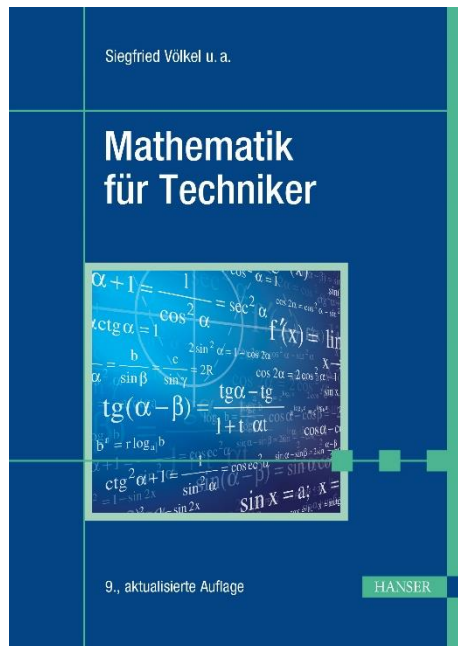


HANSER



Leseprobe

zu

Mathematik für Techniker

von Siegfried Völkel u.a.

Print-ISBN: 978-3-446-48022-3

E-Book-ISBN: 978-3-446-48075-9

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446480223>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

Vorwort

■ Vorwort zur 9. Auflage

Die vorliegende 9. Auflage wurde durchgesehen und aktualisiert. Des Weiteren wurden Lesereinschriften berücksichtigt, entsprechende Änderungen vorgenommen und Fehler behoben.

Leipzig, Mühlhausen, Halle und Berlin, im April 2024

Die Verfasser

■ Vorwort zur 7. Auflage

Die 7., neubearbeitete und erweiterte Auflage stellt eine umfangreiche Überarbeitung des in der Mathematikausbildung angehender Techniker bewährten Lehrbuches dar.

Der Inhalt orientiert sich an den Lehrplänen für die Technikerausbildung. Aus didaktischen Gründen folgt das Kapitel „Gleichungen und Ungleichungen“ nun direkt dem Kapitel „Rechenoperationen“. Der Abschnitt, der das Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Determinanten behandelt, wurde im Umfang erhöht, dafür entfallen Rechenoperationen mit Matrizen. Die Kapitel Geometrie und Trigonometrie sind entsprechend den Lehrplananforderungen umfassend bearbeitet worden. Das Kapitel „Funktionen“ wurde neu strukturiert. Es schließen sich Zahlenfolgen und Grenzwerte an. Der Differenzial- und der Integralrechnung ist nun je ein eigenes Kapitel gewidmet, um die verschiedenen Grundanliegen dieser Teilgebiete der Infinitesimalrechnung hervorzuheben. Im Kapitel „Differenzialrechnung“ wird auch die geometrische Bedeutung der 2. Ableitung einer Funktion mit allen Konsequenzen zur Bestimmung von Maxima und Minima von Funktionen betrachtet. Der Abschnitt „Kurvendiskussion“ wurde vollständig überarbeitet. Neu aufgenommen wurde ein Abschnitt über das Aufstellen von Funktionsgleichungen mittels Ableitungen. Im Kapitel „Integralrechnung“ wurden Abschnitte über die Integration durch Substitution sowie die Berechnung des Rauminhalts von Rotationskörpern ergänzt. Anschließend folgen die Kapitel „Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung“ und „Einführung in die Statistik“. Neu ist hier ein Bezug im Bereich der Anwendungsaufgaben auf Taschenrechner mit Computeralgebrasystem und auf Tabellenkalkulationssoftware. Die Inhalte zu komplexen Zahlen waren bisher auf verschiedene Abschnitte verteilt. In die Neuaufgabe wurde ein separates Kapitel „Komplexe Zahlen“ aufgenommen. Auf vielfachen Wunsch der Leser dieses Buches

wurde die „Vektorrechnung“ als neues Kapitel hinzugefügt. Die Bilder und Grafiken zur Illustration der dargestellten mathematischen Sachverhalte wurden teilweise neu erstellt, an der großen Anzahl von Beispielen wurde festgehalten.

Die Autoren, die sämtlich über ein hohes Maß an Erfahrung in der Technikerausbildung verfügen, haben sich um größtmögliche Verständlichkeit und Anschaulichkeit bemüht.

Durch die Art der Stoffdarbietung eignet sich das Buch sowohl für den Gebrauch im Unterricht als auch zum Selbststudium. Zu diesem Zweck wurden die Kontrollfragen, die sich jedem Abschnitt anschließen, beibehalten und die Anzahl der Aufgaben, die weitgehend anwendungsorientiert und praxisnah sind, erhöht. Am Kapitelende sind zur Selbstkontrolle die Lösungen der Aufgaben eingefügt.

Für Kritik, Korrekturen, Anregungen und Hinweise inhaltlicher und didaktischer Art ist das Autorenteam dankbar, soll dieses Buch doch aus der Unterrichtspraxis zur Praxis, d. h. zum Gelingen des Mathematikunterrichts und zum Lernerfolg der Studierenden, beitragen.

Ein besonderer Dank gilt der Lektorin Frau Christine Fritsch vom Fachbuchverlag Leipzig, der es gelungen ist, das fünfköpfige Autorenteam mit großer Geduld zu koordinieren und dafür zu sorgen, dass dieses Unterrichtswerk in einer neuen Auflage vorliegt. Auch Frau Katrin Wulst gebührt Dank für die technische Unterstützung und die Herstellung dieses Buches. Die Zusammenarbeit mit beiden Fachfrauen war stets sehr angenehm.

Möge dieses Buch dazu beitragen, dass die Vermittlung mathematischer Sachverhalte und Zusammenhänge im Rahmen der Technikerausbildung gelingt!

Leipzig, im Mai 2014

Die Verfasser

Inhalt

1	Rechenoperationen	13
1.1	Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik	13
1.1.0	Vorbemerkung	13
1.1.1	Begriff der Menge	13
1.1.2	Relationen zwischen Mengen	16
1.1.3	Operationen mit Mengen	19
1.2	Zahlenbereiche	23
1.2.0	Vorbemerkung	23
1.2.1	Bereich der reellen Zahlen und seine Teilbereiche	23
1.2.2	Zahlensysteme	25
1.2.3	Intervalle, absoluter Betrag, Runden von Zahlen	27
1.3	Rechenoperationen erster und zweiter Stufe	32
1.3.0	Vorbemerkung	32
1.3.1	Grundbegriffe	32
1.3.2	Rechenoperationen mit Zahlen	34
1.3.3	Algebraische Summen	35
1.3.4	Bruchrechnung	39
1.3.5	Proportionen	44
1.3.6	Summenzeichen	49
1.4	Rechenoperationen dritter Stufe	51
1.4.0	Vorbemerkung	51
1.4.1	Rechnen mit Potenzen und Wurzeln	51
1.4.2	Rechnen mit Logarithmen	61
1.4.3	Potenz eines Binoms	68
1.5	Aufgaben	71
1.6	Lösungen	80
2	Gleichungen und Ungleichungen	86
2.1	Gleichungen mit einer Variablen	86
2.1.0	Vorbemerkung	86
2.1.1	Grundbegriffe	86
2.1.2	Lösen von algebraischen Gleichungen	90
2.1.3	Lösen von transzendenten Gleichungen	99
2.1.4	Lösen von Gleichungen durch Näherungsverfahren	104
2.2	Ungleichungen	110
2.2.0	Vorbemerkung	110
2.2.1	Grundbegriffe	110
2.2.2	Einfache Typen linearer Ungleichungen	111
2.3	Lineare Gleichungssysteme	113
2.3.0	Vorbemerkung	113

2.3.1	Herkömmliche Lösungsverfahren	114
2.3.2	Lösbarkeitsbetrachtungen	117
2.3.3	Gauß'scher Algorithmus	120
2.3.4	Determinantenverfahren	125
2.4	Aufgaben	131
2.5	Lösungen	138

3 Geometrie **143**

3.1	Planimetrie	143
3.1.0	Vorbemerkung	143
3.1.1	Grundbegriffe	143
3.1.2	Winkel an sich schneidenden Geraden	146
3.1.3	Bewegungen in der Ebene, Kongruenz, Symmetrie	147
3.1.4	Grundkonstruktionen	151
3.1.5	Ähnlichkeit	154
3.1.6	Allgemeines Dreieck	156
3.1.7	Rechtwinkliges, gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck	163
3.1.8	Viereck	166
3.1.9	Regelmäßiges n -Eck	168
3.1.10	Kreis	170
3.1.11	Flächeninhalte	174
3.2	Stereometrie	180
3.2.0	Vorbemerkung	180
3.2.1	Quader	181
3.2.2	Prisma und Pyramide	183
3.2.3	Prismatoid	188
3.2.4	Zylinder und Kegel	190
3.2.5	Cavalierisches Prinzip	195
3.2.6	Kugel und Kugelteile	195
3.3	Aufgaben	200
3.4	Lösungen	208

4 Trigonometrie **215**

4.1	Goniometrie	215
4.1.0	Vorbemerkung	215
4.1.1	Winkelmessung	215
4.1.2	Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck	216
4.1.3	Winkelfunktionen für beliebige Winkel	222
4.1.4	Quadrantenrelationen	225
4.1.5	Zusammenhang zwischen den Funktionswerten eines Winkels ..	231
4.1.6	Additionstheoreme	233
4.2	Dreiecksberechnung	237
4.2.1	Allgemeines	237
4.2.2	Sinus- und Kosinussatz	238
4.2.3	Grundaufgaben der Dreiecksberechnung	244
4.2.4	Weitere Anwendungen	246
4.3	Aufgaben	252
4.4	Lösungen	258

5 Funktionen 263

5.0	Vorbemerkung	263
5.1	Der Funktionsbegriff	263
5.1.1	Die Definition einer Funktion	263
5.1.2	Darstellungsformen von Funktionen	264
5.1.3	Eigenschaften von Funktionen	269
5.1.4	Die Umkehrfunktion	271
5.2	Lineare Funktionen (Geraden)	274
5.2.1	Die analytischen Darstellungsarten linearer Funktionen	274
5.2.2	Die lineare Funktion und ihre Umkehrfunktion	277
5.2.3	Lagebeziehungen zwischen Geraden	279
5.3	Quadratische Funktionen (Parabeln)	283
5.3.1	Die Darstellungsarten quadratischer Funktionen	283
5.3.2	Die Umwandlung zwischen den Darstellungsarten quadratischer Funktionen	288
5.3.3	Die Umkehrfunktion der quadratischen Funktion	291
5.4	Potenz- und Wurzelfunktionen	293
5.4.1	Potenzfunktionen und ihre Eigenschaften	293
5.4.2	Wurzelfunktionen und ihre Eigenschaften	295
5.5	Ganzrationale Funktionen	296
5.6	Gebrochenrationale Funktionen	300
5.7	Exponential- und Logarithmusfunktionen	303
5.7.1	Exponentialfunktionen und ihre Eigenschaften	303
5.7.2	Logarithmusfunktionen und ihre Eigenschaften	306
5.8	Trigonometrische Funktionen und ihre Umkehrfunktionen	307
5.9	Der Einfluss von Funktionsparametern auf Funktionsgraphen	313
5.10	Bestimmung von Funktionsgleichungen	322
5.11	Aufgaben	326
5.12	Lösungen	333

6 Zahlenfolgen 341

6.0	Vorbemerkung	341
6.1	Grundbegriffe	341
6.2	Arithmetische Folgen	344
6.3	Geometrische Folgen	348
6.4	Anwendungsbeispiele der geometrischen Folge	350
6.5	Grenzwert einer Zahlenfolge	355
6.6	Grenzwert einer Funktion	359
6.6.1	Grenzwert einer Funktion an der Stelle $x = a$	359
6.6.2	Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$	363
6.7	Aufgaben	364
6.8	Lösungen	366

7 Differenzialrechnung 369

7.0	Vorbemerkung	369
7.1	Grundbegriffe	369
7.2	Ableitung der Potenzfunktion	374
7.3	Ableitung einer konstanten Funktion und einer Funktion mit konstantem Faktor	376
7.4	Ableitung einer Summe von Funktionen	376
7.5	Differenzial einer Funktion	377
7.6	Weitere Grundregeln der Differenzialrechnung	381
7.6.1	Ableitung eines Produktes von Funktionen	381
7.6.2	Ableitung eines Quotienten zweier Funktionen	382
7.7	Regeln für die Ableitung weiterer Funktionen	384
7.8	Höhere Ableitungen	386
7.9	Geometrische Interpretation der ersten und zweiten Ableitung	387
7.10	Kurvendiskussion	392
7.11	Extremwertaufgaben	398
7.12	Aufstellen von Funktionsgleichungen mittels der Ableitungen	401
7.13	Aufgaben	404
7.14	Lösungen	407

8 Integralrechnung 413

8.0	Vorbemerkung	413
8.1	Unbestimmtes Integral	413
8.2	Bestimmtes Integral	416
8.3	Eigenschaften bestimmter Integrale	421
8.4	Bestimmtes Integral als Grenzwert einer Summenfolge	422
8.5	Flächeninhalte ebener Flächen zwischen einer Kurve und der x -Achse	426
8.6	Flächen zwischen zwei Kurven	428
8.7	Integration durch Substitution	431
8.8	Der Rauminhalt von Rotationskörpern	433
8.9	Numerische Integration	436
8.10	Aufgaben	440
8.11	Lösungen	441

9 Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung 443

9.0	Vorbemerkung	443
9.1	Zufällige Erscheinungen und Ereignisse	443
9.2	Wahrscheinlichkeitsbegriff	446
9.3	Anzahl von Ergebnissen und Wahrscheinlichkeiten mehrstufiger Zufallsversuche	453
9.4	Simulation von Zufallsversuchen	466
9.5	Aufgaben	471
9.6	Lösungen	473

10	Einführung in die Statistik	475
10.0	Vorbemerkung	475
10.1	Statistische Erhebung, Auswertung und Darstellung von Daten	475
10.2	Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilung	495
10.3	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	499
10.4	Binomialverteilte Zufallsgrößen	502
10.5	Anwendungen zur Binomialverteilung	504
10.6	Aufstellen und Testen von Hypothesen	510
10.7	Anwendungsaufgaben	514
10.8	Die Poisson-Verteilung	516
10.9	Die Normalverteilung	519
10.10	Anwendungen der Normalverteilung	524
10.11	Exponentialverteilung	526
10.12	Aufgaben	527
10.13	Lösungen	532
11	Komplexe Zahlen	537
11.0	Vorbemerkung	537
11.1	Die arithmetische Form der komplexen Zahlen	537
11.1.1	Imaginäre und komplexe Zahlen	537
11.1.2	Rechnen mit komplexen Zahlen in der arithmetischen Form	541
11.1.3	Die Darstellung komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlen- ebene	544
11.2	Die trigonometrische Form der komplexen Zahlen	546
11.3	Die Exponentialform der komplexen Zahlen	550
11.3.1	Die Multiplikation und die Division komplexer Zahlen in der Ex- ponentialform	550
11.3.2	Das Potenzieren, das Radizieren und das Logarithmieren kom- plexer Zahlen	552
11.4	Aufgaben	555
11.5	Lösungen	556
12	Vektorrechnung	560
12.0	Vorbemerkung	560
12.1	Punkte und Vektoren im kartesischen Koordinatensystem	560
12.1.1	Punkte im kartesischen Koordinatensystem	560
12.1.2	Vektoren im kartesischen Koordinatensystem	561
12.2	Rechnen mit Vektoren	565
12.2.1	Addition und Subtraktion von Vektoren	565
12.2.2	Die Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen	568
12.2.3	Das Skalarprodukt	570
12.2.4	Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)	576
12.3	Die vektorielle Beschreibung von Geraden	579
12.3.1	Die Vektorgleichung einer Geraden	579
12.3.2	Die Lagebeziehungen zwischen Geraden	581
12.4	Die vektorielle Beschreibung von Ebenen	584
12.4.1	Die Vektorgleichung einer Ebene	584

12.4.2	Die Lagebeziehungen zwischen einer Ebene und einer Geraden ..	588
12.4.3	Die Lagebeziehung zwischen Ebenen	590
12.4.4	Der Normalenvektor einer Ebene	594
12.5	Aufgaben	598
12.6	Lösungen	605
Sachwortverzeichnis		609

1

Rechenoperationen

■ 1.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik

1.1.0 Vorbemerkung

Die Mengenlehre hat sich seit ihrer Begründung durch Georg Cantor (1845–1918) zu einer grundlegenden mathematischen Disziplin entwickelt. Viele Gebiete der Mathematik und der Logik wurden durch sie entscheidend beeinflusst.

Die Logik ist eine Wissenschaft, in der die allgemeinste Struktur des richtigen Denkens untersucht wird.

Mithilfe der Mengenlehre und Logik lassen sich mathematische Zusammenhänge präzise und übersichtlich darstellen. Deshalb werden in diesem Abschnitt Grundbegriffe und -beziehungen aus beiden Gebieten eingeführt. Ihre Anwendung in den folgenden Abschnitten wird mit dazu beitragen, das Erkennen der dargestellten Zusammenhänge zu erleichtern.

1.1.1 Begriff der Menge

Für den Mengenbegriff gab Cantor die *Erklärung*

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung M bestimmter, wohlunterschiedener Objekte m unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte m heißen die **Elemente** von M .

Mengen werden mit Großbuchstaben bezeichnet. Die Elemente einer Menge werden durch geschweifte Klammern zusammengefasst.

Ein Objekt a ist entweder ein Element einer Menge M oder nicht. Man schreibt:

$a \in M$, gelesen „ a (ist) Element (von) M “;
 $a \notin N$, gelesen „ a (ist) nicht Element (von) N “.

Beispiele

- 1.1 Die Menge M aller positiven Zahlen, die Teiler von 12 sind: $M = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$. Es ist z. B. $3 \in M$, aber $5 \notin M$.
- 1.2 Die Menge L aller Lösungen der Gleichung $x^2 = 16$: $L = \{-4; 4\}$.

- 1.3 Die Menge K aller Primzahlen enthält unendlich viele Elemente: $K = \{2; 3; 5; 7; \dots\}$.
- 1.4 Die Menge P aller geraden Primzahlen enthält nur ein Element: $P = \{2\}$.
- 1.5 Die Menge B aller Hauptstädte der deutschen Bundesländer enthält 16 Elemente: $B = \{\text{Hauptstadt Bremen; Dresden; München; } \dots \text{ Stuttgart}\}$. Es ist „Schwerin“ $\in B$, aber „Meißen“ $\notin B$. ■

Während die Umgangssprache unter einer Menge eine Vielzahl von Elementen versteht, können Mengen im Sinne der angegebenen Erklärung auch aus wenigen Elementen bzw. aus keinem Element bestehen.

Eine Menge, die nur ein Element enthält, heißt **Einemenge**. Wenn sie zwei verschiedene Elemente enthält, heißt sie **Zweiermenge** usw. Eine Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge** (Symbol: $\emptyset$). Es ist $\emptyset = \{ \}$.

Beispiele

- 1.6 Die Gleichung $x^2 = -4$ hat keine reelle Lösung (denn das Quadrat einer reellen Zahl kann nicht negativ sein). Die Menge ihrer Lösungen ist leer: $L_1 = \{ \} = \emptyset$.
- 1.7 Die Gleichung $2x = 0$ hat die Lösung 0 (denn $2 \cdot 0 = 0$). Die Menge ihrer Lösungen ist die **Einemenge** $L_2 = \{0\}$. L_2 ist nicht die leere Menge, denn sie enthält ein Element (die Zahl 0), während L_1 in *Beispiel 1.6* kein Element enthält. ■

Zwischen den Begriffen der Mengenlehre und der Logik besteht ein enger Zusammenhang. Das gilt auch für den Begriff „Menge“.

Man kann das Prinzip der Mengenbildung mit den Begriffen „Aussage“ und „Aussageform“, die Grundbegriffe der Logik sind, erklären.

Eine **Aussage** ist ein Gebilde, das einen Sachverhalt widerspiegelt. Wenn der Sachverhalt richtig widerspiegelt wird, ist die Aussage **wahr**, anderenfalls ist sie **falsch**.

Die Eigenschaften „wahr (w)“ und „falsch (f)“ heißen **Wahrheitswerte**. Für Aussagen gilt der

Satz der Zweiwertigkeit 1.1

Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Es gibt also

1. keinen dritten Wahrheitswert,
2. keine Aussage, die sowohl wahr als auch falsch ist.

Aussagen werden schriftlich (oder sprachlich) durch Aussagesätze ausgedrückt. Diese können auch mathematische Beziehungen sein.

Beispiele

- 1.8 „Dresden liegt an der Elbe.“ (w)
- 1.9 „7 ist durch 4 teilbar.“ (f)
- 1.10 $3 + 4 = 7$ (w)
- 1.11 $3 + 4 = 10$ (f)

1.12 $3 + 4 > 6$ (w)

1.13 $3 + 4 < 5$ (f) ■

Die *Beispiele 1.10* und *1.11* sind Gleichungen (weil sie ein Gleichheitszeichen enthalten), von denen die eine wahr und die andere falsch ist. Aus dem Begriff „Gleichung“ kann demnach nicht auf den Wahrheitswert geschlossen werden. Entsprechendes gilt für die Ungleichungen in den *Beispielen 1.12* und *1.13*.

Aussagen sind daran erkennbar, dass sie einen (und nur einen) Wahrheitswert haben. Dieser lässt sich allerdings nicht immer feststellen.

Beispiele

1.14 $3 + 5$

1.15 „Komm her!“



1.17 $ab + c$

1.18 $3 + 5 = 8$

1.19 „Der Monat März hat 30 Tage.“

1.20 „Auf anderen Sternen gibt es vernunftbegabte Lebewesen.“

1.21 „Am 1. Juni 1750 regnete es in Berlin.“ ■

Die *Beispiele 1.14* bis *1.17* sind keine Aussagen; *1.18* ist eine wahre, *1.19* eine falsche Aussage; *1.20* und *1.21* sind Aussagen, deren Wahrheitswert noch nicht bzw. nicht mehr feststellbar ist.

Die Gebilde der beiden folgenden Beispiele haben keinen Wahrheitswert, sind also keine Aussagen. Sie werden aber zu Aussagen, wenn für u bzw. x Objekte (Städtenamen bzw. Zahlen) eingesetzt werden.

Beispiele

1.22 „ u ist Hauptstadt eines deutschen Bundeslandes.“ Wenn z. B. $u = \text{„Dresden“}$ ist, entsteht eine wahre Aussage, für $u = \text{„Leipzig“}$ ergibt sich eine falsche Aussage.1.23 $x^2 = 16$ wird für $x = 4$ und für $x = -4$ zu einer wahren, für jede andere Zahl zu einer falschen Aussage. ■

Für $x^2 = 16$ könnte auch geschrieben werden: $(\dots)^2 = 16$. Demnach steht x für eine Leerstelle in der Gleichung.

- Ein Zeichen, das für eine Leerstelle steht, heißt **Variable (Veränderliche)**. Mithilfe des Variablenbegriffs wird definiert:
- Eine **Aussageform** ist ein Gebilde, das mindestens eine Variable enthält und durch Belegen dieser Variablen zu einer Aussage wird.

Die Gebilde in den *Beispielen 1.22* und *1.23* sind demnach Aussageformen.

Für die Objekte, mit denen die Variablen belegt werden können, ist ein Bereich zu wählen (**Grundbereich**), und zwar so, dass beim Belegen sinnvolle Aussagen entstehen (für *Beispiel 1.23* wären z. B. Städtenamen kein möglicher Grundbereich). Wenn sich beim Belegen einer Variablen eine wahre Aussage ergibt, so sagt man „die Aussageform wird erfüllt (gelöst)“, und das Objekt heißt **Erfüllung (Lösung)** der Aussageform. Alle Lösungen können zu einer Menge zusammengefasst werden.

Prinzip der Mengenbildung

Wenn eine Aussageform für die Objekte eines Grundbereichs vorliegt, so bilden alle Objekte, die diese Aussageform erfüllen (lösen), eine **Menge**.

Die Aussageform drückt eine gemeinsame Eigenschaft aller Elemente der Menge aus. Wenn die Aussageform mit $H(x)$ bezeichnet wird (d. h. ein Gebilde, das die Variable x enthält, gelesen: „ H von x “), so kann man schreiben:

$$M = \{x: H(x)\}, \quad \text{gelesen: „}M \text{ ist die Menge aller (Elemente) } x, \text{ für die } H(x) \text{ gilt“}.$$

Beispiele

- 1.22 (Fortsetzung) Die Lösungsmenge ist B (siehe *Beispiel 1.5*).
Man kann schreiben $B = \{u: u \text{ ist Hauptstadt eines deutschen Bundeslandes}\}$.
- 1.23 (Fortsetzung) Die Lösungsmenge ist L (siehe *Beispiel 1.2*).
Es ist $L = \{\pm 4\} = \{x: x^2 = 16\}$, falls der Grundbereich die Menge der reellen Zahlen ist. Wenn der Grundbereich auf die Menge der natürlichen Zahlen eingeschränkt wird, ändert sich die Lösungsmenge: $L_n = \{4\}$. ■

Mengen lassen sich demnach auf zwei Arten darstellen: durch Angabe der Elemente oder Angabe der die Menge definierenden Aussageform. Eine Menge heißt **Allmenge**, wenn sie alle Objekte des Grundbereichs enthält. Im *Abschnitt 1.1* dieses Buches wird sie mit U bezeichnet.

Beispiel

- 1.24 Grundbereich: Gesamtheit aller reellen Zahlen.
Es gilt $\{x: x + x = 2x\} = U$, denn die Gleichung wird durch jede reelle Zahl gelöst. ■

Kontrollfragen

- 1.1 Wie ist nach Cantor der Begriff der Menge erklärt?
- 1.2 Was ist eine Aussage, und woran ist sie erkennbar?
- 1.3 Was ist eine Variable?
- 1.4 Was ist eine Aussageform, und wie lässt sich mit ihrer Hilfe das Prinzip der Mengenbildung erklären?

Aufgaben: 1.1 und 1.2

1.1.2 Relationen zwischen Mengen**Definition 1.1**

Zwei Mengen A und B heißen **gleich** genau dann, wenn sie dieselben Elemente haben.

Schreibweise: $A = B$, gelesen: „ A (ist) gleich B “.

A heißt **Teilmenge** von B genau dann, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

Schreibweise: $A \subseteq B$, gelesen: „ A (ist) Teilmenge von B “.

Die Teilmengenrelation $A \subseteq B$ wird auch Inklusion genannt.

Mengen kann man durch Punktmengen in der Ebene veranschaulichen. Alle Punkte, die von einer geschlossenen Kurve begrenzt werden, sollen Elemente der Menge sein. In den *Bildern 1.1* und *1.2* sind $A \subseteq B$ und $A = B$ dargestellt. Die Rechteckfläche soll den Grundbereich (die Allmenge) U darstellen.

Folgerungen:

1. Wenn $A \subseteq B$ ist, so ist $B \supseteq A$. A wird auch Untermenge von B , und entsprechend B Obermenge von A , genannt.
2. Die Gleichheit $A = B$ ist ein Sonderfall von $A \subseteq B$. Es ist $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ ist, d. h., wenn jedes Element von A auch Element von B und jedes Element von B auch Element von A ist.
3. Wenn $A \subseteq B$ ist und B mindestens ein Element enthält, das nicht Element von A ist, so heißt A **echte Teilmenge** von B : $A \subset B$.
4. Für die leere Menge, eine beliebige Menge A und die Allmenge gilt:

$$\emptyset \subseteq A; \quad A \subseteq U \quad (1.1)$$

Zwei Mengen A und B , für die weder die Teilmengen- noch die Gleichheitsrelation gilt, können gemeinsame Elemente haben, aber dann enthält jede Menge mindestens ein Element, das nicht Element der anderen Menge ist (*Bild 1.3*). Falls A und B keine gemeinsamen Elemente haben, heißen sie **disjunkte (elementfremde) Mengen** (*Bild 1.4*).

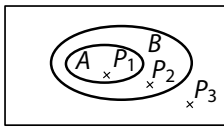


Bild 1.1

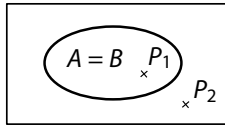


Bild 1.2

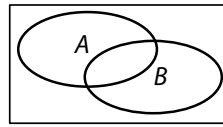


Bild 1.3

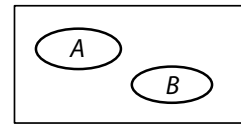


Bild 1.4

Beispiele

- 1.25 Grundbereich: $U = \{1; 2; \dots; 20\}$ (Menge der ganzen Zahlen von 1 bis 20).

Wenn $A = \{x: x \text{ ist teilbar durch } 6\} = \{6; 12; 18\}$ und
 $B = \{x: x \text{ ist teilbar durch } 3\} = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$,
 so ist $A \subseteq B$ (A ist sogar echte Teilmenge von B : $A \subset B$).

- 1.26 Grundbereich: Menge aller Vierecke.

Wenn A die Menge aller Quadrate ist und B die Menge aller gleichseitigen Rechtecke, also
 $A = \{x: x \text{ ist ein Quadrat}\}$, $B = \{x: x \text{ ist gleichseitiges Rechteck}\}$, so ist $A = B$.

- 1.27 Welche Relationen bestehen zwischen $P = \{3; 5; 7\}$, $Q = \{5; 7; 10\}$, $R = \{5; 7; 9; 10\}$ und $S = \{4; 6\}$?

Lösung: P und Q enthalten gemeinsame Elemente, es besteht aber keine Teilmengenrelation; für P und R gilt das Gleiche; P und S sind disjunkt. Es ist $Q \subset R$; Q und S und gleichfalls R und S sind disjunkt. ■

Zusammenhang mit logischen Operationen

In *Abschnitt 1.1.1* wurde festgestellt, dass zwischen Mengenlehre und Logik ein enger Zusammenhang besteht. Das gilt auch für die in diesem Abschnitt eingeführten Relationen:

- (1) $A \subseteq B$: Für alle Elemente des Grundbereichs gilt (vgl. *Bild 1.1*) „wenn $x \in A$ erfüllt ist, so muss auch $x \in B$ erfüllt sein“ (z. B. Punkt P_1), aber „wenn $x \in B$ erfüllt ist, so kann $x \in A$ erfüllt sein, muss aber nicht“ (z. B. liegen P_1 und P_2 beide in B , aber P_2 liegt nicht in A). In der Logik gibt es für zwei Aussagen (oder auch Aussageformen) p, q die Verknüpfung $p \Rightarrow q$. Sie heißt **Implikation** und wird gelesen „wenn p , so (muss) q “ (bei Vertauschen von p und q „wenn q , so kann p “). Die Bedingung p heißt hinreichend für q , q heißt notwendig für p . Zwischen Teilmengenrelation und Implikation besteht demnach der Zusammenhang:

$A \subseteq B$ gilt genau dann, wenn $x \in A \Rightarrow x \in B$ ($x \in B$ folgt aus $x \in A$).

Die Bedingung $x \in A$ ist hinreichend für $x \in B$, aber nicht notwendig; andererseits ist $x \in B$ notwendig für $x \in A$, aber nicht hinreichend. Für die Punktmenge in *Bild 1.1* bedeutet das: Damit ein Punkt in B liegt, ist es hinreichend, dass er in A liegt (P_1), aber nicht notwendig (auch P_2 liegt in B). Damit ein Punkt in A liegt, ist es notwendig, dass er in B liegt (denn wenn er nicht in B liegt, kann er auch nicht in A liegen: P_3); die Bedingung ist aber nicht hinreichend (P_2 liegt zwar in B , aber nicht in A).

- (2) $A = B$: Für alle Elemente des Grundbereichs gilt (vgl. *Bild 1.2*) „wenn $x \in A$, so muss $x \in B$ “ und auch „wenn $x \in B$, so muss $x \in A$ “. In der Logik gibt es eine entsprechende Verknüpfung. Sie heißt **Äquivalenz** (Gleichwertigkeit): $p \Leftrightarrow q$, gelesen „genau dann q , wenn p “. Da $p \Leftrightarrow q$ sowohl $p \Rightarrow q$ als auch $q \Rightarrow p$ bedeutet, heißt jede der Bedingungen p, q ist notwendig und hinreichend für die andere.

Die Äquivalenz wird auch gelesen „dann und nur dann q , wenn p “.

Zwischen Gleichheitsrelation und Äquivalenz besteht demnach der Zusammenhang:

$A = B$ gilt genau dann, wenn $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Da äquivalente Aussageformen gleiche Mengen erklären, wird besonders die letzte Lesart genutzt, wenn ein neuer Begriff definiert wird.

Beispiele

- 1.28 Für die Mengen in *Beispiel 1.25* gilt wegen $A \subseteq B$ „ x ist teilbar durch 6“ $A \Rightarrow B$ „ x ist teilbar durch 3“. Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, so muss sie auch durch 3 teilbar sein, d. h., die Teilbarkeit durch 6 ist hinreichende Bedingung für die Teilbarkeit durch 3 (aber keine notwendige). Andererseits gilt: Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, so kann sie durch 6 teilbar sein, d. h., Teilbarkeit durch 3 ist notwendige Bedingung für die Teilbarkeit durch 6 (aber keine hinreichende).

- 1.29 Grundbereich: Menge aller Vierecke.

Welche der beiden Bedingungen „ x ist Rechteck“, „ x ist Quadrat“ ist notwendige Bedingung für die andere?

Lösung: Für $R = \{x: x \text{ ist Rechteck}\}$ und $Q = \{x: x \text{ ist Quadrat}\}$ gilt $Q \subseteq R$. Folglich gilt für die Aussageformen „ x ist Quadrat“ $\Rightarrow$ „ x ist Rechteck“.

Da die notwendige Bedingung rechts vom Implikationszeichen steht, ist „ x ist Rechteck“ eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für „ x ist Quadrat“.

- 1.30 Die Bedingungen „ x ist Rhombus“ und „ x ist gleichseitiges Viereck“ sind miteinander zu vergleichen.

Lösung: Es ist $\{x: x \text{ ist Rhombus}\} = \{x: x \text{ ist gleichseitiges Viereck}\}$, folglich „ x ist Rhombus“ $\Leftrightarrow$ „ x ist gleichseitiges Viereck“, d. h., „ein Viereck ist ein Rhombus genau dann, wenn es gleichseitig ist“. Jede der beiden Bedingungen ist notwendig und hinreichend für die andere.

Das Beispiel zeigt, wie mithilfe einer Äquivalenz ein Begriff (der Begriff „Rhombus“) definiert werden kann. ■

Kontrollfragen

- 1.5 Wie ist die Teilmengenrelation definiert?
- 1.6 Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit eine Menge eine echte Teilmenge einer anderen ist?
- 1.7 Mithilfe welcher Wörter ist eine Implikation $p \Rightarrow q$ zu formulieren? Wie ist sie nach Vertauschen von p und q zu lesen? Welche Art von Bedingung sind p bzw. q ?
- 1.8 Mithilfe welcher Wörter ist eine Äquivalenz zu formulieren? Welche Art von Bedingung sind p und q ?

Aufgaben: 1.3 und 1.4

1.1.3 Operationen mit Mengen

Bei einer Mengenoperation wird aus zwei Mengen eine neue gebildet. Die wichtigsten Operationen sind Durchschnitt, Vereinigung und Differenz.

Definition 1.2

Gegeben seien zwei Mengen A und B .

Der **Durchschnitt** $A \cap B$ (gelesen: „ A geschnitten mit B “) enthält alle Elemente, die gemeinsame Elemente von A und B sind (Bild 1.5).

Die **Vereinigung** $A \cup B$ (gelesen: „ A vereinigt mit B “) enthält alle Elemente, die Element von mindestens einer der Mengen A , B sind (Bild 1.6).

Die **Differenz** $A \setminus B$ (gelesen: „ A ohne B “) enthält alle Elemente von A , die nicht Element von B sind (Bild 1.7).

Entsprechend enthält $B \setminus A$ alle Elemente von B , die nicht Element von A sind (Bild 1.8).

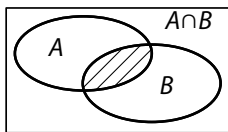


Bild 1.5

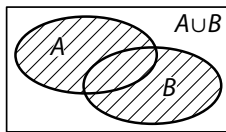


Bild 1.6

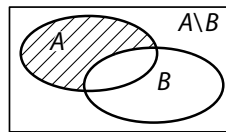


Bild 1.7

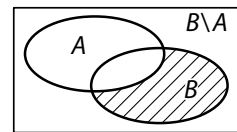


Bild 1.8

Beispiel

- 1.31 Mit $A = \{a; b; c; d\}$ und $B = \{c; d; e; f\}$ sind Durchschnitt, Vereinigung und Differenzmengen zu bilden.

Lösung:

$$A \cap B = \{c; d\} \quad A \cup B = \{a; b; c; d; e; f\}$$

$$A \setminus B = \{a; b\} \quad B \setminus A = \{e; f\}$$



Allgemein gilt (vgl. *Bilder 1.5 bis 1.8*):

$$A \cap B \subseteq A \cup B \quad (1.2)$$

$$A \setminus B \subseteq A; \quad B \setminus A \subseteq B \quad (1.3)$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B); \quad B \setminus A = B \setminus (A \cap B) \quad (1.4)$$

Beispiele

- 1.32 Es seien $A = \{c; d\}$ und $B = \{a; b; c; d; e\}$, d. h., $A \subseteq B$.

Dann ist

$$A \cap B = \{c; d\} = A; \quad A \cup B = \{a; b; c; d; e\} = B$$

und nach *Gln. (1.4)*

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = \{c; d\} \setminus \{c; d\} = \emptyset$$

$$B \setminus A = B \setminus (A \cap B) = \{a; b; c; d; e\} \setminus \{c; d\} = \{a; b; e\}$$

- 1.33 Es seien $A = \{2; 4\}$ und $B = \{10; 12; 14\}$, d. h., A und B sind disjunkt.

Dann ist

$$A \cap B = \emptyset; \quad A \cup B = \{2; 4; 10; 12; 14\}$$

$$A \setminus B = \{2; 4\} \setminus \emptyset = \{2; 4\} = A$$

$$B \setminus A = \{10; 12; 14\} \setminus \emptyset = \{10; 12; 14\} = B \quad \blacksquare$$

Aus diesen Beispielen folgt durch Verallgemeinerung:

1. Wenn eine Menge A Teilmenge einer Menge B ist, so ist der Durchschnitt gleich der Teilmenge, die Vereinigung gleich der Obermenge, und die Differenz $A \setminus B$ ist leer:

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A, \quad A \cup B = B, \quad A \setminus B = \emptyset$$

2. Wenn zwei Mengen A, B disjunkt sind, so ist der Durchschnitt leer ($A \cap B = \emptyset$). Für die Differenzmengen gilt:

$$A \setminus B = A; \quad B \setminus A = B.$$

Eigenschaften des Durchschnitts und der Vereinigung von Mengen sind:

Kommutativität

$$A \cap B = B \cap A; \quad A \cup B = B \cup A \quad (1.5)$$

Assoziativität

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C; \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \end{aligned} \quad (1.6)$$

Distributivität

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C); \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Idempotenz

$$A \cap A = A; \quad A \cup A = A \quad (1.8)$$

Kommutativität und Idempotenz sind offensichtlich, die beiden anderen Eigenschaften lassen sich an Beispielen leicht nachprüfen.

Die Differenz zweier Mengen ist i. Allg. weder kommutativ noch assoziativ:

$$A \setminus B \neq B \setminus A, \quad A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$$

Beispiel

- 1.34 Für $A = \{a; b; c; d\}$, $B = \{b; c; d; e\}$ und $C = \{c; d; e; f\}$ ist zu zeigen, dass die Differenz nicht assoziativ ist.

Lösung: Es ist

$$A \setminus (B \setminus C) = A \setminus \{b\} = \{a; c; d\}$$

$$(A \setminus B) \setminus C = \{a\} \setminus C = \{a\}$$

$$\{a; c; d\} \neq \{a\}, \quad \text{d. h.,} \quad A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C \quad \blacksquare$$

Als letzte Mengenoperation wird das Bilden des Komplements eingeführt.

Definition 1.3

Das **Komplement** $\bar{A}$ einer Menge A enthält alle Elemente des Grundbereichs (der Allmenge U), die nicht Element von A sind (*Bild 1.9*).

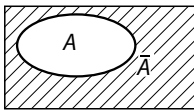


Bild 1.9

A und $\bar{A}$ sind demnach disjunkte Mengen: $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Ferner gilt: $A \cup \bar{A} = U$; $U \setminus A = \bar{A}$; $U \setminus \bar{A} = A$.

Zweifache Komplementbildung hebt sich auf:

$$\bar{\bar{A}} = A \quad (1.9)$$

Zusammenhang mit logischen Operationen

Eine Verknüpfung zweier Aussagen (oder Aussageformen) p und q , die ausdrückt, dass bei zwei Sachverhalten sowohl der eine als auch der andere gilt, heißt **Konjunktion** $p \wedge q$, gelesen: „ p und q “. Wenn von zwei Sachverhalten mindestens einer gilt, heißt die Verknüpfung **Alternative** $p \vee q$, gelesen: „ p oder q “. Mit Konjunktion und Alternative kann man Durchschnitt und Vereinigung von Mengen definieren:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

(d. h., x ist genau dann ein Element des Durchschnitts, wenn es Element der einen „und (auch)“ der anderen Menge ist);

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

(d. h., x ist genau dann ein Element der Vereinigung, wenn es ein Element der einen „oder“ der anderen Menge ist (oder auch ein Element beider Mengen ist)).

Das Bindewort „oder“ schließt bei der Alternative den Fall mit ein, dass beide Sachverhalte gelten. Deshalb wird es auch „einschließendes „oder““ genannt. Das Bindewort „oder“ kann aber auch ausdrücken, dass nur einer der beiden Sachverhalte gilt („ausschließendes „oder““, „entweder – oder“), z. B. in dem Satz „Jede ganze Zahl ist (entweder) gerade oder ungerade“. Eine Verknüpfung mit dem ausschließenden „oder“ ist keine Alternative.

Eine Aussage (oder Aussageform) p , mit der zu einem gegebenen Sachverhalt der entgegengesetzte ausgedrückt wird, heißt **Negation** $\neg p$ (gelesen: „nicht p “). Sie entsteht aus p durch Vorsetzen von „es ist nicht wahr, dass ...“. Wenn eine Menge A die Lösungen der Aussageform $H(x)$ als Elemente hat, so wird das Komplement $\bar{A}$ aus den Lösungen der Negation von $H(x)$ gebildet.

Für die Negation von p ist auch die Schreibweise $\bar{p}$ üblich.

Beispiele

- 1.35 Für $M = \{x: x \text{ ist teilbar durch } 2\}$ und $N = \{x: x \text{ ist teilbar durch } 3\}$ ergibt sich $M \cap N = \{x: (x \text{ ist teilbar durch } 2) \wedge (x \text{ ist teilbar durch } 3)\}$, d. h., $M \cap N$ enthält die durch 2 und durch 3 teilbaren, also die durch 6 teilbaren Zahlen: $M \cap N = \{0; 6; 12; \dots\}$.

Die Vereinigung ist $M \cup N = \{x: (x \text{ ist teilbar durch } 2) \vee (x \text{ ist teilbar durch } 3)\}$, d. h., $M \cup N$ enthält die Zahlen, die durch 2 oder durch 3 (oder durch beide) teilbar sind: $M \cup N = \{0; 2; 3; 4; 6; 8; \dots\}$.

- 1.36 Im Grundbereich $\{1; 2; \dots; 10\}$ sei

$$A = \{x: x < 7\} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Wenn die Aussageform „ $x < 7$ “ negiert wird, ergibt sich „es ist nicht wahr, dass $x < 7$ “, kürzer „ x ist nicht kleiner als 7“ oder „ $x \geq 7$ “, und das Komplement der Menge A ist

$$\bar{A} = \{x: x \geq 7\} = \{7; 8; 9; 10\}.$$



Kontrollfragen

- 1.9 Mithilfe welcher logischer Verknüpfungen werden Durchschnitt und Vereinigung von Mengen definiert?
- 1.10 Es sei A Teilmenge von B . Was folgt daraus für Durchschnitt $A \cap B$, Vereinigung $A \cup B$ und Differenz $A \setminus B$?
- 1.11 Es seien A und B disjunkte Mengen. Was folgt daraus für Durchschnitt $A \cap B$ und die Differenzen $A \setminus B$, $B \setminus A$?
- 1.12 Welche Relation besteht zwischen Durchschnitt und Vereinigung zweier Mengen?

Aufgaben: 1.5 bis 1.10

Sachwortverzeichnis

2π -periodisch 308
2-Punkte-Form der Geradengleichung 277

A

Abbildung 263
abhängige Variable einer Funktion 263
Abklingkonstante 324
Ableitung 371
– der mittelbaren Funktion 383
– der Potenzfunktion 374
– einer konstanten Funktion 376
– eines konstanten Faktors 376
– eines Produktes 381
– eines Quotienten 382
–, geometrische Interpretation 387
–, höhere 386
–, Summe 376
– weiterer Funktionen 384
–, zweite 386
Abschreibung 347
–, geometrisch-degressive 353
–, lineare 347
Abschreibungsbetrag 347
Abschreibungssatz 347
absoluter Betrag 29
Abszisse 266
Achsenabschnitt einer Geraden 275
achsensymmetrische Funktion 294
Addition 40
Addition von Vektoren 565 f.
Additionsregel 449
Additionssystem 25
Additionstheoreme 233
Additionsverfahren 114
Ähnlichkeit 154
Ähnlichkeitssätze 160
algebraische Form komplexer Zahlen 540
algebraische Gleichung 88, 90
algebraische Summe 35
allgemeine Form der quadratischen Funktion 283
allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems 113
allgemeines Dreieck 156
Allmenge 16

Alternative 21
Alternativhypothese 510
Alternativtest 510
analytische Darstellung einer Funktion 265
Anfangsbedingung 416
Anfangsglied 342
Anfangswert 324
äquivalente Umformung 89
Äquivalenz 18
Arbeitshypothese 510
Argument einer komplexen Zahl 547
arithmetische Form komplexer Zahlen 540
arithmetisches Mittel 482
Arkusfunktionen 310
Assoziativgesetz 565, 568, 573, 576
Assoziativität 20, 33
Asymptote 304, 363, 393 f.
Aufzinsen 352
Aussage 14
Aussageform 15
–, Erfüllung 15
axialsymmetrisch 300

B

Basis 51, 61
Baumdiagramm 454
bedingte Wahrscheinlichkeit 462
Bedingung, hinreichende 18
notwendige 18
Bernoulli-Experiment 502
Bernoulli-Formel 459
Bernoulli-Kette 502
Betrag, absoluter 29
Betrag einer komplexen Zahl 545, 547
Betrag eines Vektors 562
Bijektivität 270
binärer Logarithmus 64
Binärsystem 26
Binomialkoeffizient 69, 459
Binomialverteilung 502
–, kumulative 506
binomische Formel 36
binomischer Lehrsatz 70
Bogenmaß 103, 216

Bruch, echter 39
–, unechter 39
Bruchgleichung 91
Bruchrechnung 39

C

Cavalierisches Prinzip 195
Cramersche Regel 126

D

deckungsgleiche Geraden 279
Definitionsbereich einer Funktion 263
Definitionsbereich einer Ungleichung 111
dekadischer Logarithmus 63, 66
Determinante 126
–, dreireihige 129
–, mehrreihige 129
–, zweireihige 126
Determinantenverfahren 125
Dezimalbruch 24
Dezimalsystem 26
Differenz 19
Differenzenquotient 369
–, Grenzwert 370
Differenzial 369, 377
Differenzialquotient 379
Differenzierbarkeit 373
Dimension eines Koordinatensystems 561
direkte Proportionalität 45
disjunkte Menge 17
Diskontierung 352
diskrete Zufallsgröße 516
Distributivgesetz 568, 573, 576
Distributivität 20, 33
Divergenz 107
Division 40
Doppelbruch 43
Drehung 148
Dreieck, allgemeines 156
–, Flächeninhalt 246
–, gleichschenkliges 164
–, gleichseitiges 165
–, rechtwinkliges 163
Dreiecksberechnung 237
Dreieckstransversale 161
dreireihige Determinante, Lösung 129
Durchschnitt 19
Durchstoßpunkt 588

E

Ebene, Normalenvektor 594
–, vektorielle Beschreibung 584
echt gebrochenrationale Funktion 302

echte Teilmenge 17
echter Bruch 39
e-Funktion 305
Einheitsvektor 562, 572
Einsetzungsverfahren 114
Element 13
– einer Menge 13
empirische Verteilungsfunktion 478
Endglied 344
entgegengesetzte Zahl 29, 33
 ε -Umgebung 355
Ereignis 443
Erfüllung der Aussageform 15
Ergebnis 443
Ergebnisraum 443
–, Mächtigkeit 443
Erwartungswert 499, 503, 517, 519, 522, 526
Erweitern 40
Eulersche Formel 550
Eulersche Gerade 161
explizite Form einer Funktionsgleichung 268
Exponent 51
Exponentialform komplexer Zahlen 550
Exponentialfunktionen 303
Exponentialgleichung 100
Exponentialverteilung 526
Extrempunkt 390
Extremwertaufgabe 399

F

Faktorenzerlegung 36
Fakultät 69
Fehler 1. Art 510
– 2. Art 510
Festkommadarstellung 30
Flächenelement 424
Flächeninhalt 174, 426, 428
Flächeninhalt eines Dreiecks 246
freie Variable 86
Funktion 263, 383
–, abhängige Variable 263
–, Ableitung 371
–, achsensymmetrische 294
–, allgemeine Form der quadratischen 283
–, analytische Darstellung 265
–, äußere 383
–, Definitionsbereich 263
–, ganzrationale, n -ten Grades 296
–, gebrochenrationale 300
–, gerade 293
–, grafische Darstellung 265
–, innere 383
–, konkave 387
–, konstante 269

- , konvexe 387
- , lineare 274
- , Lücke 393
- , Maschinenmodell 264
- , mittelbare 320
- , nach oben beschränkte 270
- , nach unten beschränkte 270
- , Nullstelle 270, 277 ff., 286 ff., 290 f., 298, 308 f.
- , Polstelle 300
- , Produktform einer quadratischen 287
- , Prozessmodell 264
- , punktsymmetrische 294
- , quadratische 283
- , Scheitelform einer quadratischen 286
- , stetige 362
- , streng monoton fallende 269
- , streng monoton wachsende 269
- , Stützstellen 298
- , trigonometrische 217
- , Umkehrfunktion einer linearen 277
- , unabhängige Variable 263
- , verkettete 320
- , Wertebereich 263
- Funktionsgleichung 265
- , aufstellen mittels der Ableitungen 401

G

- Galton-Brett 504
- ganze Zahl 24
- ganzrationale Funktionen 296
 - n -ten Grades 296
- Gauß'sche Zahlenebene 544
- Gauß'scher Algorithmus 120
- gebrochenrationale Funktion 300
- gebundene Variable 86
- Gegenereignis 443
- Gegenhypothese 510
- Gegenvektor 564
- Genauwert 351
- geometrisches Mittel 484
- geordnetes n -Tupel 114
- geordnetes Paar 114
- geordnetes Quadrupel 114
- geordnetes Tripel 114
- Gerade 143
 - , Achsenabschnitt 275
 - , deckungsgleiche 279
 - , Lagebeziehung 279, 581
 - , Parallelität 279
 - , Schnittpunkt 280
 - , senkrechter Schnitt zweier 282
 - , Steigungsfaktor 275

- , Steigungswinkel 276
- , Vektorgleichung 579
- gerade Funktionen 293
- gestaffelte Form 120
- gleichschenkliges Dreieck 164
- gleichseitiges Dreieck 165
- Gleichsetzungsverfahren 114
- Gleichung 86
 - , algebraische 88, 90
 - , Bruch- 91
 - dritten und höheren Grades 97
 - , Exponential- 100
 - , goniometrische 100, 102
 - , grafische Lösung 105
 - , identische 88
 - , kubische 97
 - , linear abhängige 118
 - , logarithmische 100 f.
 - n -ten Grades 97
 - , quadratische 93
 - , transzendente 88, 99 f.
 - , Wurzel- 91
- Gleichungssystem, lineares 113
- Gleitkomma Darstellung 30
- goniometrische Form komplexer Zahlen 549
- goniometrische Gleichung 100, 102
- Gradmaß 215
- grafische Darstellung einer Funktion 265
- grafische Lösung 105
- Grenze, obere 49
 - , untere 49
- Grenzkurve 302, 304
- Grenzwert 361, 369 f.
 - einer Folge 356
 - einer Funktion 359
 - , linksseitiger 360
 - , rechtsseitiger 360
 - , uneigentlicher 356
- Grundbereich 15
- Grundintegrale 415
- Grundkonstruktion 151
- Grundziffer 25

H

- Häufigkeit, relative 466
- Häufigkeitspolygon 480
- Hauptwert 351, 554
- Hauptwerte der Arkussinusfunktion 311
- Hexadezimalsystem 26
- Histogramm 480
- Hochpunkt 390
- Höhensatz 164
- Hornersches Rechenschema 98
- Hyperbel 300

I

Idempotenz 21
identische Gleichungen 88
Identität 88
imaginäre Achse 544
imaginäre Zahl 538
imaginäre Zahleneinheit 537
Imaginärteil 540
Implikation 18
implizite Form einer Funktionsgleichung 268
indirekte Proportionalität 46
Injektivität 270
Inklusion 16
inneres Produkt 572
Integral 413
– als Grenzwert 422
–, bestimmtes 416, 419, 423
–, partikuläres 417
–, unbestimmtes 414
Integralfunktion 414
Integralrechnung, Grundaufgabe 413
Integrand 414
Integration 413
– durch Substitution 431
–, Flächenberechnung 417
–, numerische 436
Integrationsgrenzen 419
Integrationsintervall 421
Integrationskonstante 414
Integrationsvariable 414
Intervall 28
irrationale Zahl 25
Iteration 105

K

Kardinalzahl 23
kartesische Koordinaten 547
kartesisches Koordinatensystem 265, 560
Kathetensatz 163
Kegel 190
Kegelstumpf 191
Kennziffer 66
Keplersche Fassregel 437
Kettenregel 383
Klasse 477
Kombination 452, 458
– mit Wiederholung 458
– ohne Wiederholung 458
Kombinatorik 452
Kommutativgesetz 568
Kommutativität 20, 33
Komplement einer Menge 21

komplexe Zahl 540
–, algebraische Form 540
–, Argument einer 547
–, arithmetische Form 540
–, Betrag einer 545, 547
–, Exponentialform 550
–, goniometrische Form 549
–, konjugiert 540
–, Norm einer 542
trigonometrische Form 549
–, vektorielle Darstellung 544
Kongruenz 149
Kongruenzsätze 158
konjugiert komplexe Zahl 540
Konjunktion 21
konstante Funktion 269
Konvergenz 107
Konvertieren 27
Konvertierung 26
Koordinaten eins Punktes 561
Koordinatenform des Skalarprodukts 573
koordinatenfreie Form des Skalarprodukts 574
Koordinatensystem, Dimension 561
–, kartesisches 560
Koordinatenursprung 266, 561
Korrelation 489
Korrelationskoeffizient 490
Kosinus 217
Kosinusfunktion 308
–, Maximum und Minimum 309
Kosinussatz 242
Kotangens 217
Kreis 170
Kreisdiagramm 266
Kreuzprodukt 576
kubische Gleichung 97
Kugel 195
kumulative Binomialverteilung 506
Kurvendiskussion 392
–, Asymptoten 394
–, Definitionsbereich 393
–, Extrempunkte und Art der Extremwerte 394
–, Nullstellen 393
–, Schnittpunkt mit der y -Achse 393
–, Skizze der Funktion 394
–, Symmetrie 393
–, Unstetigkeitsstellen 393
–, Verhalten im Unendlichen 394
–, Wendepunkte 394
–, Wertebereich 394
Kürzen 40

L

Lagebeziehung zwischen Ebenen 590
 – zwischen einer Ebene und einer Geraden 588
 – zwischen Geraden 279, 581
 Laplace-Experiment 447
 leere Menge 14
 linear abhängige Gleichung 118
 lineare Funktion 274
 lineares Gleichungssystem 113
 –, allgemeine Form 113
 Linearfaktoren 298
 Logarithmensystem 63
 logarithmische Gleichung 100 f.
 Logarithmus 51, 61
 –, Basis 61
 –, binärer 64
 –, dekadischer 63, 66
 –, natürlicher 63
 –, Numerus 61
 Logarithmusfunktionen 306
 Lösung der Aussageform 15
 Lücke 393

M

Mächtigkeit des Ergebnisraumes 443
 Mantisse 66
 Maschinenmodell von Funktionen 264
 Maximum 389
 –, absolutes 390
 –, relatives 389
 Median 483
 mehrreihige Determinante 129
 mehrstufiger Zufallsversuch 453
 Menge 13
 –, Differenz 19
 –, disjunkte 17
 –, Durchschnitt 19
 –, Komplement 21
 –, leere 14
 –, Vereinigung 19
 Mengenoperation 19
 Merkmal, qualitatives 475
 –, quantitatives 475
 Minimum 389
 –, absolutes 390
 –, relatives 389
 Mittel, arithmetisches 482
 –, geometrisches 484
 mittelbare Funktion 320
 Mittelwert 481
 mittlere Proportionale 44
 Modalwert 484
 Monotonie von Funktionen 269

Monotoniebogen 387
 Multiplikation 40
 Multiplikation eines Vektors 568
 Multiplikationsregel 450
 Multiplikationssatz 463

N

nach oben beschränkte Funktion 270
 nach unten beschränkte Funktion 270
 Näherungsverfahren 104
 natürliche Zahl 23
 natürlicher Logarithmus 63
 Nebenbedingungen 399
 Nebenwinkel 146
 n -Eck 168
 Negation 22
 Nenner, Rationalmachen 58
 Neugrad 216
 Norm einer komplexen Zahl 542
 Normaleneinheitsvektor 596
 Normalenform der Ebenengleichung 594
 Normalenvektor einer Ebene 594
 Normalform der Geradengleichung 275
 Normalform einer quadratischen Funktion 283
 Normalparabel 285
 Normalverteilung 519
 –, standardisierte 522
 Normzahlen 351
 Nullfolge 357
 Nullhypothese 510
 Nullpunkt 266
 Nullstelle 393
 – einer Funktion 270, 277 ff., 286 ff., 290 f., 298, 308 f.
 – einer Parabel 287
 Nullvektor 564
 Numerus 51, 61

O

obere Grenze 49
 obere Schranke 270
 Obermenge 17
 Obersumme 423
 Ordinalzahl 23
 Ordinate 266
 Orientierung eines Vektors 561
 Orthogonalitätsbedingung 574
 Ortsvektor eines Punktes 562

P

Paar, geordnetes 114

Parabel 283
– n -ter Ordnung 293
–, Nullstelle 287
Parallelität zweier Geraden 279
Parameter 117
Partialdivision 38
Pascalsches Dreieck 68
 π -periodisch 309
periodische Funktionen 307
Permutation 452, 457
– mit Wiederholung 457
– ohne Wiederholung 457
Pfadregel 455
Pivotelement 121
Planimetrie 143
Poisson-Verteilung 516
Polarkoordinaten 228, 547
Polstelle einer Funktion 300
Polynom 89
Polynomfunktion n -ten Grades 296
Positionssystem 26
Potenzfunktionen 293
Potenzgesetz 51
primäre Verteilungstafel 477, 482
Prinzip der Mengenbildung 16
Prisma 183
Prismatoid 188
Probe 90
Produktform einer quadratischen Funktion 287
Produktgleichung 44
Produktregel 381, 455
Promille 47
Proportion 44
Proportionalität, direkte 45
–, indirekte 46
Prozentrechnung 47
Prozessmodell von Funktionen 264
Punkt 143
punktsymmetrische Funktion 294
Pyramide 185
Pyramidenstumpf 189

Q

Quader 181
Quadranten 266
Quadrantenrelationen 225
quadratische Ergänzung 289
quadratische Funktionen 283
quadratische Gleichung 93
Quadrupel, geordnetes 114
qualitatives Merkmal 475
quantitatives Merkmal 475
Quotientenregel 382

R

Radikand 51, 54
rationale Zahl 24
Rationalmachen des Nenners 58
Rauminhalt von Rotationskörpern 433
Realteil 540
Rechenoperation 32
– dritter Stufe 51
– erster Stufe 32
– zweiter Stufe 32
Rechenschema von Horner 98
Rechteckkoordinaten 547
Rechte-Hand-Regel 561
rechtwinkliges Dreieck 163
rechtwinkliges Koordinatensystem 265
reelle Achse 544
reelle Zahl 23, 25
Regel zum Konvertieren 27
Regel von Sarrus 130
Regressionsgerade 492
Regressionskoeffizient 492
regula falsi 108
Reihe 344
Relation 263
relative Häufigkeit 466
Repräsentant eines Vektors 564
reziproke Zahl 33
Richtung eines Vektors 561
Richtungssinn 561
Richtungsvektor 579
Runden von Zahlen 31

S

Satz des Pythagoras 164
Satz von Bayes 465
Säulendiagramm 266
Scheitelform einer quadratischen Funktion 286
Scheitelwinkel 146
Schnittpunkt zweier Geraden 280
Schreibweise von Zahlen 30
Sekantenverfahren 108
sekundäre Verteilungstafel 477, 482
senkrechter Schnitt zweier Geraden 282
signifikante Ziffer 30
Signifikanztest 512
Signum 29
Simpsonsche Regel 438
Simulation 466
Sinus 216
Sinusfunktion 308
–, Maximum und Minimum 308
Sinussatz 239
Skalar 562

Skalarprodukt 572
 –, Koordinatenform 573
 –, koordinatenfreie Form 574
 Spannvektoren 585
 Spannweite 476
 Spatprodukt 577
 Spiegelachse 272
 Spiegelung 148
 Sprungstelle 361
 Stammfunktion 414
 Standardabweichung 486, 499, 503
 standardisierte Normalverteilung 522
 Steigungsdreieck 276
 Steigungsfaktor einer Geraden 275
 Steigungswinkel einer Geraden 276
 Stereometrie 180
 Stichprobe 476
 Strahl 144
 Strecke 144
 Streckung, zentrische 154
 streng monoton fallende Funktion 269
 streng monoton wachsende Funktion 269
 Streuung 485, 499, 517, 519, 526
 Streuungsmaß 481
 Stufenpunkt 391
 Stufensprung 351
 Stufenwinkel 146
 Stützstellen einer Funktion 298
 Stützvektor 579
 Stützwerte einer Funktion 298
 Substitutionsregel 431
 Subtraktion von Vektoren 565 ff.
 Summationsgrenze 49
 Summationsindex 49
 Summe, algebraische 35
 Summenregel 455
 Summenzeichen 49
 Surjektivität 270
 Symmetrie 150

T

Tangens 217
 Tangensfunktion 309
 Teilmenge 16
 –, echte 17
 Term 35
 Terrassenpunkt 391
 Tiefpunkt 390
 totale Wahrscheinlichkeit 463
 transzendente Gleichung 88, 99 f.
 Trend 493
 trigonometrische Form komplexer Zahlen 549
 trigonometrische Funktion 217, 307
 trigonometrischer Pythagoras 231

Tripel, geordnetes 114
 Tupel, n -, geordnetes 114

U

Umkehrfunktion 272
 – einer linearen Funktion 277
 unabhängige Variable einer Funktion 263
 unecht gebrochenrationale Funktion 302
 unechter Bruch 39
 Unendlichkeitsstelle 393
 ungerade Funktionen 293
 Ungleichung 110
 –, Definitionsbereich 111
 Unstetigkeit, hebbare 362
 Unstetigkeitsstelle 393
 untere Grenze 49
 untere Schranke 270
 Untermenge 17
 Untersumme 423
 Urliste 476
 Urnenmodell 454
 Ursprungsgerade 275

V

Variable 15, 86
 –, freie 86
 –, gebundene 86
 Varianz 499, 503
 Variation 452, 458
 – mit Wiederholung 458
 – ohne Wiederholung 458
 Variationskoeffizient 486
 Vektor 561
 –, Addition 565 f.
 –, Betrag 562
 –, Multiplikation 568
 –, Orientierung 561
 –, Repräsentant 564
 –, Richtung 561
 –, Subtraktion 565 ff.
 –, Vielfaches 568
 –, Winkel 570
 Vektoraddition 546
 Vektorgleichung einer Geraden 579
 vektorielle Beschreibung von Ebenen 584
 vektorielle Darstellung komplexer Zahlen 544
 Vektorparallelogramm 565
 Vektorprodukt 576
 Vereinigung 19
 verkettete Funktion 320
 Verschiebung 148
 Versor 550
 Verteilungsfunktion 496, 526
 –, empirische 478

Verteilungstafel 476
–, primäre 477, 482
–, sekundäre 477, 482
Vielfaches eines Vektors 568
Viereck 166
Vierfeldertafel 461
Vorzeichenregel 34

W

Wachstumskonstante 324
Wachstumstempo 350
Wahrheitswert 14
Wahrscheinlichkeit, bedingte 462
–, totale 463
Wahrscheinlichkeitsdichte 500, 519, 526
Wahrscheinlichkeitsverteilung 496
Wechselwinkel 146
Wendepunkt 391
Wertebereich einer Funktion W 263
Wertetabelle 265
Winkel 144
Winkel zwischen Vektoren 570
Wurzel 54
Wurzelexponent 51, 54
Wurzelfunktionen 295
Wurzelgleichung 91
Wurzelsatz von Vieta 96

Z

Zahl, entgegengesetzte 29, 33
–, ganze 24
–, irrationale 25
–, natürliche 23
–, rationale 24
–, reelle 23, 25
–, reziproke 33

–, Runden 31
–, Schreibweise 30
Zahlenfolge 341
–, alternierende 343
–, arithmetische 344
–, divergente 356
–, endliche 342 f.
–, fallende 343, 348
–, geometrische 348
–, Glied einer 342
–, grafische Darstellung 342
–, Grenzwert einer 355
–, konstante 343
–, konvergente 356
–, rekursive Darstellung 343 f., 348
–, streng monoton fallend 343 f., 348
–, streng monoton wachsend 343 f., 348
–, tabellarische Darstellung 342
–, unabhängige Darstellung 342, 344, 348
–, unendliche 342 f.
–, wachsende 343
–, Wortdarstellung 342
Zahlensystem 25
zentralsymmetrisch 300
zentrische Streckung 154
Zielfunktion 399
Ziffer 25
–, signifikante 30
Zinseszinsrechnung 352
Zinsrechnung 47
Zufallsexperiment 443
Zufallsgröße 495, 503
–, diskrete 516
Zufallsversuch 443, 453
zweireihige Determinante 126
Zweiwertigkeit 14
zyklometrische Funktionen 310
Zylinder 190