Formeln zu
Mathematik für die Fachhochschulreife

Bearbeitet von B. Grimm

4. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 85129

Autoren:

Bernhard Grimm Leonberg

Lektorat: Bernhard Grimm

Bildentwürfe: Bernhard Grimm

Bilderstellung: YellowHand, 73257 Köngen, www.yellowhand.de

4. Auflage 2023, korrigierter Nachdruck 2024
Druck 5 4 3 2

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

ISBN: 978-3-8085-8515-3

Ursprüngl. Satz und Grafik: YellowHand, 73257 Köngen
Bearbeitung ab 4. Auflage: Typework Layoutsatz & Grafik GmbH, 86153 Augsburg

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, Radevormwald

Druck: Plump Druck und Medien GmbH, 53619 Rheinbreitbach

Vorwort zur 1. Auflage:

Die Formelsammlung enthält hauptsächlich die Formeln, die zum Erwerb der Fachhochschulreife benötigt werden. Formeln der Grundlagenmathematik sind auf das Wesentliche reduziert enthalten.

Vorwort zur 2. Auflage:

Es sind nur kleine Änderungen vorgenommen worden, die auf Verbesserungsvorschlägen unserer Leser beruhen. Einige wenige Fehler haben wir natürlich auch korrigiert.

Vorwort zur 3. Auflage:

Neu ist das Kapitel Stochastik. Die Reihenfolge der Kapitel Vektorrechnung und Analysis wurde getauscht.

Ergänzt wurden die Volumenformeln für Pyramiden sowie in der Vektorrechnung die Formeln für Streckenteilungen und spitze Winkel.

Vorwort zur 4. Auflage:

Neu ist das Kapitel Kostenrechnen. Alle Variablen werden kursiv dargestellt.
Die Ergebnismenge S in der Stochastik lautet jetzt Ω.

Ihre Meinung interessiert uns!

Teilen Sie uns Ihre Verbesserungsvorschläge, Ihre Kritik aber auch Ihre Zustimmung zum Buch mit.

Schreiben Sie uns an die E-Mail-Adresse: **lektorat@europa-lehrmittel.de**

Die Autoren und der Verlag Europa-Lehrmittel — Frühjahr 2023

Basiswissen

Analysis

Vektorrechnung

Stochastik

Kostenrechnung

Bruchrechnen

Variablen $\in \mathbb{Z}$; Nenner $\neq 0$

Addition und Subtraktion

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$$

Multiplikation

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Division

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Klammerrechnen

Variablen $\in \mathbb{R}$

Distributivgesetz:

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$

Assoziativgesetz:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

1. binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. binomische Formel

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Potenzrechnen

$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $n, m \in \mathbb{N}$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \left(a^n\right)^m = a^{m \cdot n} \qquad a^0 = 1 \qquad a^1 = a$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

$$(a-b)^n = \begin{cases} +(b-a)^n & \text{für gerades } n \\ -(b-a)^n & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

Merke!

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \quad \text{aber} \quad 4a = a + a + a + a$$

Merke!

$$(-a)^2 = a^2 > 0 \quad \text{aber} \quad -a^2 = -(a^2) < 0$$

Wurzelrechnen

$a, b \in \mathbb{R}_+$; $c \in \mathbb{R}$; Nenner $\neq 0$

Das Ergebnis der Quadratwurzel ist für D = R stets größer gleich null: $\sqrt{a^2} = |a|$ aber: $\sqrt[3]{c^3} = c$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Logarithmen

$a, b, c \in \mathbb{R}_+$; $n \in \mathbb{R}$; Nenner $\neq 0$

Der Logarithmus ist die Hochzahl n, mit der die Basis a potenziert werden muss, um den Wert b zu erhalten.

$$a^n = b \Leftrightarrow n = \log_a b$$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \qquad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \qquad \log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Zehnerlogarithmus (am TR: log) Basis $a = 10$

$$\log_{10} b = \lg b$$

Natürlicher Logarithmus (am TR: ln) Basis $a = \mathrm{e}$

$$\log_{\mathrm{e}} b = \ln b$$

Binärer Logarithmus (nicht am TR) Basis $a = 2$

$$\log_2 b = \mathrm{lb}\, b$$

TR = Taschenrechner
Die Umkehrfunktion von $\ln x$ ist e^x. Es gilt:

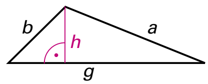
$$\ln \mathrm{e}^n = n \quad \text{und} \quad \mathrm{e}^{\ln a} = a \quad \text{mit} \quad \mathrm{e} = 2{,}718281828459\ldots$$

Flächenformeln

Fläche = A

Dreieck

$\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h}$ $\quad A = \frac{1}{2} \cdot$ Grundseite · Höhe

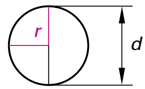


Kreis

$\boxed{A = \pi \cdot r^2}$ $\quad r$ = Radius

Umfang: $\boxed{U = 2\pi \cdot r = \pi \cdot d}$

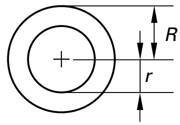
Durchmesser: $\boxed{d = 2 \cdot r}$



Kreisring

$\boxed{A = \pi \cdot (R^2 - r^2)}$

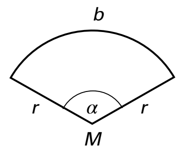
R = Außenradius
r = Innenradius



Kreissektor (Ausschnitt)

$\boxed{A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}}$ $\quad \boxed{A = \frac{1}{2} b \cdot r}$

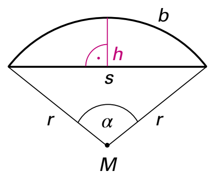
b = Bogenlänge



Kreis-segment (Abschnitt)

$\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot [b \cdot r - s \cdot (r - h)]}$

Sehnenlänge $\boxed{s = 2 \cdot \sqrt{2h \cdot r - h^2}}$

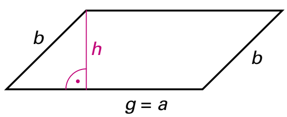


Parallelo-gramm

A = Grundseite · Höhe $\quad \boxed{A = g \cdot h}$

Spezialfälle: Rechteck $\quad \boxed{A = a \cdot b}$

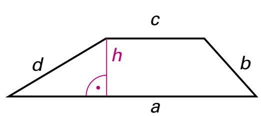
Quadrat $\quad \boxed{A = a^2}$



Trapez

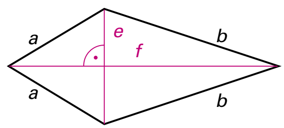
$\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h}$ $\quad h$ = Höhe; $b \neq d$

a, c = parallele gegenüberliegende Seiten



Drachen

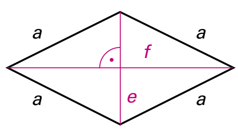
$\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f}$ $\quad e$, f = senkrecht aufeinander stehende Diagonalen



Raute

$\boxed{A = g \cdot h = a \cdot h}$ $\quad \boxed{A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f}$

Die Raute ist gleichzeitig Drachen und Parallelogramm. Alle Seiten sind gleich lang.



Volumenformeln und Oberflächenformeln

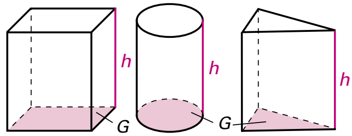
Volumen = V; Oberfläche = O

gleichmäßig dicke Körper

$\boxed{V = G \cdot h}$ V = Grundfläche · Höhe

$\boxed{O = 2G + M}$ M = Mantelfläche

Zylinderoberfläche: $\boxed{O = 2\pi \cdot r \cdot (r + h)}$



Quader Zylinder Prisma

spitze Körper

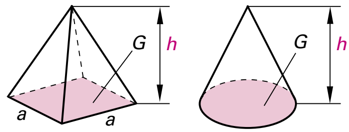
$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h}$ $V = \frac{1}{3}$ · Grundfläche · Höhe

Pyramide: $\boxed{O = a^2 + a \cdot \sqrt{a^2 + 4h^2}}$

$\boxed{M = a \cdot \sqrt{a^2 + 4h^2}}$

Kegel: $\boxed{O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}}$

$\boxed{M = \pi r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}}$

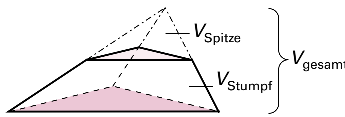


Pyramide Kegel

stumpfe Körper

$\boxed{V_{\text{Stumpf}} = V_{\text{gesamt}} - V_{\text{Spitze}}}$

z. B. für Pyramidenstumpf, Kegelstumpf

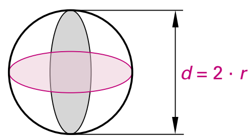


Kugel

$\boxed{V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$

Oberfläche: $\boxed{O = \pi \cdot d^2}$

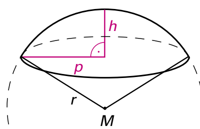
Umfang: $\boxed{U = 2\pi \cdot r}$



Kugelsegment (Abschnitt)

$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)}$ $\boxed{O = \pi h(4r - h)}$

$\boxed{p^2 = h \cdot (2r - h)}$ p = Grundkreisradius



Winkelmaße

Gradmaß (DEG) und Bogenmaß (RAD)

Gradmaß: $\boxed{\alpha = \frac{180°}{\pi} \cdot \alpha_r}$

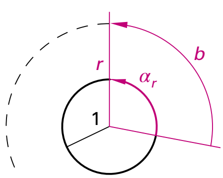
Bogenmaß: $\boxed{\alpha_r = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha}$

Der Halbkreis hat $\alpha = 180°$ (DEG), $\alpha_r = \pi$ (RAD).

$\boxed{\alpha_r = \frac{b}{r}}$

Bogenlänge

$\boxed{b = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha \cdot r}$ $\boxed{b = \alpha_r \cdot r}$



Einheitskreis: $r = 1$; $U = 2\pi$

Das Bogenmaß α_r ist die Bogenlänge am Einheitskreis.

Winkelfunktionen am Dreieck

Dreieck mit rechtem Winkel

$\sin(\text{Winkel}) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ | $\alpha = \arcsin\frac{a}{c}$

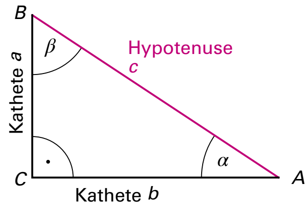
$\cos(\text{Winkel}) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ | $\alpha = \arccos\frac{b}{c}$

$\tan(\text{Winkel}) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$ | $\alpha = \arctan\frac{a}{b}$

sin = Sinus
cos = Cosinus
tan = Tangens



Die Hypotenuse liegt gegenüber dem rechten Winkel.
Die Kathete a ist die Gegenkathete von α und die Ankathete von β.

Umkehrfunktionen (Arkusfunktionen) beim Taschenrechner:

arcsin: $\sin^{-1}$ | arccos: $\cos^{-1}$ | arctan: $\tan^{-1}$

beliebiges Dreieck

Sinussatz:

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$ | $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c}$ | $\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{c}{b}$

Merke! Der Taschenrechner berechnet mit dem Sinussatz nur Winkel bis 90°.

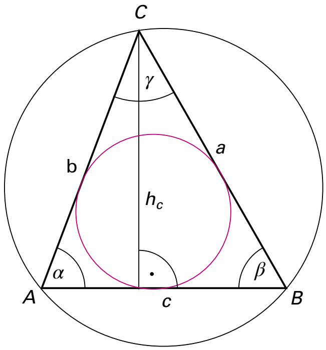
Kosinussatz:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

Umkreis mit Umkreisradius R
Inkreis mit Inkreisradius r



Umkreisradius R:

$R = \frac{a}{2 \cdot \sin\alpha} = \frac{b}{2 \cdot \sin\beta} = \frac{c}{2 \cdot \sin\beta}$

Inkreisradius r:

$r = \frac{b+c-a}{2} \cdot \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{a+b-c}{2} \cdot \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{a+c-b}{2} \cdot \tan\frac{\beta}{2}$

Höhen:

$h_c = b \cdot \sin\alpha$ | $h_a = b \cdot \sin\gamma$ | $h_b = c \cdot \sin\alpha$

Winkelfunktionsbeziehungen

Beziehungen

$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

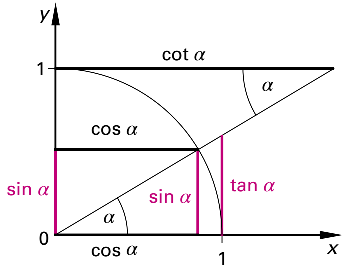
$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$\cos \alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$



cot = Kotangens

Merke! $\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2$

aber: $\sin \alpha^2 = \sin(\alpha)^2$

$\tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

$\cos(3\alpha) = 4\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$

$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$

$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

Werte

Winkel im Gradmaß (DEG)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Winkel im Bogenmaß (RAD)	0	$\frac{1}{6} \cdot \pi$	$\frac{1}{4} \cdot \pi$	$\frac{1}{3} \cdot \pi$	$\frac{1}{2} \cdot \pi$	π	$\frac{3}{2} \cdot \pi$	$2 \cdot \pi$
sin(Winkel)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	1	0	–1	0
cos(Winkel)	1	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tan(Winkel)	0	$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\to \infty$	0	$\to \infty$	0

Lineare Funktion und Gerade

Funktionsgleichung

$\boxed{g:\ y = f(x) = m \cdot x + b}$

m = Steigung; b = y-Achsenabschnitt

Steigung; Änderungsrate

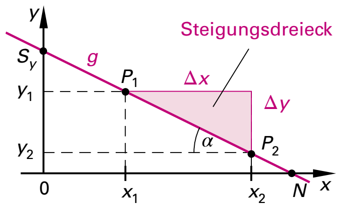
$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$ $\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha}$

α Steigungswinkel

Für die (in x-Richtung) steigenden Geraden ist $\Delta y > 0$.

Für die (in x-Richtung) fallenden Geraden ist $\Delta y < 0$ (Bild).

D = ℝ; W = ℝ



Liegt ein Punkt $P(x_P|y_P)$ auf g, so ist die Geradengleichung für das Wertepaar $(x_P|y_P)$ erfüllt.

Steigungswinkel

$\boxed{\alpha = \arctan m}$

tan⁻¹ -Taste beim Taschenrechner

Achsenabschnitte

$\boxed{S_y(0|b)}$ $\boxed{N\left(\frac{-b}{m}\middle|0\right)}$ Nullstelle: $\boxed{x_0 = -\frac{b}{m}}$

Quadratische Funktion und Parabel

Funktionsgleichung

Normalform:

$\boxed{p:\ y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$

Für $a = 1$; $b = p$; $c = q$ auch:
$y = x^2 + px + q$

Scheitelform:

$\boxed{p:\ y = f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S}$ mit $S(x_S|y_S)$

D = ℝ;
W = $[y_s; +\infty[$ für $a > 0$;
W = $]-\infty; y_s]$ für $a < 0$

Scheitel S

Scheitelkoordinaten:

$\boxed{x_S = -\frac{b}{2a}}$ $\boxed{y_S = f(x_S) = c - a \cdot x_S^2}$

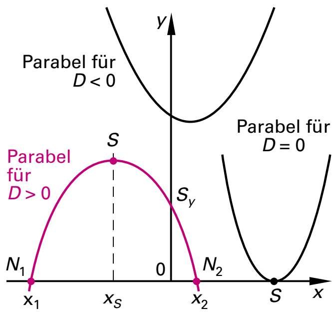
Achsenabschnitte

$\boxed{S_y(0|c)}$ $\boxed{N_1(x_1|0)}$ $\boxed{N_2(x_2|0)}$

Nullstellen

$\boxed{x_{1;\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Diskriminante: $\boxed{D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$



Die Funktion $f(x)$ besitzt für:
$D > 0$ zwei verschiedene Nullstellen,
$D = 0$ doppelte Nullstelle $(x_{1,\,2} = x_S)$,
$D < 0$ keine reellen Nullstellen.

Funktionsgleichung mit Nullstellen

Für $D > 0$ gilt: $\boxed{p:\ y = f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$

Für $D = 0$ gilt: $\boxed{p:\ y = f(x) = a \cdot (x - x_S)^2}$

Potenzfunktion, Parabel und Hyperbel

Funktionsgleichungen

Parabeln:

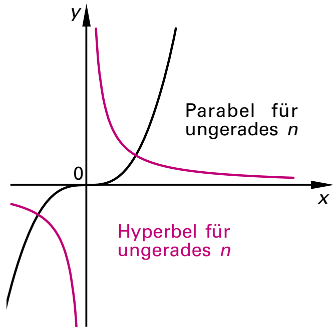
$\boxed{y = f(x) = a \cdot x^n}$ mit $a \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$;

$D = \mathbb{R};\ W = \mathbb{R}$ für ungerades n;
$W = \mathbb{R}_+$ für gerades n

Hyperbeln:

$\boxed{y = f(x) = \frac{a}{x^n}}$ mit $a \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}$;

$D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$;
$W = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ für ungerades n;
$W = \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ für gerades n

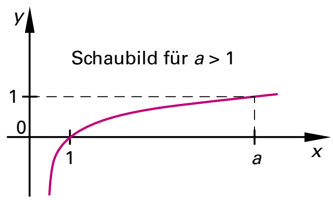


Logarithmusfunktion

Funktionsgleichung

$\boxed{y = f(x) = \log_a x}$ mit $a \in \mathbb{R}_+\backslash\{1\}$;

$D = \mathbb{R}_+;\ W = \mathbb{R}$
Die Schaubilder für alle Werte für a haben den gemeinsamen Punkt (1|0).
Die Schaubilder steigen streng monoton für $a > 1$ und fallen streng monoton für $0 < a < 1$.



Exponentialfunktion

Funktionsgleichung

$\boxed{y = f(x) = a \cdot b^x}$ mit $a \in \mathbb{R};\ b \in \mathbb{R}_+\backslash\{1\}$;

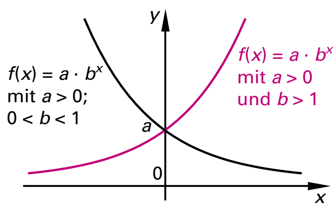
$D = \mathbb{R};\ W = \mathbb{R}_+$.

Die Funktion besitzt keine Nullstellen.

Achsenabschnitte

$\boxed{y = f(0) = a \cdot b^0 = a} \Leftrightarrow \boxed{S_y(0|a)}$

Gemeinsamer Punkt der Schaubilder für alle Werte b ist S_y.



$b > 1$: exponentielles Wachstum
$0 < b < 1$: exponentieller Zerfall

e-Funktion

$\boxed{y = f(x) = a \cdot e^{b \cdot x}}$ mit

$\boxed{e = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots}$;

$a, b \in \mathbb{R};\ D = \mathbb{R};\ W = \mathbb{R}_+$

$\boxed{e^{bx} \text{ hat nur Werte} > 0.}$

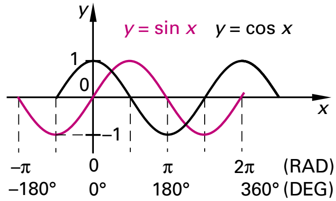
Das Schaubild steigt streng monoton für $a > 0$ und $b > 1$.
Das Schaubild fällt streng monoton für $a > 0$ und $0 < b < 1$.

Trigonometrische Funktionen

Sinus; Kosinus

$\boxed{y = f(x) = \sin x}$ $\boxed{y = f(x) = \cos x}$

mit $D = \mathbb{R}$; $W = [-1; 1]$

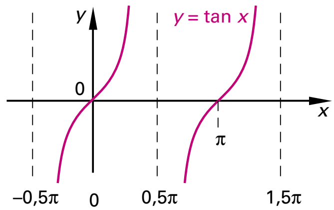


- Nullstellen

Sinus: $\boxed{x_k = k \cdot \pi}$; $k \in \mathbb{Z}$

Kosinus: $\boxed{x_k = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}}$; $k \in \mathbb{Z}$

Die Periode ist $2\pi = 6{,}28...$



Allgemeine Sinusfunktion

$\boxed{y = f(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x - c) + d]}$

mit $D = \mathbb{R}$; $W = [d - a; d + a]$ für $a > 0$
$|a|$ Amplitude; b Frequenz

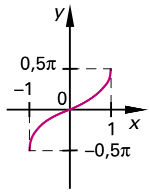
- Nullstellen für $d = 0$

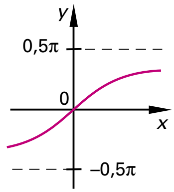
$\boxed{x_k = \frac{k \cdot \pi}{b} + c}$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Periode: $\boxed{p = \frac{2\pi}{b}}$

Verschiebung in x-Richtung: $\boxed{c}$

Verschiebung in y-Richtung: $\boxed{d}$





Tangens

$\boxed{y = f(x) = \tan x}$

mit $D = \mathbb{R} \setminus \{x \mid 2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z}\}$; $W = \mathbb{R}$

- Nullstellen

$\boxed{x_k = k \cdot \pi}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die Periode ist $\pi = 3{,}14...$

Arkusfunktionen

Sie sind die trigonometrischen Umkehrfunktionen

$\boxed{y = f(x) = \arcsin x}$ mit $D = [-1; 1]$; $W = [-0{,}5\pi; 0{,}5\pi]$

$\boxed{y = f(x) = \arccos x}$ mit $D = [-1; 1]$; $W = [0; \pi]$

$\boxed{y = f(x) = \arctan x}$ mit $D = \mathbb{R}$; $W =]-0{,}5\pi; 0{,}5\pi[$

Umkehrfunktion f^{-1} (auch $\bar{f}$)

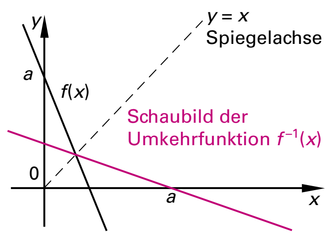
Ermittlung

rechnerisch:

1. Schritt: x und y vertauschen. 2. Schritt: nach y umstellen.

grafisch:

Schaubild an der 1. Winkelhalbierenden spiegeln.



Merke!
Nur streng monoton steigende und streng monoton fallende Funktionen sind im gesamten Intervall $]-\infty; +\infty[$ umkehrbar.

Ableitungen

Ableitung: $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Momentane Änderungsrate: $m_t = f'(x)$

$f(x)$	C	x	$a \cdot x$	x^n	$a \cdot x^n$	$a \cdot e^{bx}$	$\ln x$	$a \cdot \ln(bx)$	$a \cdot b^x$
$f'(x)$	0	1	a	$n \cdot x^{n-1}$	$a \cdot n \cdot x^{n-1}$	$a \cdot b \cdot e^{bx}$	x^{-1}	$a \cdot x^{-1}$	$a \cdot b^x \cdot \ln b$
$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$		$\tan x$	$a \cdot \sin(bx)$	$a \cdot \cos(bx+c)$		$a \cdot \sin^2(bx)$	
$f'(x)$	$\cos x$	$-\sin x$		$\cos^{-2} x$	$a \cdot b \cdot \cos(bx)$	$-a \cdot b \cdot \sin(bx+c)$		$2 \cdot a \cdot b \cdot \sin(bx) \cdot \cos(bx)$	

Ableitungsregeln

Faktorregel

$[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$

Summenregel

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

Produktregel

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Quotientenregel

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Kettenregel

$\{f[g(x)]\}' = f'(g) \cdot g'(x)$ = äußere Ableitung · innere Ableitung

Integrale

Stammfunktionen der Integration $F(x) + C$

$f(x)$	0	1	a	$x^n;\ n \neq -1$	$a \cdot x^n;\ n \neq -1$	$a \cdot e^{bx}$	$\frac{a}{x}$	$\ln x$	a^x
$F(x)$	C	x	$a \cdot x$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{a \cdot x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{a}{b} \cdot e^{bx}$	$a \cdot \ln\lvert x\rvert$	$x \cdot \ln x - x$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$		$\sin(a \cdot x)$	$a \cdot \cos(bx)$	$\sin^2(ax)$		$\tan(ax)$	
$F(x)$	$-\cos x$	$\sin x$		$-\frac{1}{a} \cdot \cos(ax)$	$\frac{a}{b} \cdot \sin(bx)$	$\frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \cdot \sin(2ax)$		$-\frac{1}{a} \cdot \ln[\cos(ax)]$	

Arten

Unbestimmtes Integral

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$

$F(x)$ Stammfunktion für $C = 0$
C Integrationskonstante

Bestimmtes Integral (Flächenintegral)

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

a, b Integrationsgrenzen

Symmetrien

Arten

Achsensymmetrie zur y-Achse

$f(x) = f(-x)$ $\Rightarrow$ $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$

für ganzrationale Funktionen mit geraden Exponenten

Achsensymmetrie zu $x = x_s$

$f(x_s - x) = f(x_s + x)$

Punktsymmetrie zum Ursprung

$f(x) = -f(-x)$ $\Rightarrow$ $f(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^3 + c \cdot x$

für ganzrationale Funktionen mit ungeraden Exponenten

Punktsymmetrie zu $P(x_s|f(x_s))$

$f(x_s - x) + f(x_s + x) = 2 \cdot f(x_s)$

Achsenschnittpunkte

mit der y-Achse

$\boxed{x = 0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{S_y(0|f(0))}$ $f(0)$ heißt y-Achsenabschnitt

mit der x-Achse

$\boxed{y = f(x) = 0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{N_1(x_1|0);\ N_2(x_2|0);\ N_3(x_3|0);\ \ldots}$

Bei einfacher Nullstelle x_1 $\Rightarrow$ Schnittpunkt mit der x-Achse $N_1(x_1|0)$
Bei doppelter Nullstelle $x_{1,2}$ $\Rightarrow$ Berührpunkt mit der x-Achse $N_{1,2}(x_{1,2}|0)$
Bei dreifacher Nullstelle $x_{1,2,3}$ $\Rightarrow$ Sattelpunkt auf der x-Achse $N_{1,2,3}(x_{1,2,3}|0)$

Nullstellen

Berechnungsverfahren

für $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ $\quad f(x) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

für $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ $\quad f(x) = 0 \Rightarrow$ Substitution $x^2 = u$ und Rücksubstitution $x_{1,2} = \pm\sqrt{u}$

für $f(x)$ ohne y-Achsenabschnitt $f(x) = 0 \Rightarrow$ Linearfaktorzerlegung durch Ausklammern $\Rightarrow$ Satz vom Nullprodukt.

Funktionsgleichungen mithilfe der Nullstellen berechnen

$f(x)$ ist ganzrational	2. Grades	3. Grades	4. Grades
nur Nullstellen	$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$	$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$	$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)$
mit 1 Berührpunkt	$y = a \cdot (x - x_1)^2$	$y = a \cdot (x - x_1)^2 \cdot (x - x_2)$	$y = a \cdot (x - x_1)^2 \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$
mit 1 Sattelpunkt	–	$y = a \cdot (x - x_1)^3$	$y = a \cdot (x - x_1)^3 \cdot (x - x_2)$
mit 2 Berührpunkten	–	–	$y = a \cdot (x - x_1)^2 \cdot (x - x_2)^2$

Näherungsverfahren nach Newton

Nullstellenberechnung

$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$ $\quad x_n$ geschätzter Wert; x_{n+1} verbesserter Wert

Schnittpunktberechnung

Berechnung des Schnittpunktes der Funktionen mit $f(x)$ und $g(x)$:

$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{d(x_n)}{d'(x_n)}}$ $\quad d(x) = f(x) - g(x) =$ Differenzfunktion von $f(x)$ und $g(x)$.
$d(x)$ hat dort Nullstellen, wo sich $f(x)$ und $g(x)$ schneiden.

Extrempunkte, Wendepunkte

Hochpunkte und Tiefpunkte einer Funktion

Die 1. Ableitung ist null, da das Schaubild der Funktion eine waagrechte Tangente ($m = 0$) besitzt:

$\boxed{f'(x) = 0} \Rightarrow \boxed{x_1}$ Stelle für den Extrempunkt

<table>
<tr><td>$f''(x_1) < 0$</td><td>$f''(x_1) > 0$</td><td colspan="3">$f''(x_1) = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Downarrow$</td><td rowspan="2">$\Downarrow$</td><td>$f'''(x_1) \neq 0$</td><td colspan="2">$f'''(x_1) = 0$</td></tr>
<tr><td>$\Downarrow$</td><td>$f^{IV}(x_1) < 0$</td><td>$f^{IV}(x_1) > 0$</td></tr>
<tr><td>$H(x_1 | f(x_1))$</td><td>$T(x_1 | f(x_1))$</td><td>$SP(x_1 | f(x_1))$</td><td>$H(x_1 | f(x_1))$</td><td>$T(x_1 | f(x_1))$</td></tr>
</table>

H Hochpunkt; *T* Tiefpunkt; *SP* Sattelpunkt

Wendepunkte

Die 2. Ableitung ist null, da das Schaubild der Funktion keine Krümmung besitzt:

$\boxed{f''(x) = 0}$ 0 $\Rightarrow \boxed{x_W}$ Stelle für den Wendepunkt

$f'''(x_W) \neq 0$	$f'''(x_W) = 0$
$\boxed{W(x_W \vert f(x_W))}$ Ist $f'(x_W) = 0$, so ist der Wendepunkt ein Sattelpunkt.	Siehe oben bei Extrempunkte unter $f'''(x_1) = 0$.

Tangenten, Normalen

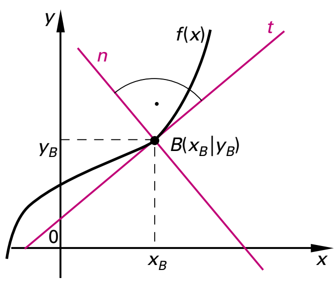
Tangente und Normale in einem gegebenen Berührpunkt $B(x_B | y_B)$

Tangente:

$\boxed{t\colon\ y = m_t \cdot x + b_t}$, dabei sind:

Tangentensteigung: $\boxed{m_t = f'(x_B)}$

y-Achsenabschnitt: $\boxed{b_t = y_B - m_t \cdot x_B}$



Normale: $\boxed{n\colon\ y = m_n \cdot x + b_n}$, dabei sind:

Normalensteigung: $\boxed{m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_B)}}$

y-Achsenabschnitt: $\boxed{b_n = y_B - m_n \cdot x_B}$

Tangenten von einem Punkt *P* außerhalb des Schaubildes

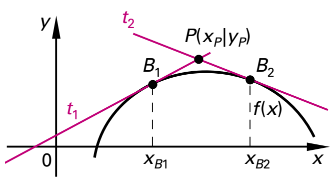
$\boxed{f'(x) \cdot (x - x_P) = f(x) - y_P} \Rightarrow \boxed{x = x_{Bi}}$

mit $i \in \mathbb{N}$

x_{Bi} Summe aller Berührstellen

Berührpunkte:

$\boxed{B_i(x_{Bi} | f(x_{Bi}))}$

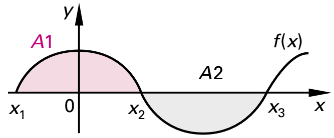


Flächenintegrale

Flächenberechnung

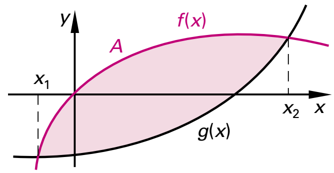
$$A1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \qquad A2 = -\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx = \int_{x_3}^{x_2} f(x)\,dx$$

Flächenintegrale über der x-Achse sind positiv.
Flächenintegrale unter der x-Achse sind negativ.



$$A = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\,dx$$

$f(x)$ = Oberkurve; $g(x)$ = Unterkurve
Die Fläche A zwischen den Schaubildern von $f(x)$ und $g(x)$ ist das Integral der Differenz Oberkurve – Unterkurve nach dx.



Integrationsregeln

Faktorregel (k = const.)

$$\int_a^b [k \cdot f(x)]\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Summenregel

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx$$

Vertauschen der Grenzen

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Teilen des Integrationsintervalls

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

mit $a \leq b \leq c$

Extremwertberechnung

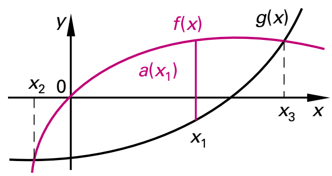
Extremwertberechnung der Strecke $a(x) = f(x) - g(x)$; der Fläche $a(x) = x \cdot f(x)$

$\boxed{a'(x) = 0} \Rightarrow \boxed{x_1}$

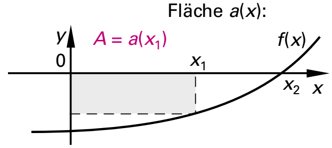
x_1 ist die Stelle, an der $a(x)$ einen Extremwert hat.

$a''(x_1) < 0$	$a''(x_1) > 0$	$a''(x_1) = 0$ und $a'''(x_1) \neq 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	
Maximum	Minimum	
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$a_{max} = a(x_1)$	$a_{min} = a(x_1)$	kein Extremwert

Strecke $a(x)$:



Fläche $a(x)$:



Spezielle Integrationsverfahren und Integrationsregeln

Substitutionsregel

Für $f(x) = f[g(x)]$: $\quad g(x) = z \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{dz}{dx} = g'(x) \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dz}{g'(x)} \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\int\limits_a^b f[g(x)]\,dx = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(z)\frac{dz}{g'(x)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int\limits_a^b \{f[g(x)]\cdot g'(x)\}\,dx = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(z)\,dz}$$

partielle Integration

$$\boxed{\int\limits_a^b \{f'(x)\cdot g(x)\}\,dx = [f(x)\cdot g(x)]_b^a - \int\limits_a^b \{f(x)\cdot g'(x)\}\,dx}$$

Die Formeln werden bei speziellen Funktionen angewendet.

numerische Integration für eine gerade Anzahl von n Intervallen

Sehnentrapezregel:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx A_S = \frac{b-a}{n}\cdot\left[\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right]}$$

Tangentenformel:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx A_T = 2\cdot\frac{b-a}{n}\cdot[y_1+y_3+\ldots+y_{n-1}]}$$

Simpson'sche Formel:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}\cdot(2A_S+A_T) = \frac{b-a}{3n}\cdot\left[\frac{y_0}{2}+\frac{y_n}{2}+(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})+2\cdot(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})\right]}$$

Kepler'sche Fassregel:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\cdot\left[f(a)+4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]}$$

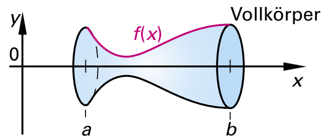
Die Kepler'sche Fassregel erhält man aus der Simpson'schen Formel für $n = 1$, wenn die Gesamtzahl der Intervalle $2n$ beträgt.

Rotationsvolumen

Rotation um die x-Achse:

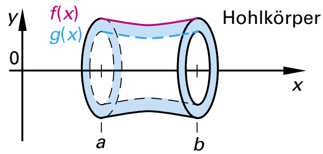
Vollkörper:

$$\boxed{V_x = \pi\cdot\int\limits_a^b [f(x)]^2\,dx}$$



Hohlkörper:

$$\boxed{V_x = \pi\cdot\int\limits_a^b \{[f(x)]^2-[g(x)]^2\}\,dx}$$

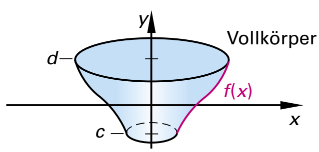


Rotation um die y-Achse:

Vollkörper:

$$\boxed{V_y = \pi\cdot\int\limits_c^d [\bar{f}(y)]^2\,dy}$$

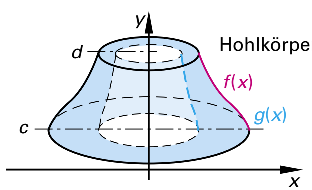
$\bar{f}(y)$ ist die Umkehrfunktion von $f(x)$.



Hohlkörper:

$$\boxed{V_y = \pi\cdot\int\limits_c^d \{[\bar{f}(y)]^2-[\bar{g}(y)]^2\}\,dy}$$

$\bar{g}(y)$ ist die Umkehrfunktion von $g(x)$.



Vektordarstellung in R³

$a_i \in \mathbb{R}$

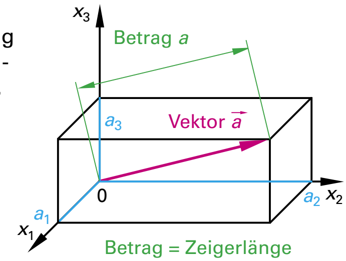
Schreibweise

$\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}$

Ein Vektor besteht aus Richtungskomponenten.

Vektorbegriff

Alle gleich langen Pfeile gleicher Richtung beschreiben denselben Vektor. Ein einzelner Pfeil ist Repräsentant dieses Vektors.



Betrag

$\boxed{|\vec{a}| = a}$ mit $\boxed{a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$

a ist ein Skalar $\Rightarrow a \in \mathbb{R}$

Nullvektor

$\boxed{\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

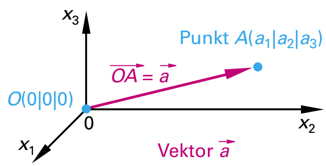
Der Nullvektor hat den Betrag 0 und keine bestimmte Richtung.

Ortsvektor

$\boxed{\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}$

Ein Ortsvektor hat den Pfeilanfang im Koordinatenursprung.

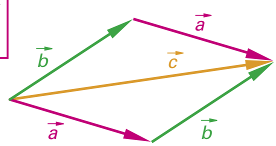
Die Richtungskomponenten eines Ortsvektors haben dieselben Werte wie die Koordinaten des Punktes an seiner Pfeilspitze.



Addition und Subtraktion

Vektoraddition

$\boxed{\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}}$ wobei $\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}}$



Die Summe einer geschlossenen Vektorkette ist der Nullvektor:

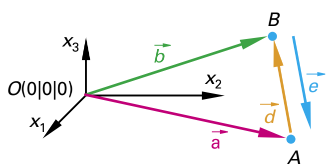
$\boxed{\vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c}) = \vec{0}}$

Vektorsubtraktion

Verbindungsvektor:

$\boxed{\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}}$

$\boxed{\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}}$



Gegenvektor:

$\boxed{\vec{e} = -\vec{d}}$ $\boxed{\vec{e} = \vec{a} - \vec{b}}$ $\boxed{\vec{e} = \overrightarrow{BA}}$

Vektor $\overrightarrow{AB}$ und Gegenvektor $\overrightarrow{BA}$ haben die gleiche Zeigerlänge:

$\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}}$ $\boxed{|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{AB}|}$

Skalare Multiplikation

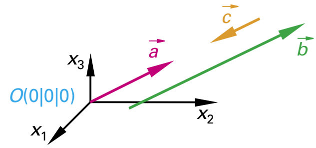
$m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Skalare Multiplikation

Wird ein Vektor mit einem Skalar m multipliziert, so erhält man einen parallelen Vektor.

$$\boxed{\vec{b} = m \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} m \cdot a_1 \\ m \cdot a_2 \\ m \cdot a_3 \end{pmatrix}}$$

$m > 0$: richtungsgleiche Vektoren
$m < 0$: entgegengerichtete Vektoren
$|m| < 1$: $b < a$; $|m| > 1$: $b > a$



Rechengesetze $r, s \in \mathbb{R}$

$\boxed{1 \cdot \vec{a} = \vec{a}}$ $\boxed{0 \cdot \vec{a} = \vec{0}}$

$\boxed{(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}}$ $\boxed{r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}}$

Einheitsvektoren

Begriff

Alle Einheitsvektoren haben den Betrag 1.

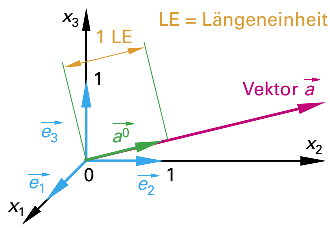
Formel

$$\boxed{\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{1}{a} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}} \text{ mit } \boxed{a^0 = \left|\vec{a}^0\right| = 1}$$

Basisvektoren

Basisvektoren = Einheitsvektoren der Koordinatenachsen

$$\boxed{\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \boxed{\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \boxed{\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \boxed{e_1 = e_2 = e_3 = 1}$$



Strecke

Strecke

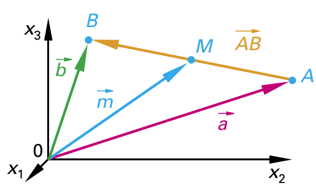
Streckenvektor: $\boxed{\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}}$

Streckenlänge: $\boxed{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$

Mittelpunkt

Mittelpunktsvektor: $\boxed{\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}}$

Mittelpunkt M: $\boxed{M\,(m_1|m_2|m_3)}$



Teilen der Strecke AB

im Verhältnis $m : n$ durch den Punkt P: $\boxed{\vec{p} = \vec{a} + \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{AB}}$

nach m Längeneinheiten durch den Punkt Q: $\boxed{\vec{q} = \vec{a} + m \cdot \overrightarrow{AB}^0}$