

WISSEN • ÜBEN • TESTEN

Mathematik

10. KLASSE



Alles, was
du wissen
musst

So lernst du mit diesem Buch:

Wissen

Hier wiederholst du Schritt für Schritt, was du zu jedem Lernthema wissen musst, um richtig vorbereitet zu sein.

In der linken Spalte: Regeln und Arbeitsanleitungen

In der rechten Spalte: Beispiele und Veranschaulichungen

Üben

Hier wendest du das Gelernte auf typische Übungsaufgaben an.

Damit du deinen Lernfortschritt selbst überwachen kannst, gibt es verschiedene Schwierigkeitsstufen:



Übungen zum Wiederholen des Lernstoffs



Übungen zu Standardaufgaben und für die nötige Sicherheit vor der Klassenarbeit



Übungen zu besonderen und anspruchsvolleren Problemen

Wissen⁺

Diese Kästen geben dir zusätzliche Informationen, Tipps und Hinweise für das Bearbeiten der Übungen.

Testen

Hier testest du dein Wissen mit vermischten und übergreifenden Aufgaben eines Kapitels.

Klassenarbeit



45 Minuten

Alle Lernthemen eines Kapitels werden wie in einer echten Klassenarbeit abgefragt.

Die Minutenangabe sagt dir, wie viel Zeit du für die Bearbeitung einer Klassenarbeit hast.

DUDEN

WISSEN • ÜBEN • TESTEN

Mathematik

10. KLASSE

5., aktualisierte Auflage

Dudenverlag
Berlin

Redaktionelle Leitung Juliane von Laffert

Redaktion Ulrike Klein

Autoren und Autorinnen Karin Hantschel, Katja Roth, Lutz Schreiner, Anna Speiser,
Manuela Stein

Herstellung Ditte Hoffmann

Layoutidee Lilli Messina, Berlin

Illustration Carmen Strzelecki

Grafik pro.grafik, Ostfildern

Umschlaggestaltung 2issue, München

Umschlagabbildung Thomas Gilke

Layout/technische Umsetzung LemmeDESIGN, Berlin

www.duden.de

www.cornelsen.de

5. Auflage, 1. Druck 2023

© 2023 Cornelsen Verlag GmbH, Berlin

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen.

Das Wort **Duden** ist für den Cornelsen Verlag GmbH als Marke geschützt.

Druck: H. Heenemann, Berlin

ISBN 978-3-411-72585-4



PEFC zertifiziert

Dieses Produkt stammt aus nachhaltig
bewirtschafteten Wäldern und kontrollierten
Quellen.

www.pefc.de

Quadratische Gleichungen und Funktionen

1

- 1.1 Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen → 5
- 1.2 Graphen quadratischer Funktionen → 10
- 1.3 Quadratwurzelgleichungen
und Quadratwurzelfunktionen → 15
- Klassenarbeiten 1–2 → 18

Potenzen und Potenzfunktionen

2

- 2.1 Potenzgesetze → 21
- 2.2 Rationale Exponenten – Wurzeln → 25
- 2.3 Eigenschaften von Potenzfunktionen → 28
- 2.4 Wurzelfunktionen und ihre Graphen → 33
- 2.5 Umkehrfunktionen → 37
- Klassenarbeiten 1–2 → 39

Exponential- und Logarithmusfunktionen

3

- 3.1 Wachstums- und Zerfallsvorgänge → 43
- 3.2 Exponentialfunktionen → 47
- 3.3 Rechnen mit Logarithmen → 51
- 3.4 Exponential- und Logarithmengleichungen → 54
- 3.5 Logarithmusfunktionen → 58
- Klassenarbeiten 1–2 → 60

Der Kreis

4

- 4.1 Umfang und Flächeninhalt → 63
- 4.2 Kreisbögen und Bogenmaß → 67
- Klassenarbeit 1 → 70

Inhalt

Raumgeometrie

5

- 5.1 Prisma und Zylinder \Rightarrow 72
- 5.2 Pyramide und Kegel \Rightarrow 74
- 5.3 Die Kugel \Rightarrow 78
- Klassenarbeit 1 \Rightarrow 82

Trigonometrie

6

- 6.1 Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck \Rightarrow 84
- 6.2 Trigonometrische Funktionen \Rightarrow 88
- 6.3 Sätze und Anwendungen \Rightarrow 97
- Klassenarbeit 1 \Rightarrow 102

Zufallsversuche und Wahrscheinlichkeiten

7

- 7.1 Wichtige Begriffe und Erwartungswert \Rightarrow 104
- 7.2 Bernoulli-Versuch und Bernoulli-Kette \Rightarrow 108
- Klassenarbeiten 1–2 \Rightarrow 114

Ganzrationale Funktionen

8

- 8.1 Nullstellen ganzrationaler Funktionen \Rightarrow 116
- 8.2 Eigenschaften ganzrationaler Funktionen \Rightarrow 120
- Klassenarbeit 1 \Rightarrow 124

Ableitung von Funktionen

9

- 9.1 Änderungsrate und Differenzenquotient \Rightarrow 125
- 9.2 Ableitung einer Funktion \Rightarrow 128
- 9.3 Ableitungsfunktion und Ableitungsregeln \Rightarrow 132
- 9.4 Untersuchung von Funktionen \Rightarrow 139
- Klassenarbeiten 1–2 \Rightarrow 145

Lösungen \Rightarrow 147

Stichwortfinder \Rightarrow 176

1 Quadratische Funktionen

1.1 Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

Eine Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ heißt **allgemeine Form** der quadratischen Gleichung.

Jede quadratische Gleichung kann in die **Normalform** übergeführt werden, indem jeder Summand durch a dividiert wird.
Normalform: $x^2 + px + q = 0$

Die **Gleichung** $x^2 = 0$ hat nur eine (doppelte) Lösung $x_1 = x_2 = 0$, d.h., $L = \{0\}$

Rein quadratische Gleichungen:

Gleichungen der Form $x^2 - q = 0$; $q > 0$ durch „Wurzelziehen“ lösen:

$$x^2 - q = 0 \quad | \sqrt{}$$

$$(x + \sqrt{q})(x - \sqrt{q}) = 0$$

$$x_1 = \sqrt{q}; x_2 = -\sqrt{q} \text{ d.h., } L = \{\sqrt{q}; -\sqrt{q}\}$$

Eine Abkürzung zu diesem Weg findest du im Wissen⁺-Kasten auf S. 7.

Merke: Falls $q < 0$, gibt es keine Lösung.

Gemischt quadratische Gleichungen:

Gleichungen der Form $x^2 + px = 0$ durch Faktorisieren („Ausklammern“) lösen:

$$x^2 + px = 0$$

$$x \cdot (x + p) = 0$$

$$x = 0 \text{ oder } x + p = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = -p; \text{ d.h., } L = \{0; -p\}$$

Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ versucht man mithilfe der 1. oder 2. binomischen Formel umzuformen. Dies ist nur möglich, wenn

$$q = \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

sonst muss man eine **quadratische Ergänzung** vornehmen. Dies geht so:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\text{Division durch } a \text{ ergibt } x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

$$\text{Vereinfachen der Koeffizienten } \frac{b}{a} = p$$

$$\text{und } \frac{c}{a} = q \text{ führt auf die Normalform.}$$

$$\text{allgemeine Form: } 5x^2 + 10x + 5 = 0 \quad | : 5$$

$$\text{Normalform: } x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 - 3^2 = 0$$

$$(x + 3) \cdot (x - 3) = 0$$

$$x_1 = -3; x_2 = 3;$$

$$\text{d.h., } L = \{-3; 3\}$$

3. binomische Formel

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Die Gleichung $x^2 + 9 = 0$ hat keine Lösung; denn sie ist gleichbedeutend mit $x^2 = -9$ und die Wurzel aus einer negativen Zahl ist nicht definiert.

$$4x^2 + 12x = 0 \quad | : 4$$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x \cdot (x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = -3; \text{ d.h., } L = \{0; -3\}$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \quad | \sqrt{}$$

$$(x + 2)^2 = 0$$

$$(x + 2) \cdot (x + 2) = 0$$

$$L = \{-2\}$$

1. binomische Formel

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

2. binomische Formel

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$x^2 + px + q = 0 \mid -q$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x = -q \mid + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ (quadrat. Ergänzung)}$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \mid 1. \text{ binom. Formel}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] = 0 \quad \mid 3. \text{ binom. Formel}$$

$$\left[\left(x + \frac{p}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right] \cdot \left[\left(x + \frac{p}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right]$$

$$= 0$$

Einer der Faktoren muss null sein:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0 \text{ oder}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0$$

Es ergibt sich die Lösungsformel für die Normalform einer quadratischen Gleichung, die sogenannte **p-q-Formel**, mit der du quadratische Gleichungen in der Normalform lösen kannst:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}; x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$L = \{x_1; x_2\}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = D \text{ heißt } \mathbf{Diskriminante}.$$

D „entscheidet“ über die Anzahl der Lösungen.

Beachte: Eine quadratische Gleichung in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ musst du zuerst in die Normalform überführen (alle Summanden durch a dividieren), bevor du die p-q-Formel anwenden kannst!

Löse die Gleichung $x^2 + 6x + 5 = 0$.

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \mid -5$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x = -5 \mid + 3^2 \text{ (quadrat. Ergänzung)}$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = 3^2 - 5 \mid 1. \text{ binomische Formel}$$

$$(x + 3)^2 = 3^2 - 5$$

$$(x + 3)^2 - (3^2 - 5) = 0 \quad \mid 3. \text{ binomische Formel}$$

$$[(x + 3) + \sqrt{3^2 - 5}] \cdot [(x + 3) - \sqrt{3^2 - 5}]$$

$$= 0$$

Einer der Faktoren muss null sein:

$$[(x + 3) + \sqrt{3^2 - 5}] = 0 \text{ oder}$$

$$[(x + 3) - \sqrt{3^2 - 5}] = 0$$

$$x_1 = -3 + \sqrt{3^2 - 5} \quad x_2 = -3 - \sqrt{3^2 - 5}$$

$$x_1 = -3 + \sqrt{4} = -1 \quad x_2 = -3 - \sqrt{4} = -5$$

$$L = \{-1; -5\}$$

Anzahl der Lösungen:

$D = 0$: eine Lösung

$D > 0$: zwei Lösungen

$D < 0$: keine reelle Lösung

$$6x^2 - 12x - 18 = 0 \mid : 6$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = -\frac{-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 3} = 1 + \sqrt{4} = 3$$

$$x_2 = -\frac{-2}{2} - \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 3} = 1 - \sqrt{4} = -1$$

$$x_1 = 3; x_2 = -1$$

1 Quadratische Funktionen



Bestimme die Lösungsmenge der Gleichungen. Verwende gegebenenfalls auch das Wissen aus dem Wissen⁺-Kasten unten.

a) $x^2 - 16 = 0$

•

b) $5a^2 = 25$

•

c) $(y - 2) \cdot (y + 2) = 0$

•

d) $u \cdot (u - 3) = 0$

•

e) $7x^2 + 28x = 0$

•

f) $4z^2 = 8z$

•

Wissen⁺Rechenabkürzung für $x^2 - q = 0$

Kennst du den Begriff „Betrag einer Zahl“, so verwende diesen kurzen Rechenweg:

$$x^2 = q$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{q}$$

$$|x| = \sqrt{q}$$

$$x_1 = +\sqrt{q}; x_2 = -\sqrt{q}; L = \{\sqrt{q}; -\sqrt{q}\}$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$

$$|x| = \sqrt{25}$$

$$x_1 = +\sqrt{25}; x_2 = -\sqrt{25}; L = \{5; -5\}$$



Ein schmales rechteckiges Gartenstück hat die Seitenlängen 2,5 m und 8,1 m. Berechne in deinem Übungsheft die Seitenlängen eines quadratischen Gartenstücks, das den gleichen Flächeninhalt hat.

Üben

1 Quadratische Funktionen

Wissen+

Satz von Vieta

Sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so gilt:

$$x_1 + x_2 = -p \text{ und } x_1 \cdot x_2 = q$$

- Mithilfe des Satzes von Vieta kannst du
- die **zweite Lösung** bestimmen, wenn dir eine Lösung bekannt ist (1),
 - leicht eine **Probe** durchführen, wenn du die Lösungen einer quadratischen Gleichung bestimmt hast (2),
 - **p und q** berechnen, wenn du die Lösungen, aber nicht die Gleichung kennst. Damit kannst du schließlich eine **Gleichung aufstellen** (3).

(1) Bestimme die zweite Lösung der Gleichung $x^2 + x - 6 = 0$; du kennst $x_1 = 2$.

Es gilt: $2 + x_2 = -1$ und $2 \cdot x_2 = -6$;

$$\text{es folgt: } x_2 = \frac{-6}{2} = -3$$

(2) Prüfe, ob $x_1 = 7$ und $x_2 = -1$ Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 6x - 7 = 0$ sind:

$$7 + (-1) = 6 \text{ und}$$

$$7 \cdot (-1) = -7$$

(3) Stelle eine quadratische Gleichung auf, deren Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 1,5$ sind.

$$2 + 1,5 = 3,5; \text{ also } p = -3,5 \text{ und}$$

$$2 \cdot 1,5 = 3; \text{ also } q = 3$$

Die Gleichung in der Normalform lautet:
 $x^2 - 3,5x + 3 = 0$

3

Gegeben ist die Gleichung $x^2 + 8x + 9 = 0$. Eine Lösung ($x_1 = -1$) ist bekannt. Bestimme mithilfe des Satzes von Vieta in deinem Übungsheft die zweite Lösung.

Übung 4

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 8x - 20 = 0 & |+ & \\ x^2 + 8x = 20 & |+ & \\ \hline & & \end{array} \quad \text{(quadratische Ergänzung)}$$

$$x^2 + 8x + 16 = 20 + 16 \quad \text{(1. binomische Formel)}$$

$$(x + \quad)^2 = 36 \quad |- 36$$

$$(x + \quad)^2 - 6^2 = 0 \quad \text{(3. binomische Formel)}$$

$$[(x + 4) + \quad] \cdot [(x + 4) - \quad] = 0$$

$$[(x + 4) + \quad] = 0 \text{ oder } [(x + 4) - \quad] = 0$$

$$x = \quad \text{oder } x = \quad$$

1 Quadratische Funktionen

*** Löse die Gleichungen mithilfe der quadratischen Ergänzung.
Arbeite in deinem Übungsheft wie in Übung 4.

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$

b) $x^2 + 8x = -12$

Wissen+

Zerlegung in Linearfaktoren

Jede quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ mit den Lösungen x_1 und x_2 lässt sich in **Linearfaktoren** zerlegen:
 $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$
 Diese Schreibweise einer quadratischen Gleichung heißt **Produktdarstellung**.

Zerlege die quadratische Gleichung $x^2 - x - 12 = 0$ in Linearfaktoren.

Mithilfe der p-q-Formel berechnest du:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 12}$$

$$x_1 = 0,5 + \sqrt{12,25} = 4$$

$$x_2 = 0,5 - \sqrt{12,25} = -3$$

Du erhältst:

$$x^2 - x - 12 = (x - 4) \cdot (x + 3) = 0$$

*** Löse die quadratischen Gleichungen mithilfe der p-q-Formel. Gib die quadratische Gleichung auch in Produktdarstellung an. Beachte: Gegebenenfalls musst du einen gemeinsamen Faktor vor der Zerlegung ausklammern.

a) $x^2 + 6x + 5 = 0$

$$x^2 + 6x + 5$$

$$= (x \quad) \cdot (x \quad)$$

b) $12x^2 - 24x = 36$

$$12x^2 - 24x - 36$$

$$= 12 \cdot (x \quad) \cdot (x \quad)$$

c) $10x - 5 = 5x^2$

d) $0,5x^2 - 0,5x - 10 = 0$

1.2 Graphen quadratischer Funktionen

Eine Funktion, deren Funktionsgleichung durch Äquivalenzumformungen in die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) gebracht werden kann, heißt **quadratische Funktion**. Der Graph einer quadratischen Funktion heißt **Parabel**.

$$f(x) = x^2 \quad (a = 1; b = 0; c = 0)$$

Der Graph dieser Funktion heißt **Normalparabel** und ist

- nach oben geöffnet,
- achsensymmetrisch zur y -Achse, d. h., $f(-x) = f(x)$,
- links von der y -Achse (also für $x < 0$) monoton fallend, rechts von der y -Achse (also für $x > 0$) monoton steigend.

Scheitelpunkt: $S(0|0)$

S ist der **tiefste Punkt** des Graphen.

$$f(x) = a \cdot x^2$$

Der Graph entsteht durch **Stauchung** oder **Streckung** der Normalparabel um den Faktor a :

- für $a > 1$: **gestreckt** (Parabel enger)
- für $0 < a < 1$: **gestaucht** (Parabel weiter)

Scheitelpunkt: $S(0|0)$

S ist der **tiefste Punkt** des Graphen.

Für $a < 0$ ist der Graph zusätzlich zur Streckung oder Stauchung gespiegelt an der x -Achse. In diesem Fall ist S der **höchste Punkt** des Graphen.

$$f(x) = x^2 + c$$

Der Graph entsteht durch **Verschiebung** der Normalparabel um c Einheiten entlang der y -Achse.

- Für $c > 0$: Verschiebung **nach oben**
- Für $c < 0$: Verschiebung **nach unten**

Scheitelpunkt: $S(0|c)$

S ist der **tiefste Punkt** des Graphen.

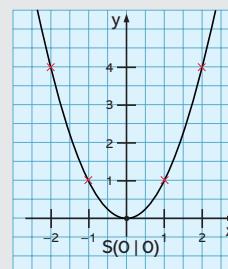
Schreibweisen:

Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$

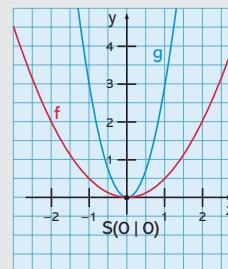
Normalform: $f(x) = x^2 + px + q$

Scheitelpunktform: $f(x) = (x - d)^2 + e$

Graph zu $f(x) = x^2$



Graphen zu $f(x) = 0,5x^2$ und $g(x) = 3x^2$



Graphen zu $f(x) = x^2 + 2,5$ und $g(x) = x^2 - 1$

