242 Tagen (heute 365,242198 Tage).

Der Wunsch, den Nachthimmel und seine Auswirkungen auf die Erde besser zu verstehen, veranlasste die Maya zur Entwicklung mathematischer Ansätze. Durch das Beherrschen der Astronomie glaubten sie in der Landwirtschaft reüssieren zu können. Ein ähnlicher Mechanismus sollte eine weitere Periode der Entwicklung mathematischer Grundlagen in einem anderen Teil der Welt vorantreiben, die mindestens so früh wie deren Entwicklung in Babylonien begonnen hat und sich über Tausende von Jahre erstreckte. In China ging es bei der Mathematik um weit mehr als nur um Regen und Ernten, sie wurde zur Frage des Herrschaftsanspruchs und dem Willen der Götter.

2 DIE SCHILDKRÖTE UND DER KAISER

Die Legende besagt, dass eines Tages, vor etwa 4000 Jahren, Yu der Große eine Pause von seinen Pflichten als Kaiser von China einlegte und am Ufer des Gelben Flusses entlang spazieren ging. Als er den Blick über das fließende Wasser schweifen ließ, nahm er ein dunkles, sich bewegendes Objekt zu seinen Füßen wahr. Er schaute hinab und sah, dass es eine Schildkröte war. Aber es war nicht nur irgendeine Schildkröte. Er blickte genauer hin. Der Panzer der Schildkröte wies Risse auf, die ein quadratisches Raster aus chinesischen Ziffern mit drei Feldern zu den jeweiligen Seiten bildeten, das er schnell erkannte. Es war ein Sinnbild mathematischer Perfektion.

Das Muster, das er wahrnahm, ist heute als magisches Quadrat bekannt und kann wie folgt transkribiert werden:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Zu beachten ist, dass die Summe aller Spalten, Zeilen und Diagonalen 15 ergibt. In den Augen der Menschen im alten China war diese numerische Koinzidenz ein Glück verheißendes Zeichen. Die Kaiser galten als die wichtigsten Personen im Staat

und führten Riten durch, um sicherzustellen, dass die Harmonie des Kosmos erhalten blieb. Yu gründete die älteste Dynastie Chinas, die Xia, und trug die volle Verantwortung für das, was sich in seinem Reich zutrug, wobei die Ergebnisse von Weissagungen eine wichtige Rolle spielten, sei es bei Schlachten, Geburten, Krankheiten oder der Ernte. Als Yu dieses Glück verheißende Muster entdeckte, erlangte er die Befugnis, sich als rechtschaffener Führer des Landes zu präsentieren. Er hielt das sogenannte Mandat des Himmels inne.

Mit Geschichten wie dieser nimmt die Mathematik in China ihren Anfang. Im Laufe der nächsten tausend Jahre wurden Mathematik und Wahrsagerei zum Herzstück einer jeden Dynastie. Die Herrscher bauten auf ihre Ergebnisse: Sie gebrauchten diese für praktische Zwecke wie den Handel oder sahen sie als göttliche Führung, indem sie mit mathematischen Methoden versuchten herauszufinden, was das Universum für sie bereithielt. Mathematik im alten China war der Inbegriff von Macht.

Obwohl sie außerhalb Ostasiens häufig unterschätzt wird, war die Mathematik, wie sie in dieser Zeit entwickelt wurde, durchaus elaboriert, elegant und ihrer Zeit weit voraus. Magische Quadrate beispielsweise tauchten das erste Mal in China auf, dann aber auch in Indien, dem Nahen Osten und viel später erst in Europa. Aus diesen sollte sich ein Muster entwickeln. Im Laufe der Geschichte würden Mathematiker weltweit auf vermeintlich neue Entdeckungen stoßen, und erst später würde sich herausstellen, dass diese Entdeckungen Hunderte – wenn nicht Tausende – Jahre zuvor bereits in China gemacht worden waren.

Das Zählen von Stäbchen (und Segnungen)

Die ältesten mathematischen Aufzeichnungen, die uns aus China vorliegen, sind Knochen – genauer gesagt, Knochen, die für Prophezeiungen verwendet wurden. Auch wenn Yu zufällig über eine Schildkröte gestolpert war, die eine Botschaft übermittelte, war es üblich, dass Wahrsager versuchten, bei bestimmten Anliegen etwas nachzuhelfen. Sie versuchten, direkt mit den Göttern ins Gespräch zu kommen, indem sie Fragen in die Panzer toter Schildkröten oder in die Schulterknochen von Rindern ritzten, die sie dann erhitzten, bis sie barsten. Die hieraus resultierenden Muster wurden als himmlische Antworten auf die gestellten Fragen gedeutet.

Yu hat Hunderte von Jahren vor den ältesten schriftlichen Aufzeichnungen in China gelebt, sodass über seine tatsächliche Biografie keine Einigkeit besteht. Was wir über ihn wissen, wurde über Generationen hinweg mündlich tradiert und erst



Nachbildung eines Schildkrötenpanzers für Weissagungen.

Orakelknochen-Zahlen ließen sich auch für einfache Brüche verwenden. Dies zeigt sich anhand der ältesten uns bekannten Dezimal-Multiplikationstabelle, auf die man stieß, als im Jahr 2008 fast 2500 Bambusstreifen aus der Zeit um 300 v. Chr. an die Tsinghua-Universität in Peking gespendet wurden. Es ist nicht genau bekannt, woher die Streifen ursprünglich stammten, aber bevor sie an die Universität gelangten, wurden sie wahrscheinlich nach einer illegalen Ausgrabung zum Verkauf angeboten.¹ Zu der Sammlung gehörten 21 Bambusstreifen, die eine Multiplikationstabelle bilden und zeigen, wie sich jede ganze oder halbe Zahl zwischen 0,5 und 99,5 multiplizieren



Bambusrohlinge aus der Zeit um 300 v. Chr. Öffentliches Eigentum, aber im Shanghai-Museum verwahrt.

lässt. Solche Tabellen wurden wie Taschenrechner verwendet, um komplizierte Summen schnell zu berechnen. Die alten Babylonier verfügten ebenfalls vor etwa 4000 Jahren über Multiplikationstabellen, früher als die Chinesen, allerdings nicht im Dezimalsystem. Die frühesten uns bekannten Multiplikationstabellen im europäischen Raum datieren hingegen (erst) in die Renaissance.

Einige Zeit nach der Herstellung dieser Bambusstreifen kam in China ein anderes Zahlensystem auf, das sich für Händler als besonders nützlich erweisen sollte – die Stäbchenzahlen. Bei den Stäbchenzahlen wurden Zahlensymbole auf der Grundlage von Linien verwendet, die sich leicht in Schlamm oder Sand einkratzen ließen, wobei viele Menschen tatsächlich physische Stäbchen verwendeten. Die Händler in China gehörten zu dieser Zeit zur wohlhabenden landbesitzenden Elite und trugen stets ein Bündel von Bambus-Zählstäbchen bei sich, um spontan Berechnungen vorzunehmen.

Zentrales Merkmal des Stäbchenzählsystems war ein raffinierter Trick, um größere Zahlen aus kleineren zusammenzusetzen. Dabei wurden zwei Systeme zur Darstellung der Zahlen von 1 bis 9 miteinander verschränkt. Im ersten System wurden die Stäbchen vertikal angeordnet, um die Zahlen 1 bis 5 darzustellen. Bei den Zahlen 6 bis 9 bildete wiederum ein horizontales Stäbchen die 5 ab, und für jede weitere Zahl wurden vertikale Stäbchen hinzugefügt. Im zweiten Fall verhält es sich mit den horizontalen und vertikalen Stäbchen jeweils genau andersherum. Aus der folgenden Tabelle kann man zum Beispiel ersehen, dass die Zahl 7 entweder mit zwei senkrechten und einem waagerechten Stäbchen oder mit zwei waagerechten und einem senkrechten Stäbchen geschrieben werden kann.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
					⊥	⊥	⊥	⊥
—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	⊥	⊥

Beispiele von Stäbchen, die Zahlen darstellen.

Für die Darstellung größerer Zahlen wurden diese beiden unterschiedlichen Systeme für die Zahlen 1 bis 9 abwechselnd verwendet, wobei die überwiegend senkrechten Stäbchen für die Einer, die überwiegend waagerechten Stäbchen für die Zehner und so weiter verwendet wurden. Die Zahl 264 ließe sich entsprechend so schreiben:

|| ⊥ |||

Auch wenn es noch keine Schreibweise zur Kennzeichnung einer Null gab, konnte diese durch die Anwendung des vertikalen oder horizontalen Systems in fortlaufender Reihenfolge angedeutet werden. Die Zahl 209 wurde so geschrieben:

|| |||

Das Fehlen einer horizontalen Zahl zwischen den 2 Hunderten und den 9 Einern macht deutlich, dass es 0 Zehner gibt. Hunderte von Jahren bevor jemand ein Zeichen für die Null erfunden hat (eine Geschichte, auf die wir in Kapitel 5 zurückkommen werden), begriffen die chinesischen Mathematiker bereits, welchen Nutzen diese als Platzhalter hatte.