Bohner | Ott | Deusch

Mathematik
für das Berufskolleg – Berufliches Gymnasium
Jahrgangsstufe 12 und 13

Nordrhein-Westfalen

Geogebra interaktiv

Lern- und Erklärvideos

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Kurt Bohner
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Ronald Deusch
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Beratende Tätigkeit:

Norbert Lengersdorf
Lehrauftrag Mathematik am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath
Studium der Mathematik und Physik an der RWTH Aachen

* * * * * * * * * *

2. Auflage 2024

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

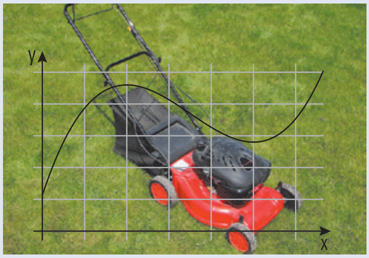
Merkur-Nr. 0666-02
ISBN 978-3-8120-1065-8

1.3 Extrempunkte

mvurl.de/3aqg

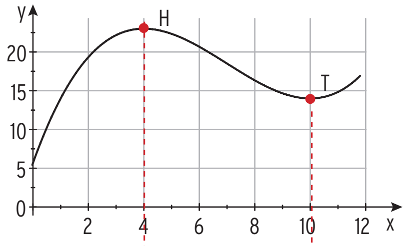
Beispiel 1

Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 10x + \frac{17}{3}$ beschreibt näherungsweise die wöchentlichen Verkaufszahlen von Rasenmähern. Dabei ist x die Zeit in Wochen nach Wiedereröffnung der Geschäftsräume. Untersuchen Sie die Entwicklung der Verkaufszahlen.



Lösung

Das Schaubild von f wird gezeichnet. Die Verkaufszahlen nehmen zu bis zur Woche 4 mit 23 Stück, danach nehmen sie ab bis zur Woche 10 mit 14 verkauften Rasenmähern, um danach wieder zuzunehmen.



Erläuterungen

Man liest ab:			
f ist monoton	**wachsend**	**fallend**	**wachsend**
für	$x < 4$	$4 < x < 10$	$x > 10$
	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

Im Übergang
von **wachsend zu fallend** liegt ein **Hochpunkt,**
von **fallend zu wachsend** liegt ein **Tiefpunkt.**

$f'(4) = 0$ H $\qquad f'(10) = 0$ T

Ein Kurvenpunkt $P(x_1 | f(x_1))$ heißt $\left\{\begin{matrix}\textbf{Hochpunkt}\\ \textbf{Tiefpunkt}\end{matrix}\right\}$, wenn $f(x_1)$ der $\left\{\begin{matrix}\textbf{größte}\\ \textbf{kleinste}\end{matrix}\right\}$ **Funktionswert** für alle x aus einer Umgebung von x_1 ist.

Dieser $\left\{\begin{matrix}\textbf{größte}\\ \textbf{kleinste}\end{matrix}\right\}$ Funktionswert $f(x_1)$ heißt **relatives (lokales)** $\left\{\begin{matrix}\textbf{Maximum}\\ \textbf{Minimum}\end{matrix}\right\}$.

Notwendige Bedingung für (lokale) Extremstellen: $f'(x_1) = 0$.
Dabei liegt x_1 im Innern des Definitionsbereichs.

Hochpunkte bzw. Tiefpunkte nennt man **Extrempunkte** des Schaubildes von f.
Der x-Wert des Extrempunktes heißt Extremstelle.

Nachweis für Extrempunkte (1. Möglichkeit):
Nachweis mit **Vorzeichenwechsel** (VZW von $f'(x)$):

VZW von f′(x) an der Stelle	**x = 4**	**x = 10**
	von	von
	+ nach **−**	**−** nach **+**
	führt auf einen	
	Hochpunkt	**Tiefpunkt**
	mit $f(4) = 23$ und	$f(10) = 14$
	H(4 | 23)	**T(10 | 14)**

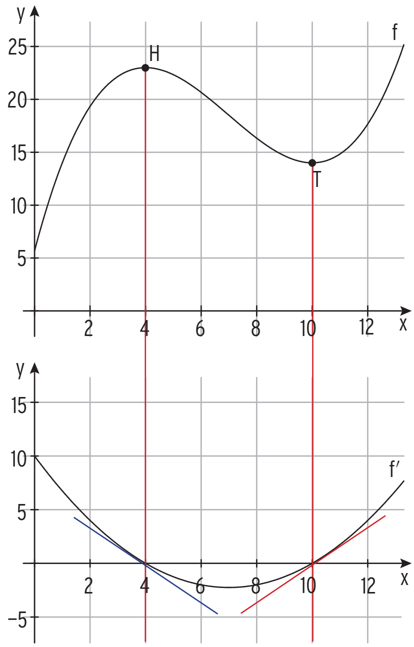
Hinweis: $f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 10$
$f'(3) = 1{,}75 > 0;\; f'(4) = 0;\; f'(5) = -1{,}25 < 0$

Nachweis mithilfe der zweiten Ableitung von f (2. Möglichkeit):

Schaubild von f

Schaubild von f′

$f''(x)$ ist die **Steigung** des Schaubildes von f′ an der Stelle x.



Die **Steigung** des Graphen von f′ an der Stelle	$x = 4$	$x = 10$
	ist **negativ**	ist **positiv**
Das bedeutet:	$f''(4) < 0$	$f''(10) > 0$
Das Schaubild von f hat dort einen	**Hochpunkt**	**Tiefpunkt**

Hinweis: $x = 4$ ist **Maximalstelle**, $x = 10$ ist **Minimalstelle.**

Berechnung von $f''(4)$ und $f''(10)$

Zweite Ableitung von f: $f''(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

Einsetzen der x-Werte in $f''(x)$: $f''(4) = -\frac{3}{2} < 0$ $f''(10) = \frac{3}{2} > 0$

Bestimmung von Extrempunkten

Notwendige und hinreichende Bedingung für Extremstellen:

$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

- **Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$** liefert die Stellen $x_1, x_2, \ldots$ mit waagrechter Tangente.

- **Nachweis für Hochpunkt bzw. Tiefpunkt** durch **Einsetzen von x_1** in $f''(x)$

  Ist $\begin{Bmatrix} f''(x_1) < 0 \\ f''(x_1) > 0 \end{Bmatrix}$, so hat der Graph von f einen $\begin{Bmatrix} \text{Hochpunkt } H(x_1 \mid f(x_1)) \\ \text{Tiefpunkt } T(x_1 \mid f(x_1)) \end{Bmatrix}$.

Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x;\ x \in \mathbb{R}$.
Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f.

Lösung

Ableitungen: $f'(x) = -x^2 + 4x - 3;\ f''(x) = -2x + 4$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad -x^2 + 4x - 3 = 0$

Stellen mit waagrechter Tangente: $\quad x_1 = 1;\ x_2 = 3$

Nachweis durch Einsetzen der x-Werte in **$f''(x)$**

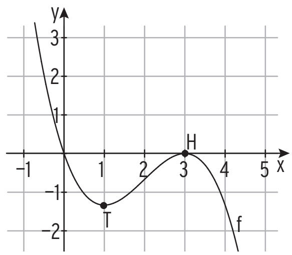
$f''(1) = 2 > 0$: f hat in $x = 1$ ein (relatives) Minimum, Der Graph von f hat einen Tiefpunkt an der Stelle $x_1 = 1$.

$f''(3) = -2 < 0$: f hat in $x = 3$ ein (relatives) Maximum, Der Graph von f hat einen Hochpunkt an der Stelle $x_2 = 3$.

Mit $f(1) = -\frac{4}{3}$ und $f(3) = 0$ erhält man:

Tiefpunkt $T\left(1 \middle| -\frac{4}{3}\right)$; Hochpunkt $H(3|0)$

Schaubild von f:



Aufgaben

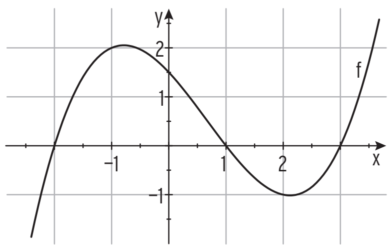
1 Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Hoch- und Tiefpunkte.
Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse.
Skizzieren Sie den Graphen von f in ein Achsenkreuz.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 3$ **b)** $f(x) = -x^3 + 3x - 2$ **c)** $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2$

2 Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f.

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 2$ **b)** $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 9x)$ **c)** $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$

3 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f mit $f(x) = ax^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$.
Bestimmen Sie a mithilfe der Zeichnung.
Ermitteln Sie Hoch- und Tiefpunkt des Graphen von f.



Kosten, Erlös und Gewinn bei Angebotsmonopol

Beispiel 1

Für die Preis-Absatz-Funktion p_N eines Monopolisten gilt: $p_N(x) = -3x + 90$.
K mit $K(x) = \frac{1}{60}(x^3 - 30x^2 + 1860x + 1400)$ beschreibt für $x \geq 0$ die Gesamtkosten.

a) Bestimmen Sie den maximalen ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich.

b) Bestimmen Sie die gewinnmaximale Absatzmenge und den zugehörigen Marktpreis.

Lösung

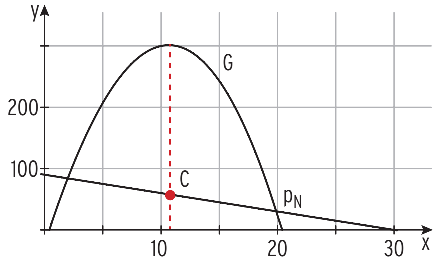
a) **Ökonomisch sinnvoller Definitionsbereich:**
Aus $p_N(x) = -3x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 30$ folgt $D_{ök} = [0; 30]$.

b) Aus $p_N(x) = -3x + 90$ und $E(x) = p_N(x) \cdot x$
erhält man die **Erlösfunktion E** mit: $E(x) = -3x^2 + 90x$
Gewinnfunktion G mit $G(x) = E(x) - K(x)$: $G(x) = -\frac{1}{60}(x^3 + 150x^2 - 3540x + 1400)$
Ableitungen: $G'(x) = -\frac{1}{60}(3x^2 + 300x - 3540)$

$$G''(x) = -\frac{1}{60}(6x + 300) = -\frac{1}{10}x + 5$$

Gewinnmaximale Ausbringungsmenge
Bedingung: $G'(x) = 0 \wedge G''(x) < 0$
$G'(x) = 0$ $\quad x_1 \approx 10{,}66;\ x_2 \approx -110{,}66 < 0$
$x_1 \approx 10{,}66$ ist die einzige sinnvolle Lösung.
Maximaler Gewinn: $G_{max} = G(10{,}66) = 301{,}32$

Gewinnmaximaler Preis
Der maximale Gewinn wird in $x_{max} = 10{,}66$ erwirtschaftet.
Angebotspreis bei maximalem Gewinn:
Einsetzen von x_{max} in $p_N(x) = -3x + 90$
ergibt: $p_N(10{,}66) = 58{,}02$
Gewinnmaximaler Preis: 58,02 GE/ME



Dieser Preis wird auch **Cournot'scher Preis** genannt. Der Punkt C(10,66 | 58,02) heißt **Cournot'scher Punkt.** Legt der Monopolist seinen Verkaufspreis auf 58,02 GE pro ME fest, so erzielt er den größten Gewinn.

Die Gerade mit der Gleichung x_{max} schneidet das Schaubild der **Preis-Absatz-Funktion** im **Cournot'schen Punkt** $C(x_{max} \mid p_N(x_{max}))$.
Die x-Koordinate des Cournot'schen Punktes bezeichnet die Absatzmenge, bei der der **maximale Gesamtgewinn** erzielt wird, die y-Koordinate von C ist der zugehörige Preis pro ME.

Gewinnmaximale Absatzmenge: x_{max}

Gewinnmaximaler Preis: $p_N(x_{max}) = \frac{E(x_{max})}{x_{max}}$

Beispiel 2

➡ Für die Gesamtkostenfunktion K eines Monopolisten gilt: $K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 96$.
Er produziert mit der Preis-Absatzfunktion $p_N(x) = -10x + 120$.
Ein Monopolist will den Preis so festsetzen, dass Gewinn erzielt wird.
Bestimmen Sie das Preisintervall.

Lösung

Erlösfunktion E: $E(x) = p_N(x) \cdot x = -10x^2 + 120x$

Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = -10x^2 + 120x - (x^3 - 12x^2 + 60x + 96)$

$G(x) = 0$ führt auf die Lösungen: $(x_1 \approx -7{,}58 < 0)$; $x_2 \approx 1{,}58$; $x_3 = 8$

Gewinnschwelle: $x_{GS} = 1{,}58$

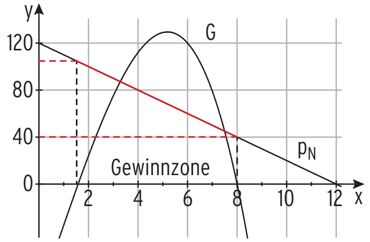
Gewinngrenze: $x_{GG} = 8$

Preisfestlegung: $p_N(1{,}58) = 104{,}2$;

$p_N(8) = 40$

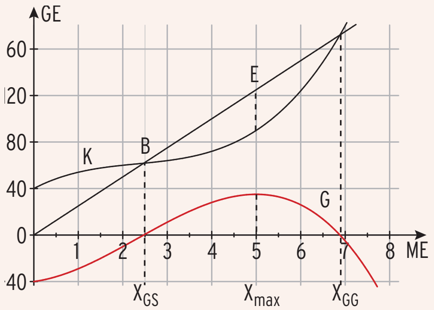
Der Preis muss zwischen 40 GE/ME und 104,2 GE/ME liegen.

Preisintervall: (40; 104,2)

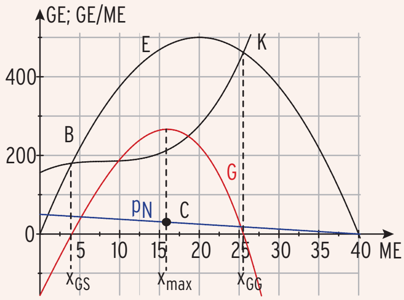


Gesamtkosten, Erlös und Gewinn

bei vollständiger Konkurrenz



bei Angebotsmonopol



Kostenfunktion: $K(x) > 0$; K ist monoton wachsend.

Konstanter Stückpreis p
Erlösfunktion: $E(x) = p \cdot x$
Erlösgerade

Preis-Absatzfunktion: $p_N(x) = ax + b$
Erlösfunktion: $E(x) = p_N(x) \cdot x$
Erlösparabel

Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x)$

Gewinnzone: $G(x) = 0$ führt auf die Gewinnschwelle x_{GS} und die Gewinngrenze x_{GG}.

Break-Even-Punkt $B(x_{GS} \mid K(x_{GS}))$

Gewinnmaximum in x_{max}

Gewinnmaximaler Preis: $p_N(x_{max})$

Cournot'scher Punkt $C(x_{max} \mid p_N(x_{max}))$

Aufgaben

1 Die Gesamtkosten eines Polypolisten in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge x in Mengeneinheiten (ME) werden beschrieben durch die Funktion K mit
$K(x) = \frac{1}{4}x^3 - 6x^2 + 50x + 280$; K(x) in Geldeinheiten (GE).
Die Kapazitätsgrenze liegt bei 24 ME.
Die produzierte Ware wird für 44 GE pro ME verkauft.

a) Zeichnen Sie das Schaubild von K und der Erlösfunktion E in ein Koordinatensystem.

b) Die Gewinnschwelle liegt zwischen 9 ME und 10 ME. Bestimmen Sie die Gewinnschwelle auf eine Dezimale gerundet.

c) Ermitteln Sie die Menge, die das Unternehmen produzieren muss, um maximalen Gewinn zu erzielen. Geben Sie den maximalen Gewinn an.

d) Berechnen Sie die durchschnittliche Zunahme der Gesamtkosten je Stück, wenn die Produktion von 10 auf 15 Stück erhöht wird.

e) Bestimmen Sie die Ausbringungsmenge mit dem geringsten Kostenzuwachs und geben Sie diesen an. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

2 Gesamtkostenfunktion und Erlösfunktion eines Monopolisten sind durch
$K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 98$ und $E(x) = -10x^2 + 120x$ gegeben.
Die Kapazitätsgrenze wird bei einer Produktion von 12 ME erreicht.

a) Die Gewinnzone endet etwa bei 8 ME. Überprüfen Sie.

b) Bei 4 ME beträgt der Gewinn 110 GE. Ermitteln Sie die Produktionsmenge, bei der der Gewinn ebenfalls 110 GE beträgt.

c) Bestimmen Sie das Gewinnmaximum.

d) Geben Sie den Preis an, damit der maximale Gewinn erwirtschaftet wird.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Cournot'schen Punktes.

3 Die Firma Anton Thomalle in Soest baut Motoren. Die Gesamtkosten des Motors ES1A in € betragen $K(x) = 0{,}1x^3 - 7x^2 + 220x + 800$; der Erlös pro Stück liegt bei 250 €.
Die Kapazitätsgrenze liegt bei 80 Stück.

a) An der Kapazitätsgrenze wird ein Gewinn erzielt. Überprüfen Sie diese Behauptung.

b) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

c) Prüfen Sie, ob die Unternehmung bei Produktion und Verkauf von 8 ME einen positiven Deckungsbeitrag erzielt. Geben Sie diesen gegebenenfalls an.

4 Die Jäger GmbH beschreibt ihre Kosten mit folgender Funktion:
$K(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 15x + 36$; dabei ist x in ME und K(x) in GE angegeben.
Das Produkt wird zum Preis von 15 GE/ME am Markt verkauft.
Das Unternehmen will seinen maximalen Gewinn steigern, ist sich aber unschlüssig, welche Strategie es verfolgen soll.
Es stehen zwei alternative Varianten zur Auswahl:
Variante A: Die Fixkosten werden um 10 % gesenkt.
Variante B: Die variablen Kosten werden um 5 % gesenkt.
Begründen Sie, welche Variante für das Unternehmen günstiger ist.