9. Klasse • Mathematik

DUDEN

WISSEN • ÜBEN • TESTEN

Mathematik

9. KLASSE

So lernst du mit diesem Buch:

Wissen

Hier wiederholst du Schritt für Schritt, was du zu jedem Lernthema wissen musst, um richtig vorbereitet zu sein.

In der linken Spalte: Regeln und Arbeitsanleitungen

In der rechten Spalte: Beispiele und Veranschaulichungen

Üben

Hier wendest du das Gelernte auf typische Übungsaufgaben an.

Damit du deinen Lernfortschritt selbst überwachen kannst, gibt es verschiedene Schwierigkeitsstufen:

* Übungen zum Wiederholen des Lernstoffs

** Übungen zu Standardaufgaben und für die nötige Sicherheit vor der Klassenarbeit

*** Übungen zu besonderen und anspruchsvolleren Problemen

Wissen+ Diese Kästen geben dir zusätzliche Informationen, Tipps und Hinweise für das Bearbeiten der Übungen.

Testen

Hier testest du dein Wissen mit vermischten und übergreifenden Aufgaben eines Kapitels.

Klassenarbeit Alle Lernthemen eines Kapitels werden wie in einer echten Klassenarbeit abgefragt.

45 Minuten Die Minutenangabe sagt dir, wie viel Zeit du für die Bearbeitung einer Klassenarbeit hast.

DUDEN

WISSEN • ÜBEN • TESTEN

Mathematik

9. KLASSE

5., aktualisierte Auflage

Dudenverlag
Berlin

Bildnachweis:
S. 41: GOLFX/Shutterstock.com; S. 47: Tobias Arhelger / Shutterstock.com;
S. 128: Andrey Lobachev / Shutterstock.com

Redaktionelle Leitung Juliane von Laffert
Redaktion Ulrike Klein
Autoren und Autorinnen Michael Bornemann, Karin Hantschel, Lutz Schreiner

Herstellung Ditte Hoffmann
Layoutidee Lilli Messina, Berlin
Illustration Carmen Strzelecki
Grafik pro.grafik, Ostfildern
Umschlaggestaltung 2issue, München
Umschlagabbildung Thomas Gilke
Layout / technische Umsetzung LemmeDESIGN, Berlin

www.duden.de
www.cornelsen.de

5. Auflage, 1. Druck 2023

Druck: H. Heenemann, Berlin

ISBN 978-3-411-72575-5

PEFC/04-31-1156

PEFC zertifiziert
Dieses Produkt stammt aus nachhaltig bewirtschafteten Wäldern und kontrollierten Quellen.

www.pefc.de

Inhalt

Inhalt

1 Reelle Zahlen

1.1 Irrationale Zahlen

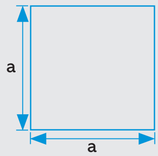
Quadrieren ist das Multiplizieren einer Zahl a mit sich selbst: $a \cdot a = a^2$.

$5 \cdot 5 = 5^2 = 25$
$(-2) \cdot (-2) = (-2)^2 = 4$
$0 \cdot 0 = 0^2 = 0$

Es gilt stets: $a^2 \geq 0$.

Quadrieren funktioniert immer!
Du kannst zu jeder rationalen Zahl a eine rationale Zahl a^2 finden.

Ein Quadrat mit der Seitenlänge a hat den Flächeninhalt $A = a^2$.



$A = a \cdot a = a^2$

Die **Quadratwurzel** (kurz: **Wurzel**) aus einer nicht negativen Zahl a ist diejenige nicht negative Zahl c, die quadriert die Ausgangszahl a ergibt: $c^2 = a$.
Die Wurzel ist als nicht negative Zahl definiert. Es ist also $\sqrt{a^2} = a$, nicht $-a$, obwohl $(-a) \cdot (-a) = a^2$.

$\sqrt{9} = 3$; da $3^2 = 9$; $a = 9$; $c = 3$
$\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$;
da $1{,}2^2 = 1{,}44$; $a = 1{,}44$; $c = 1{,}2$

$\sqrt{25} = 5$. -5 ist keine Wurzel aus 25, auch wenn $(-5) \cdot (-5) = 25$.

Merke: $\sqrt{0} = 0$; da $0^2 = 0$

Für alle $a \geq 0$ gilt: $(\sqrt{a})^2 = a$.

$(\sqrt{11})^2 = 11$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen heißt **Radikand.**

$\sqrt{1{,}44}$: Der Radikand ist die Zahl 1,44.

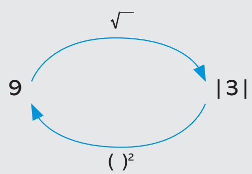
Merke: Da das Produkt zweier negativer Zahlen positiv ist, kann man aus negativen Zahlen keine Wurzel ziehen.

$(-4) \cdot (-4) = 16$ und $4 \cdot 4 = 16$
$\sqrt{-16}$ ist nicht definiert.

Ist a eine beliebige rationale Zahl, dann gilt: $\sqrt{a^2} = |a|$.

$|3| = 3$; $|-3| = 3$
$\sqrt{3^2} = |3| = 3$
$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

Quadrieren und **Wurzelziehen** sind zueinander entgegengesetzte (inverse) Rechenoperationen.
Beim Wurzelziehen wird zu einer Zahl a die Zahl x bestimmt, die mit sich selbst multipliziert a ergibt.



$\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{0{,}5184} = 0{,}72$

Du kennst bereits einfache quadratische Gleichungen der Form $x^2 = a$.

$x^2 = 4$; dann gilt: $x = 2$ oder $x = -2$;
$x^2 = 9$; dann gilt: $x = 3$ oder $x = -3$

1 Reelle Zahlen

Wurzelziehen führt zu irrationalen Zahlen.
Es gibt viele Gleichungen der Form $x^2 = a$, die *keine rationale Zahl* als Lösung für x haben.
Die Lösung solcher Gleichungen lässt sich nicht als Bruch darstellen.

Du erinnerst dich: **Rationale Zahlen** können entweder als

- abbrechende Dezimalzahlen oder als
- nicht abbrechende, periodische Dezimalzahlen dargestellt werden.

Merke: Jede rationale Zahl lässt sich als Bruch schreiben.

$x^2 = 2$ hat keine rationale Zahl als Lösung.
Beweis: $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch darstellen, denn:
Angenommen, man könnte $\sqrt{2}$ als vollständig gekürzten Bruch darstellen, dann gälte
$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ und damit $2 = \frac{p^2}{q^2}$,
d. h., $\frac{p \cdot p}{q \cdot q}$ müsste kürzbar sein und
$\frac{p}{q}$ müsste ebenfalls kürzbar sein, was der Annahme widerspricht, dass der Bruch bereits vollständig gekürzt ist.

Irrationale Zahlen sind **nicht abbrechende** und **nicht periodische Dezimalzahlen.**

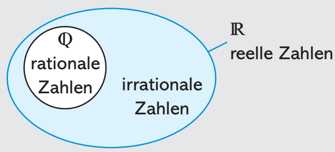
Merke: Irrationale Zahlen lassen sich nicht als Bruch darstellen. Durch Dezimalzahlen werden sie näherungsweise angegeben.
Die Wurzel einer rationalen Zahl ist meistens eine **irrationale Zahl.**

Kreiszahl $\pi = 3{,}141\,592\,6\ldots$

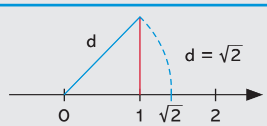
Näherung der Kreiszahl $\pi \rightarrow \pi \approx 3{,}142$

Näherung von $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2} \approx 1{,}414\,214$
$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\ldots$

Die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge ℝ der **reellen Zahlen.**



Darstellung reeller Zahlen



Zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen liegen unendlich viele weitere rationale Zahlen.
Man sagt: **Die rationalen Zahlen liegen dicht.**

Auf der Zahlengeraden ist aber trotzdem für jede irrationale Zahl noch eine bestimmte Stelle frei.

Merke: Jede reelle Zahl lässt sich auf der Zahlengeraden darstellen.

Die Stelle von $\sqrt{2}$ auf der Zahlengeraden findest du, indem du an der Stelle 1 eine senkrechte Strecke der Länge 1 errichtest und deren Endpunkt mit dem Nullpunkt verbindest.
Diese Strecke d hat nach dem Satz des Pythagoras die Länge $\sqrt{2}$, denn nach dem Satz des Pythagoras (↗ Kap. 6) gilt:
$1^2 + 1^2 = d^2$, also $d = \sqrt{2}$.
Trage die Strecke mit dem Zirkel auf der Zahlengeraden ab.