10. Klasse • Mathematik

DUDEN

WISSEN • ÜBEN • TESTEN

Mathematik

10. KLASSE

So lernst du mit diesem Buch:

Wissen

Hier wiederholst du Schritt für Schritt, was du zu jedem Lernthema wissen musst, um richtig vorbereitet zu sein.

In der linken Spalte: Regeln und Arbeitsanleitungen

In der rechten Spalte: Beispiele und Veranschaulichungen

Üben

Hier wendest du das Gelernte auf typische Übungsaufgaben an.

Damit du deinen Lernfortschritt selbst überwachen kannst, gibt es verschiedene Schwierigkeitsstufen:

* Übungen zum Wiederholen des Lernstoffs

** Übungen zu Standardaufgaben und für die nötige Sicherheit vor der Klassenarbeit

*** Übungen zu besonderen und anspruchsvolleren Problemen

Wissen+

Diese Kästen geben dir zusätzliche Informationen, Tipps und Hinweise für das Bearbeiten der Übungen.

Testen

Hier testest du dein Wissen mit vermischten und übergreifenden Aufgaben eines Kapitels.

Klassenarbeit

Alle Lernthemen eines Kapitels werden wie in einer echten Klassenarbeit abgefragt.

45 Minuten

Die Minutenangabe sagt dir, wie viel Zeit du für die Bearbeitung einer Klassenarbeit hast.

DUDEN

WISSEN • ÜBEN • TESTEN

Mathematik

10. KLASSE

5., aktualisierte Auflage

Dudenverlag
Berlin

Redaktionelle Leitung Juliane von Laffert
Redaktion Ulrike Klein
Autoren und Autorinnen Karin Hantschel, Katja Roth, Lutz Schreiner, Anna Speiser, Manuela Stein

Herstellung Ditte Hoffmann
Layoutidee Lilli Messina, Berlin
Illustration Carmen Strzelecki
Grafik pro.grafik, Ostfildern
Umschlaggestaltung 2issue, München
Umschlagabbildung Thomas Gilke
Layout / technische Umsetzung LemmeDESIGN, Berlin

www.duden.de
www.cornelsen.de

5. Auflage, 1. Druck 2023

Druck: H. Heenemann, Berlin

ISBN 978-3-411-72585-4

PEFC/04-31-1156

PEFC zertifiziert
Dieses Produkt stammt aus nachhaltig bewirtschafteten Wäldern und kontrollierten Quellen.

www.pefc.de

Inhalt

Inhalt

1 Quadratische Funktionen

1.1 Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

Eine Gleichung $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ mit $a \neq 0$ heißt **allgemeine Form** der quadratischen Gleichung.

Jede quadratische Gleichung kann in die **Normalform** übergeführt werden, indem jeder Summand durch a dividiert wird.
Normalform: $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$

$ax^2 + bx + c = 0$
Division durch a ergibt $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Vereinfachen der Koeffizienten $\frac{b}{a} = p$

und $\frac{c}{a} = q$ führt auf die Normalform.

allgemeine Form: $5x^2 + 10x + 5 = 0 \mid : 5$
Normalform: $x^2 + 2x + 1 = 0$

Die **Gleichung** $\mathbf{x^2 = 0}$ hat nur eine (doppelte) Lösung $x_1 = x_2 = 0$, d. h., $L = \{0\}$

Rein quadratische Gleichungen:
Gleichungen der Form $\mathbf{x^2 - q = 0; q > 0}$ durch „Wurzelziehen" lösen:
$x^2 - q = 0 \quad | \text{ 3. binomische Formel}$

$(x + \sqrt{q})(x - \sqrt{q}) = 0$

$x_1 = \sqrt{q}$; $x_2 = -\sqrt{q}$ d. h., $L = \{\sqrt{q}; -\sqrt{q}\}$

Eine Abkürzung zu diesem Weg findest du im Wissen⁺-Kasten auf S. 7.

Merke: Falls $q < 0$, gibt es keine Lösung.

$x^2 - 9 = 0$
$x^2 - 3^2 = 0$
$(x + 3) \cdot (x - 3) = 0$
$x_1 = -3$; $x_2 = 3$;
d. h., $L = \{-3; 3\}$

3. binomische Formel
$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

Die Gleichung $x^2 + 9 = 0$ hat keine Lösung; denn sie ist gleichbedeutend mit $x^2 = -9$ und die Wurzel aus einer negativen Zahl ist nicht definiert.

Gemischt quadratische Gleichungen:
Gleichungen der Form $\mathbf{x^2 + px = 0}$ durch Faktorisieren („Ausklammern") lösen:
$x^2 + px = 0$
$x \cdot (x + p) = 0$
$x = 0$ oder $x + p = 0$
$x_1 = 0$; $x_2 = -p$; d. h., $L = \{0; -p\}$

$4x^2 + 12x = 0 \quad |: 4$
$x^2 + 3x = 0$
$x \cdot (x + 3) = 0$
$x_1 = 0$; $x_2 = -3$; d. h., $L = \{0; -3\}$

Gleichungen der Form $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$ versucht man mithilfe der 1. oder 2. binomischen Formel umzuformen. Dies ist nur möglich, wenn

$q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$,

sonst muss man eine **quadratische Ergänzung** vornehmen. Dies geht so:

$x^2 + 4x + 4 = 0 \quad | \text{ 1. binom. Formel}$
$(x + 2)^2 = 0$
$(x + 2) \cdot (x + 2) = 0$
$L = \{-2\}$

1. binomische Formel
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

2. binomische Formel
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

1 Quadratische Funktionen

$x^2 + px + q = 0 \quad |- q$

$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x = -q \quad |+ \left(\frac{p}{2}\right)^2$ (quadrat. Ergänzung)

$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad |$ 1. binom. Formel

$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] = 0 \quad |$ 3. binom. Formel

$\left[\left(x + \frac{p}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right] \cdot \left[\left(x + \frac{p}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right]$

$= 0$

Einer der Faktoren muss null sein:

$\left(x + \frac{p}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0$ oder

$\left(x + \frac{p}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0$

Es ergibt sich die Lösungsformel für die Normalform einer quadratischen Gleichung, die sogenannte **p-q-Formel,** mit der du quadratische Gleichungen in der Normalform lösen kannst:

$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$; $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$L = \{x_1; x_2\}$

Löse die Gleichung $x^2 + 6x + 5 = 0$.

$x^2 + 6x + 5 = 0 \quad |- 5$

$x^2 + 2 \cdot 3x = -5 \quad |+ 3^2$ (quadrat. Ergänzung)

$x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = 3^2 - 5 \quad |$ 1. binomische Formel

$(x + 3)^2 = 3^2 - 5$

$(x + 3)^2 - (3^2 - 5) = 0 \quad |$ 3. binomische Formel

$\left[(x + 3) + \sqrt{3^2 - 5}\right] \cdot \left[(x + 3) - \sqrt{3^2 - 5}\right]$

$= 0$

Einer der Faktoren muss null sein:

$\left[(x + 3) + \sqrt{3^2 - 5}\right] = 0$ oder

$\left[(x + 3) - \sqrt{3^2 - 5}\right] = 0$

$x_1 = -3 + \sqrt{3^2 - 5}$ $\quad x_2 = -3 - \sqrt{3^2 - 5}$

$x_1 = -3 + \sqrt{4} = -1$ $\quad x_2 = -3 - \sqrt{4} = -5$

$L = \{-1; -5\}$

Der Ausdruck unter der Wurzel $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = D$ heißt **Diskriminante.**

D „entscheidet" über die Anzahl der Lösungen.

Anzahl der Lösungen:
- $D = 0$: eine Lösung
- $D > 0$: zwei Lösungen
- $D < 0$: keine reelle Lösung

Beachte: Eine quadratische Gleichung in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ musst du zuerst in die Normalform überführen (alle Summanden durch a dividieren), bevor du die p-q-Formel anwenden kannst!

$6x^2 - 12x - 18 = 0 \quad |: 6$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_1 = -\frac{-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 3} = 1 + \sqrt{4} = 3$

$x_2 = -\frac{-2}{2} - \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 3} = 1 - \sqrt{4} = -1$

$x_1 = 3$; $x_2 = -1$

1 Quadratische Funktionen

Bestimme die Lösungsmenge der Gleichungen. Verwende gegebenenfalls auch das Wissen aus dem Wissen⁺-Kasten unten.

a) $x^2 - 16 = 0$

b) $5a^2 = 25$

c) $(y - 2) \cdot (y + 2) = 0$

d) $u \cdot (u - 3) = 0$

e) $7x^2 + 28x = 0$

f) $4z^2 = 8z$

Wissen⁺

Rechenabkürzung für $x^2 - q = 0$

Kennst du den Begriff „Betrag einer Zahl“, so verwende diesen kurzen Rechenweg:

$x^2 = q$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{q}$
$|x| = \sqrt{q}$
$x_1 = +\sqrt{q}$; $x_2 = -\sqrt{q}$; $L = \{\sqrt{q}; -\sqrt{q}\}$

$x^2 - 25 = 0$
$x^2 = 25$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$
$|x| = \sqrt{25}$
$x_1 = +\sqrt{25}$; $x_2 = -\sqrt{25}$; $L = \{5; -5\}$

Ein schmales rechteckiges Gartenstück hat die Seitenlängen 2,5 m und 8,1 m. Berechne in deinem Übungsheft die Seitenlängen eines quadratischen Gartenstücks, das den gleichen Flächeninhalt hat.

Üben

1 Quadratische Funktionen

Wissen+

Satz von Vieta
Sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so gilt:
$x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$
Mithilfe des Satzes von Vieta kannst du
- die **zweite Lösung** bestimmen, wenn dir eine Lösung bekannt ist (1),
- leicht eine **Probe** durchführen, wenn du die Lösungen einer quadratischen Gleichung bestimmt hast (2),
- **p und q** berechnen, wenn du die Lösungen, aber nicht die Gleichung kennst. Damit kannst du schließlich eine **Gleichung aufstellen** (3).

(1) Bestimme die zweite Lösung der Gleichung $x^2 + x - 6 = 0$; du kennst $x_1 = 2$.
Es gilt: $2 + x_2 = -1$ und $2 \cdot x_2 = -6$;
es folgt: $x_2 = \frac{-6}{2} = -3$

(2) Prüfe, ob $x_1 = 7$ und $x_2 = -1$ Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 6x - 7 = 0$ sind:
$7 + (-1) = 6$ und
$7 \cdot (-1) = -7$

(3) Stelle eine quadratische Gleichung auf, deren Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 1{,}5$ sind.
$2 + 1{,}5 = 3{,}5$; also $p = -3{,}5$ und
$2 \cdot 1{,}5 = 3$; also $q = 3$
Die Gleichung in der Normalform lautet:
$x^2 - 3{,}5x + 3 = 0$

3 ⭑ Gegeben ist die Gleichung $x_2 \cdot 8x \cdot 9 = 0$. Eine Lösung ($x_1 = -1$) ist bekannt. Bestimme mithilfe des Satzes von Vieta in deinem Übungsheft die zweite Lösung.

4 ⭑ Löse die Gleichung mithilfe der quadratischen Ergänzung.

$x^2 + 8x - 20 = 0 \quad | + \square$
$x^2 + 8x = 20 \quad | + \square$ (quadratische Ergänzung)
$x^2 + 8x + 16 = 20 + 16$ (1. binomische Formel)
$(x + \square)^2 = 36 \quad | - 36$
$(x + \square)^2 - 6^2 = 0$ (3. binomische Formel)
$[(x + 4) + \square] \cdot [(x + 4) - \square] = 0$
$[(x + 4) + \square] = 0$ oder $[(x + 4) - \square] = 0$
$x = \square$ oder $x = \square$

1 Quadratische Funktionen

Übung 5

Löse die Gleichungen mithilfe der quadratischen Ergänzung. Arbeite in deinem Übungsheft wie in Übung 4.

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$

b) $x^2 + 8x = -12$

Wissen+

Zerlegung in Linearfaktoren

Jede quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ mit den Lösungen x_1 und x_2 lässt sich in **Linearfaktoren** zerlegen:

$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$

Diese Schreibweise einer quadratischen Gleichung heißt **Produktdarstellung.**

Zerlege die quadratische Gleichung $x^2 - x - 12 = 0$ in Linearfaktoren.

Mithilfe der p-q-Formel berechnest du:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 12}$$

$$x_1 = 0{,}5 + \sqrt{12{,}25} = 4$$

$$x_2 = 0{,}5 - \sqrt{12{,}25} = -3$$

Du erhältst:

$x^2 - x - 12 = (x - 4) \cdot (x + 3) = 0$

Übung 6

Löse die quadratischen Gleichungen mithilfe der p-q-Formel. Gib die quadratische Gleichung auch in Produktdarstellung an. Beachte: Gegebenenfalls musst du einen gemeinsamen Faktor vor der Zerlegung ausklammern.

a) $x^2 + 6x + 5 = 0$

$x^2 + 6x + 5$

$= (x \quad\quad) \cdot (x \quad\quad)$

b) $12x^2 - 24x = 36$

$12x^2 - 24x - 36$

$= 12 \cdot (x \quad\quad) \cdot (x \quad\quad)$

c) $10x - 5 = 5x^2$

d) $0{,}5x^2 - 0{,}5x - 10 = 0$

Wissen

1 Quadratische Funktionen

1.2 Graphen quadratischer Funktionen

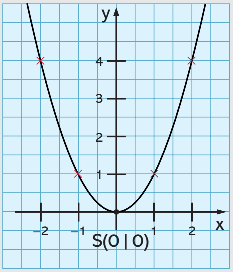
Eine Funktion, deren Funktionsgleichung durch Äquivalenzumformungen in die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ gebracht werden kann, **heißt quadratische Funktion.** Der Graph einer quadratischen Funktion heißt **Parabel.**

Schreibweisen:
Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$
Normalform: $f(x) = x^2 + px + q$
Scheitelpunktform: $f(x) = (x - d)^2 + e$

$f(x) = x^2$ $(a = 1;\ b = 0;\ c = 0)$
Der Graph dieser Funktion heißt **Normalparabel** und ist
- nach oben geöffnet,
- achsensymmetrisch zur y-Achse, d. h., $f(-x) = f(x)$,
- links von der y-Achse (also für $x < 0$) monoton fallend, rechts von der y-Achse (also für $x > 0$) monoton steigend.

Scheitelpunkt: $S(0\,|\,0)$
S ist der **tiefste Punkt** des Graphen.

Graph zu $f(x) = x^2$



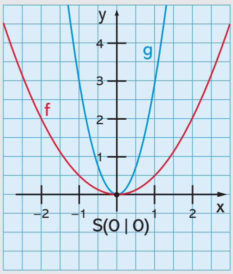
x	f(x)
0	0
1	1
2	4

$f(x) = a \cdot x^2$
Der Graph entsteht durch **Stauchung** oder **Streckung** der Normalparabel um den Faktor a:
- für $a > 1$: **gestreckt** (Parabel enger)
- für $0 < a < 1$: **gestaucht** (Parabel weiter)

Scheitelpunkt: $S(0\,|\,0)$
S ist der **tiefste Punkt** des Graphen.

Für $a < 0$ ist der Graph zusätzlich zur Streckung oder Stauchung gespiegelt an der x-Achse. In diesem Fall ist S der **höchste Punkt** des Graphen.

Graphen zu $f(x) = 0{,}5x^2$ und $g(x) = 3x^2$



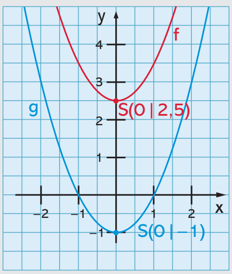
x	f(x)	g(x)	x^2
0	0	0	0
1	0,5	3	1
2	2	12	4
−1	0,5	3	1

· 3
· 0,5

$f(x) = x^2 + c$
Der Graph entsteht durch **Verschiebung** der Normalparabel um c Einheiten **entlang der y-Achse.**
- Für $c > 0$: Verschiebung **nach oben**
- Für $c < 0$: Verschiebung **nach unten**

Scheitelpunkt: $S(0\,|\,c)$
S ist der **tiefste Punkt** des Graphen.

Graphen zu $f(x) = x^2 + 2{,}5$ und $g(x) = x^2 - 1$



x	f(x)	g(x)	x^2
0	2,5	−1	0
1	3,5	0	1
2	6,5	3	4
−1	3,5	0	1

−1
+ 2,5