Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

* * * * * * * * * *

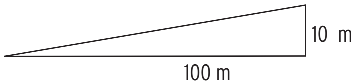
4. Auflage 2023

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de
Merkur-Nr. 0519-04
ISBN 978-3-8120-1042-9

2.1.2 Die Steigung einer Geraden

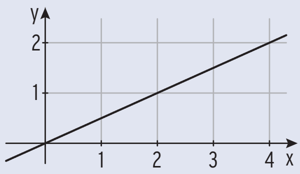
Hauptform einer Geradengleichung

Das Verkehrsschild „10 % Steigung“ bedeutet:
Die Straße steigt auf 100 m horizontaler Strecke 10 m an.



Man sagt, die Straße hat eine **Steigung** von $m = \frac{10}{100} = 0{,}1 = 10\,\%$.
m ist das **Längenverhältnis von vertikaler Strecke zu horizontaler Strecke.**

Beispiel 1

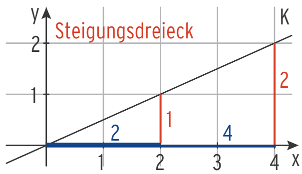


Die Abbildung stellt den Verlauf einer Straße K im Koordinatensystem dar.

a) Welche Steigung hat die Straße?
Was würde auf dem Verkehrsschild stehen?

b) Bestimmen Sie die Geradengleichung.

Lösung



a) Aus dem Schaubild lässt sich ablesen:
Das **Verhältnis** von y-Koordinate zur x-Koordinate eines Geradenpunktes ist **konstant.**
Dieses Verhältnis heißt **Steigung der Geraden.**

$$\mathbf{m = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = konstant}$$

Auf dem Verkehrsschild steht 50 % Steigung, da $\frac{1}{2} = 50\,\%$.

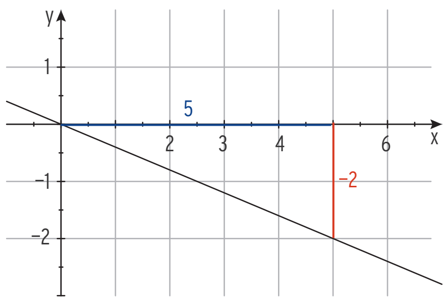
b) Aus $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$ folgt $y = \frac{1}{2}x$, die Gerade hat die Gleichung $y = \frac{1}{2}x$.
Das Schaubild K der linearen Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x$; $x \in \mathbb{R}$, verläuft durch den **Ursprung O.** K ist eine **Ursprungsgerade.**

Beispiel 2

Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -0{,}4\,x$ mithilfe der Steigung.

Lösung

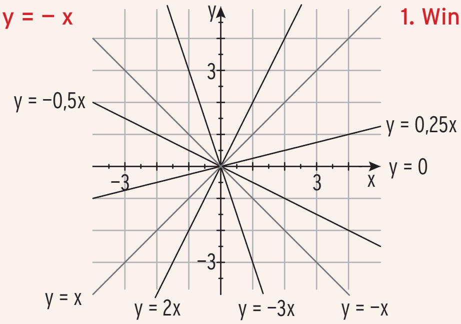
Steigung $m = -0{,}4 = -\frac{2}{5}$ bedeutet:
Man geht vom Ursprung 5 Einheiten nach **rechts** und anschließend 2 Einheiten nach **unten.**



2. Winkelhalbierende: $y = -x$

1. Winkelhalbierende: $y = x$

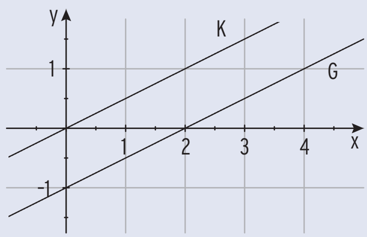
Ursprungsgerade:
$y = mx$



Für $m > 0$ ist eine Gerade steigend, für $m < 0$ ist eine Gerade fallend.
Für $m = 0$ liegt die Gerade auf der x-Achse.

Beispiel 3

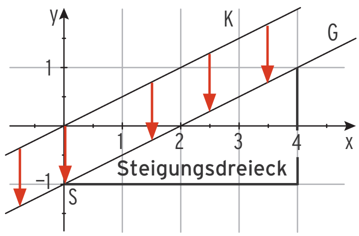
K ist das Schaubild der linearen Funktion f.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden G.



Lösung

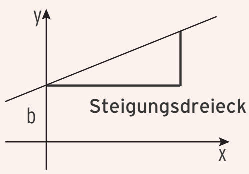
Durch Ablesen: $f(x) = 0{,}5\,x$
Die Ursprungsgerade K wird um 1 nach unten verschoben.
Die **Steigung** bleibt erhalten.
Die **Geradengleichung** lautet also $y = 0{,}5\,x - 1$.

Hinweis: G schneidet die y-Achse in $S(0\,|\,-1)$.
$b = -1$ heißt **y-Achsenabschnitt.**



Die allgemeine **Geradengleichung in Hauptform** lautet:

$$y = \underbrace{m \cdot x}_{\text{Steigung}} + \underbrace{b}_{\text{y-Achsenabschnitt}}$$



Aufgaben

1 Zeichnen Sie eine Gerade durch den Punkt A mit der Steigung m.

a) $A(0|0)$, $m = 3$ b) $A(0|2)$, $m = 1{,}5$ c) $A(1|-2)$, $m = -1$ d) $A(-2|0)$, $m = -0{,}5$

2 Zeichnen Sie die Geraden g und h in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

a) $g\colon y = -\frac{3}{2}x - 2$; $h\colon y = 2x + 2$ b) $g\colon y = \frac{3}{5}x - 3$; $h\colon y = -\frac{7}{6}x + 2$

3 Zeichnen Sie die Geraden $g\colon y = 95x$ und $h\colon y = 20x + 400$ für $0 \leq x \leq 10$.
Wählen Sie auf der y-Achse die Einteilung $1\,\text{LE} \mathrel{\widehat{=}} 100$.

4 K ist das Schaubild der linearen Funktion f mit $f(x) = \frac{5}{4}x - 4$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeichnen Sie K. Verschieben Sie K um 3 nach oben. Geben Sie den Funktionsterm an.

b) Spiegeln Sie K an der y-Achse. Geben Sie die Geradengleichung an.

5 Abbildung 1 zeigt drei Geraden.
Bestimmen Sie jeweils die zugehörige Geradengleichung.

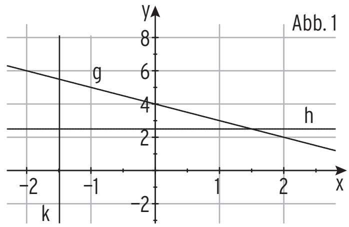


Abb. 1

Steigungswinkel einer Geraden

Beispiel

K_f ist das Schaubild der linearen Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$; $x \in \mathbb{R}$.
Unter welchem Winkel schneidet K_f die x-Achse?

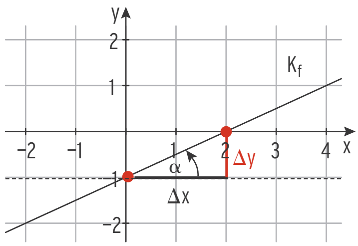
Lösung

Aus $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha)$ folgt für den

Steigungswinkel α

$\tan(\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26{,}57°$

Hinweis: $\alpha = 45°$ entspricht der Steigung $m = 1$.



Unter dem **Steigungswinkel α** einer Geraden g versteht man den Winkel zwischen 0° und 180°, den sie mit der x-Achse bildet. $\alpha = \measuredangle(\text{x-Achse}; g)$

Aufgaben

1 Gegeben ist die Gerade g durch ihre Gleichung. Geben Sie den Steigungswinkel der Geraden g an.

a) $g\colon y = 3x + 1$ b) $g\colon y = x - 5$ c) $g\colon y = -2x + 4$

Steigung aus zwei gegebenen Punkten

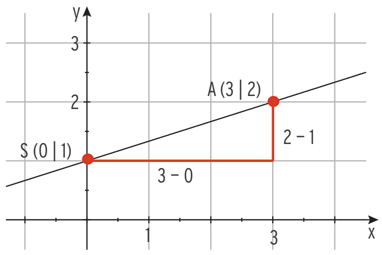
Beispiel

Eine Gerade g verläuft durch die Punkte S (0 | 1) und A (3 | 2).
Zeichnen Sie die Gerade g.
Bestimmen Sie die Steigung von g aus den Koordinaten der zwei Geradenpunkte.

Lösung

Wir lesen die Steigung m aus dem **Steigungsdreieck** ab:

$$m = \frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3}$$



Verallgemeinerung

Berechnung der Steigung m:

Differenz der y-Werte:

$$2 - 1 = \; y_2 - y_1$$

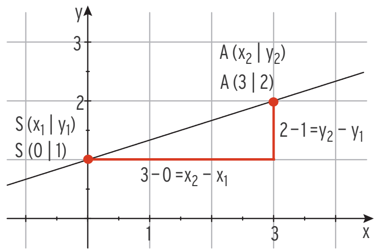
Differenz der x-Werte:

$$3 - 0 = \; x_2 - x_1$$

Steigung m:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3}$$

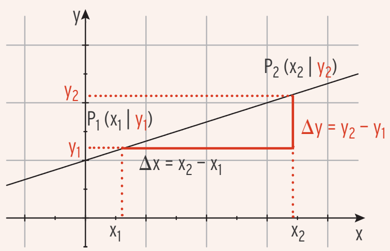
Steigung der Geraden: $m = \frac{1}{3}$



Für die **Steigung m einer Geraden** gilt:

$$m = \frac{\text{Differenz der y-Werte}}{\text{Differenz der x-Werte}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Dabei sind x_1 und y_1 bzw. x_2 und y_2 die Koordinaten von 2 Geradenpunkten, die frei gewählt werden dürfen.



Aufgaben

1 Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B. Berechnen Sie die Steigung von g.

a) A (1 | 3), B (5 | 6) **b)** A (−1 | −4), B (2 | −7) **c)** A (0 | 5), B $\left(8 \,\middle|\, \frac{7}{3}\right)$

2 Für eine lineare Funktion f gilt: f (1) = 2 und f (−2) = 5.
Bestimmen Sie die Steigung der zugehörigen Geraden.

Lösung durch Ausklammern und Anwendung des Satzes vom Nullprodukt

Beispiele

1) $x^3 - x^2 = 0$

Seite 357

Lösung

Ausklammern von x^2:	$x^2 \cdot x - x^2 = x^2(x-1) = 0$
Satz vom Nullprodukt:	$x^2 = 0 \;\vee\; x - 1 = 0$
Lösungen:	$x_{1\|2} = 0;\; x_3 = 1$

2) $x^4 - 9x^3 + 20x^2 = 0$

Lösung

Ausklammern von x^2:	$x^2(x^2 - 9x + 20) = 0$
Satz vom Nullprodukt:	$x^2 = 0 \;\vee\; x^2 - 9x + 20 = 0$
Lösung von $x^2 - 9x + 20 = 0$ ergibt:	$x_3 = 5;\; x_4 = 4$
Lösungen:	$x_{1\|2} = 0;\; x_3 = 5;\; x_4 = 4$

Hinweis: $x_{1|2} = 0$ ist **doppelte Lösung**; $x_3 = 5$ und $x_4 = 4$ sind zwei einfache Lösungen.

3) $-\frac{1}{9}x(x+3)^2 = 0$

Lösung

Satz vom Nullprodukt anwenden:	$-\frac{1}{9}x = 0 \;\vee\; (x+3)^2 = 0$
Lösungen:	$x_1 = 0;\; x_{2\|3} = -3$

4) $x^4 - 2x = 0$

Lösung

Ausklammern von x:	$x(x^3 - 2) = 0$
Satz vom Nullprodukt:	$x = 0 \;\vee\; x^3 - 2 = 0$
3. Wurzel ziehen:	$x^3 - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[3]{2}$
Exakte Lösungen:	$x_1 = 0;\; x_2 = \sqrt[3]{2}$

Gleichungen der Form $\mathbf{a x^3 + b x^2 + c x = 0}$; $a \neq 0$
$\mathbf{a x^4 + b x^3 + c x^2 = 0}$; $a \neq 0$
löst man durch **Ausklammern** der höchsten gemeinsamen Potenz von x und **Anwendung des Satzes vom Nullprodukt**.

Aufgaben

1 Lösen Sie die Gleichung.

a) $x^3 - 6x^2 = 0$ b) $2x^4 - 7x^3 = 0$ c) $10x^2 - x^4 = 0$

2 Lösen Sie.

a) $-0{,}25x^3 + 3x = 0$ b) $2x^3 - \frac{3}{4}x^2 = 0$ c) $x^3 - x^2 = x$
d) $-3x^4 + \frac{1}{2}x^3 = 0$ e) $2x^4 - 5x^2 = 0$ f) $2{,}5x^2 - 4x^3 + x^4 = 0$
g) $-3x^2(x^2 - 8) = 0$ h) $x^3(x-4) = 0$ i) $(x^2 - 5)(x^2 - 3) = 0$

3 Eva behauptet: Die Lösung der Gleichung $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ führt auf $(x-2)(x-1)^2 = 0$. Hat Eva Recht? Bestimmen Sie ggf. die Lösungen.

Lösung durch Substitution

Beispiele

1) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

Lösung

Substitution $x^2 = z$ $(x^4 = z^2)$ — $z^2 - 9z + 20 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung in z: $z_1 = 4$; $z_2 = 5$

Rücksubstitution: $z_1 = x^2 = 4 \Rightarrow x_{1|2} = \pm 2$

$z_2 = x^2 = 5 \Rightarrow x_{3|4} = \pm\sqrt{5}$

Lösungen: $x_{1|2} = \pm 2$; $x_{3|4} = \pm\sqrt{5}$

2) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

Lösung

Substitution $x^2 = z$ $(x^4 = z^2)$ — $z^2 - 2z - 3 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung in z: $z_1 = 3$; $z_2 = -1$

Rücksubstitution: $z_1 = x^2 = 3 \Rightarrow x_{1|2} = \pm\sqrt{3}$

$z_2 = x^2 = -1$

Diese Gleichung $x^2 = -1$ hat keine Lösung wegen $x^2 \geq 0$.

Lösungen: $x_{1|2} = \pm\sqrt{3}$

> Gleichungen der Form $\mathbf{a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0}$; $a, b, c \neq 0$
> löst man durch **Substitution**.
> Die **Substitution** $x^2 = z$ ergibt eine **quadratische Gleichung** in z.
> **Die Rücksubstitution liefert die gesuchten Lösungen in x.**

Aufgaben

1 Lösen Sie die Gleichung.

a) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ b) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ c) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

2 Lösen Sie.

a) $\frac{1}{5}x^4 - \frac{16}{5}x^2 = -3$ b) $-\frac{1}{3}x^4 + 2x^2 = 3$ c) $\frac{1}{7}x^4 - 2x^2 + 8 = 0$

d) $\frac{1}{48}x^4 = \frac{7}{24}x^2 - 1$ e) $\frac{1}{9}(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$ f) $\frac{1}{9}(x^2 - 4)(x^2 + 1) = -\frac{2}{3}$

g) $x^4 = 12x^2 - 20$ h) $x^4 - 3x^2 = 18$ i) $\frac{1}{9}(x^2 - 3)^2 = 0$

3 Geben Sie eine Gleichung mit den drei Lösungen $x_{1|2} = \pm 1$ und $x_3 = 4$ an.

4 Zeigen Sie: Die Gleichung $-x^4 + x^2 = 1$ hat keine Lösung.

5 Für welchen Wert von $a \geq 0$ hat die Gleichung $-\frac{1}{16}(x^4 - 6x^2 + a) = 0$ die Lösung $x = 2$? Berechnen Sie für diesen Fall die weiteren Lösungen.

6 Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen von $x^4 + t\,x^3 - x^2 = 0$ in Abhängigkeit von t.

mvurl.de/zhcq

Lösung von Polynomgleichungen

<table>
<tr><th>Gleichungstyp</th><th colspan="6">Lösungsverfahren mit Beispielen</th></tr>
<tr><td>lineare Gleichung
($a \neq 0$)</td><td colspan="6">$a\,x + b = 0$
• auflösen nach x
$\frac{1}{2}x - 4 = 0$
$x = 8$</td></tr>
<tr><td>quadratische Gleichung
($a \neq 0$)</td><td colspan="2">$a\,x^2 + c = 0$
• auflösen nach x
• 2. Wurzel ziehen
$\frac{1}{2}x^2 = 4$
$x^2 = 8$
$x_{1\|2} = \pm\sqrt{8}$</td><td colspan="2">$a\,x^2 + b\,x = 0$
• x ausklammern
• Satz vom Nullprodukt
$x^2 - 8\,x = 0$
$x\,(x - 8) = 0$
$x_1 = 0;\ \ x_2 = 8$</td><td colspan="2">$a\,x^2 + b\,x + c = 0$
• abc-Formel
$x_{1\|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$
$x^2 - 8\,x + 2 = 0$
$x_{1\|2} = \frac{8 \pm \sqrt{56}}{2}$</td></tr>
<tr><td>Gleichung 3. Grades
($a \neq 0$)</td><td colspan="3">$a\,x^3 + d = 0$
• Auflösen nach x
• 3. Wurzel ziehen
$\frac{1}{2}x^3 - 4 = 0 \quad \| \cdot 2$
$x^3 - 8 = 0$
$x^3 = 8$
$x = \sqrt[3]{8}$</td><td colspan="3">$a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x = 0$
• Höchste gemeinsame Potenz von x ausklammern
• Satz vom Nullprodukt
$2\,x^3 - 8\,x^2 = 0$
$2\,x^2(x - 4) = 0$
$2\,x^2 = 0 \ \vee\ x - 4 = 0$
$x_{1\|2} = 0;\ \ x_3 = 4$</td></tr>
<tr><td>Gleichung 4. Grades
($a \neq 0$)</td><td colspan="2">$a\,x^4 + d = 0$
• Auflösen nach x
• 4. Wurzel ziehen
$\frac{1}{2}x^4 - 4 = 0$
$\frac{1}{2}x^4 = 4$
$x^4 = 8$
$x_{1\|2} = \pm\sqrt[4]{8}$</td><td colspan="2">$a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 = 0$
• Höchste gemeinsame Potenz von x ausklammern
• Satz vom Nullprodukt
$x^4 - 8\,x^3 + 2\,x^2 = 0$
$x^2(x^2 - 8\,x + 2) = 0$
$x^2 = 0$
$\vee\ \ x^2 - 8\,x + 2 = 0$
$x_{1\|2} = 0;$
$x_{3\|4} = \frac{8 \pm \sqrt{56}}{2}$</td><td colspan="2">$a\,x^4 + c\,x^2 + e = 0$
• Substitution:
$x^2 = z\ \ (x^4 = z^2)$
$x^4 - 8\,x^2 + 7 = 0$
$z^2 - 8\,z + 7 = 0$
$z_1 = 7;\ \ z_2 = 1$
$x_{1\|2} = \pm\sqrt{7};\ \ x_{3\|4} = \pm 1$</td></tr>
</table>