

**Technische Mechanik**  
**Band 4: Schwingungslehre**





Edition  
Harri  
Deutsch

# Technische Mechanik

## Band 4: Schwingungslehre

von

Jörg Wallaschek  
Peter Hagedorn

**1. Auflage**

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG  
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

**Europa-Nr.: 56818**

**Autoren:**

Professor Dr.-Ing. Jörg Wallaschek ist Direktor des Institutes für Dynamik und Schwingungen an der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover und vertritt die Fächer Technische Mechanik und Maschinendynamik in der Fakultät für Maschinenbau.

Professor Dr. Peter Hagedorn vertritt an der Technischen Universität Darmstadt das Fach Technische Mechanik in Lehre und Forschung. Er hat jahrzehntelang Vorlesungen über Technische Mechanik und über Technische Schwingungslehre für Hörer unterschiedlicher Fachrichtungen gehalten.

1. Auflage 2024

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

ISBN 978-3-8085-5681-8

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

Alle Bilder wurden nach Vorlagen des Autors vom Verlag erstellt.

© 2024 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten  
[www.europa-lehrmittel.de](http://www.europa-lehrmittel.de)

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09212 Limbach-Oberfrohna

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Druck: Esser printSolutions GmbH, 75015 Bretten

# Vorwort

Mit dem nun vorliegenden **Band 4** wird die von Peter Hagedorn begründete Reihe der Lehrbücher zur **Technischen Mechanik** ergänzt. Die hier behandelte **Schwingungslehre** ist an vielen Universitäten und Fachhochschulen fester Bestandteil der **ingenieurwissenschaftlichen Studiengänge**; meist im Rahmen der Vorlesungen zur Technischen Mechanik, manchmal auch als eigenständige Lehrveranstaltung.

Das in den ersten drei Bänden bewährte **Konzept** zur Einführung der Grundbegriffe und mathematischen Hilfsmittel wurde auch bei der Schwingungslehre beibehalten. **Niveau und Aufbau** des Buches orientieren sich an den Lehrveranstaltungen, wie sie besonders für Studierende der Ingenieurwissenschaften an praktisch allen Hochschulen angeboten werden.

Bei der Erstellung der Zeichnungen und des druckfertigen Manuskripts wurden wir von Frau Tibe Gelies und Herrn Hannes Wöhler, M. Sc. tatkräftig unterstützt, wofür wir herzlichen Dank sagen.

Wir danken dem Verlag Europa-Lehrmittel für die sehr gute Betreuung und insbesondere unserem Lektor, Herrn Klaus Horn für die wie immer kompetente Unterstützung und vertrauensvolle Zusammenarbeit.

Wenn Sie mithelfen möchten, dieses Buch für die kommenden Auflagen zu verbessern, schreiben Sie uns unter [lektorat@europa-lehrmittel.de](mailto:lektorat@europa-lehrmittel.de). Ihre Hinweise und Verbesserungsvorschläge nehmen wir gern auf.

Hannover/Darmstadt, im Frühjahr 2024

Jörg Wallaschek  
[mechanik@wallaschek.eu](mailto:mechanik@wallaschek.eu)

Peter Hagedorn  
[hagedorn@dyn.tu-darmstadt.de](mailto:hagedorn@dyn.tu-darmstadt.de)



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	1
<b>2</b>	<b>Beschreibung von Schwingungen</b>	5
2.1	Harmonische Schwingungen	5
2.1.1	Die Parameter harmonischer Schwingungen	5
2.1.2	Komplexe Schreibweise harmonischer Schwingungen	7
2.1.3	Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Kreisfrequenz	10
2.1.4	Überlagerung harmonischer Schwingungen unterschiedlicher Kreisfrequenz	12
2.2	Periodische Schwingungen	13
2.2.1	Die Parameter periodischer Schwingungen	13
2.2.2	Darstellung periodischer Funktionen durch FOURIER-Reihen	15
2.2.3	Komplexe FOURIER-Reihen	19
2.3	Die FOURIER-Transformation*	20
2.3.1	Grundlagen	20
2.3.2	FOURIER-Transformierte einfacher Funktionen	23
2.3.3	FOURIER-Transformierte von Stoß- und Sprungfunktion	24
2.4	Digitale Signalverarbeitung*	27
2.4.1	Analog-Digital-Wandlung	27
2.4.2	Das Abtasttheorem	28
2.4.3	Die diskrete FOURIER-Transformation	29
2.5	Zusammenfassung	34
<b>3</b>	<b>Systeme mit einem Freiheitsgrad</b>	37
3.1	Freie ungedämpfte Schwingungen	37
3.2	Freie gedämpfte Schwingungen	41
3.2.1	Überkritisch gedämpfte Systeme	43
3.2.2	Kritisch gedämpfte Systeme	43
3.2.3	Unterkritisch gedämpfte Systeme	44
3.2.4	Dimensionslose Darstellung, die Eigenzeittransformation	46
3.2.5	System mit Reibungsdämpfung	49
3.3	Harmonische Anregung	51
3.3.1	Harmonische Kraftanregung	51
3.3.2	Harmonische Fußpunktanregung	63
3.3.3	Unwuchtanregung	67
3.3.4	Andere Formen harmonischer Erregung	69
3.4	Periodische Anregung	70
3.4.1	Homogene und partikuläre Lösung	70
3.4.2	Lösung mithilfe der FOURIER-Reihe	71

3.4.3	Lösung durch Anstückeln . . . . .	74
3.4.4	Resonanz . . . . .	76
3.5	Sprungantwort und Stoßantwort . . . . .	77
3.6	Beliebige Erregung* . . . . .	82
3.6.1	DUHAMEL-Integral . . . . .	82
3.6.2	Faltungsintegral . . . . .	84
3.6.3	FOURIER-Transformation . . . . .	86
3.7	Zusammenfassung . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Systeme mit zwei Freiheitsgraden</b> . . . . .	95
4.1	Freie ungedämpfte Schwingungen . . . . .	95
4.2	Freie gedämpfte Schwingungen . . . . .	101
4.3	Erzwungene Schwingungen bei harmonischer Anregung . . . . .	106
4.4	Zusammenfassung . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Systeme mit mehreren Freiheitsgraden</b> . . . . .	113
5.1	Freie ungedämpfte Schwingungen . . . . .	113
5.1.1	Struktur der Bewegungsgleichungen . . . . .	113
5.1.2	Das Eigenwertproblem . . . . .	115
5.1.3	Orthogonalität der Eigenvektoren . . . . .	118
5.1.4	Modaltransformation . . . . .	119
5.1.5	Extremaleigenschaften der Eigenwerte . . . . .	120
5.2	Freie gedämpfte Schwingungen . . . . .	122
5.2.1	Struktur der Bewegungsgleichungen . . . . .	122
5.2.2	Das Eigenwertproblem . . . . .	123
5.2.3	Modale Dämpfung . . . . .	125
5.2.4	Durchdringende Dämpfung . . . . .	126
5.3	Erzwungene Schwingungen . . . . .	127
5.4	Systeme mit gyroskopischen und zirkulatorischen Kräften* . . . . .	133
5.5	Zusammenfassung . . . . .	141
<b>6</b>	<b>Schwingungen mechanischer Kontinua</b> . . . . .	145
6.1	Bewegungsgleichungen von Saite, Stab und Balken . . . . .	145
6.2	Die D'ALEMBERT'sche Lösung der Wellengleichung . . . . .	153
6.3	Die Lösung nach BERNOULLI . . . . .	161
6.3.1	Stab, Saite und Torsionsstab . . . . .	161
6.3.2	Balken . . . . .	164
6.4	Zusammenfassung . . . . .	171
<b>Index</b> . . . . .		173

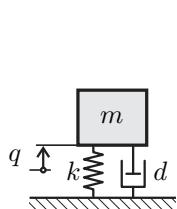
Die mit \* gekennzeichneten Abschnitte können bei einer ersten Lektüre weggelassen werden.

# 1 Einleitung

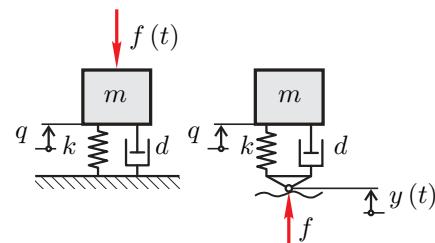
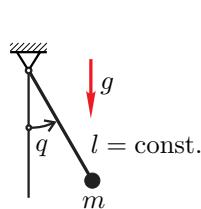
Schwingungen können wir beobachten, wie z. B. den Wellengang des Meeres, das Flattern einer Fahne im Wind oder die Bewegung eines Kindes auf einer Schaukel. Wir können Schwingungen hören und sind sogar in der Lage, anhand typischer Charakteristika zu erkennen, von welchem Sänger ein Lied gesungen oder von welchem Instrument eine bestimmte Passage eines Musikstücks gespielt wird. In der Technik sind Schwingungen von großer Bedeutung, wie man sich unschwer vorstellen kann, wenn man in einem startenden Flugzeug sitzt, das gerade mit maximalem Schub beschleunigt, oder wenn man in einem Kraftfahrzeug über eine unebene Straße fährt. Hier wirken sich die Schwingungen nicht nur auf das technische System aus, etwa indem sie die auftretenden Kräfte und Verformungen bestimmen, sondern auch auf den Menschen, der Schwingungen in bestimmten Situationen als unangenehm wahrnimmt. Die Beschäftigung mit Schwingungen und die Suche nach Möglichkeiten zu ihrer Vermeidung, oder zumindest ihrer Minderung, zählt deshalb zu den klassischen Aufgaben des Ingenieurs. Entsprechende Vorlesungen zur „Schwingungslehre“ werden an Fachhochschulen und Universitäten in der Regel im Rahmen der Lehrveranstaltungen zur Technischen Mechanik und Maschinendynamik angeboten.

Man kann Schwingungen nach unterschiedlichen Kriterien kennzeichnen und zum Beispiel in mechanische Schwingungen, elektromagnetische Schwingungen usw. gliedern. Meist zieht man jedoch den zeitlichen Verlauf heran und spricht von harmonischen, periodischen und quasiperiodischen Schwingungen, wenn es sich um deterministische Vorgänge handelt, oder von stationären und instationären Zufallsschwingungen, wenn die Vorgänge scheinbar regellos sind. Bei solchen Zufallsschwingungen ist es in bestimmten Fällen möglich, statistische Größen, wie Mittelwert, Standardabweichungen, usw. zur Beschreibung zu verwenden. Wir werden darauf aber nicht weiter eingehen. Eine weitere Möglichkeit zur Charakterisierung von Schwingungen besteht darin, ihre Ursache zu nennen: freie Schwingungen, erzwungene Schwingungen, selbsterregte Schwingungen und parametererregte Schwingungen, s. Abb. 1.1. Und nicht zuletzt gibt es die Möglichkeit, Schwingungen danach zu charakterisieren, wie viele Freiheitsgrade das System besitzt, in dem sie auftreten. Dieser Gliederung werden wir folgen und nach und nach Schwingungen in Systemen mit einem Freiheitsgrad, Schwingungen in Systemen mit mehreren Freiheitsgraden und schließlich in Systemen mit unendlich vielen Freiheitsgraden, nämlich in mechanischen Kontinua wie der Saite, dem Stab und dem Balken, betrachten. Eine erste Einführung in die Schwingungslehre hatten wir bereits in TM 3 gegeben. Dort wurden allerdings nur Systeme mit maximal zwei Freiheitsgraden behandelt, während hier in TM 4 auch Systeme mit sehr vielen Freiheitsgraden betrachtet werden. Dabei konzentrieren wir uns auf Schwingungen in linearen Systemen, bei denen eine Superposition von Lösungsanteilen zulässig ist.

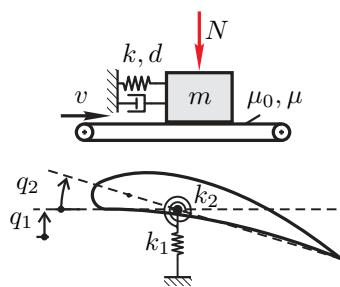
Bei der Behandlung von ingenieurwissenschaftlichen Fragestellungen verwenden wir Ersatzsysteme, die wir erhalten, indem nur die für die jeweils betrachtete Fragestellung wesentlichen Punkte berücksichtigt werden und vereinfachende Annahmen getroffen werden. In der Schwingungslehre bestehen diese Ersatzmodelle meist aus Federn, Dämpfern, Massepunkten und starren Körpern, in denen man sich die Nachgiebigkeit des Systems, seine Energiedissipation sowie die Trägheitseigenschaften in diskreten Elementen konzentriert vorstellt. Natürlich ist dies in jedem Fall nur eine Näherung. Andererseits bietet dieses Vorgehen den Vorteil, dass die Ergebnisse, die wir für eine bestimmte Klasse von Ersatzmodellen erzielen, für eine große Zahl praktischer Anwendungen relevant sind, unabhängig davon, wie die konstruktiven Details jeweils sind, solange nur die Modellbildung auf das gleiche Ersatzmodell führt. Die Bildung von Ersatzmodellen erfordert in der Regel viel Erfahrung. Wir werden deshalb stets von bereits gegebenen Ersatzmodellen ausgehen und deren Verhalten untersuchen.



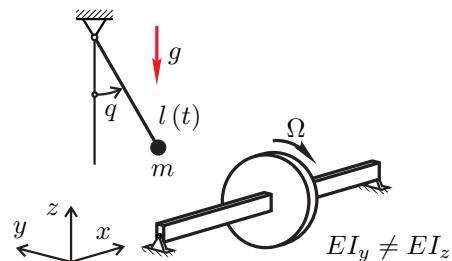
a) Freie Schwingungen



b) Erzwungene Schwingungen



c) Selbsterregte Schwingungen



d) Parametererregte Schwingungen

### 1.1: Ersatzmodell für freie, erzwungene, selbsterregte und parametererregte Schwingungen

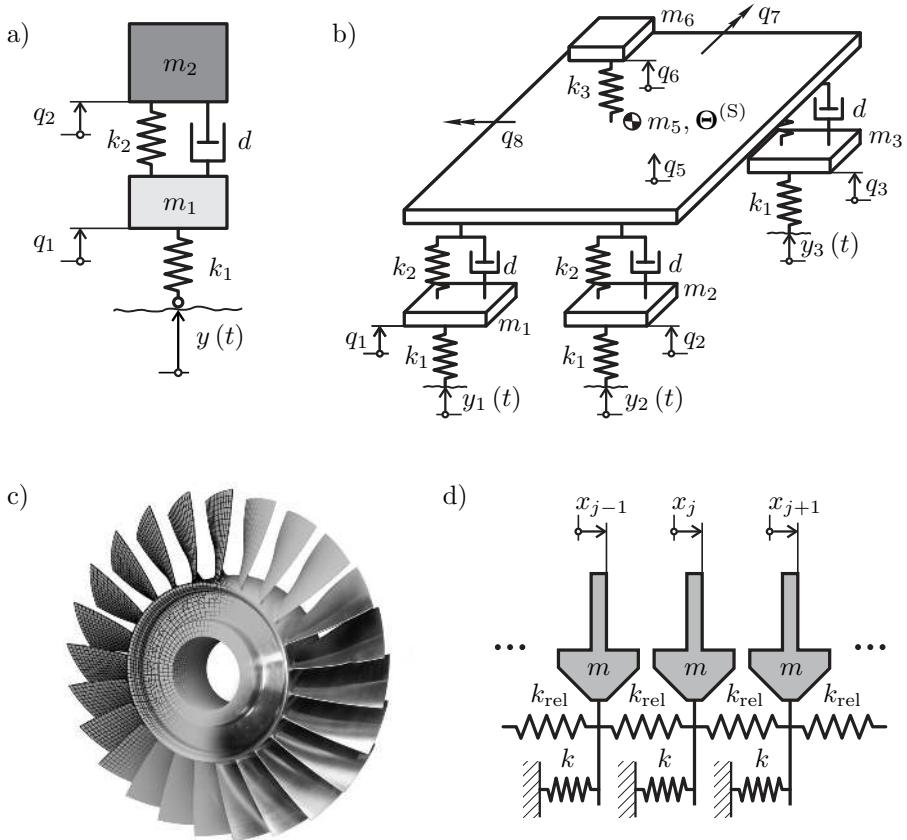
Die zur Untersuchung von Schwingungen verwendeten Ersatzmodelle werden durch Systemparameter (Längenabmessungen, Massen, Trägheitsmomente, Federsteifigkeiten, usw.) festgelegt und ihr jeweiliger Zustand wird durch Zustandsgrößen (Verschiebungen, Geschwindigkeiten, usw.) beschrieben. Das Verhalten der Systeme wird durch Bewegungsgleichungen mathematisch beschrieben und hängt stark davon ab, in welcher Form das System mit seiner Umgebung in Wechselwirkung steht.

Neben freien Schwingungen, bei denen das System mit vorgegebenen Anfangsbedingungen startet und sich selbst überlassen wird, werden verschiedene Formen der Schwingungsanregung betrachtet, bei denen z. B. der Verlauf einer äußeren Kraft, die auf das System einwirkt (Kraftanregung), oder die Verschiebung eines Punktes des Systems (Weganregung), oder die Drehzahl einer mit Unwucht umlaufenden Welle (Unwuchtanregung) gegeben ist.

Von grundlegender Bedeutung für die Schwingungslehre ist der Begriff des Freiheitsgrades, den wir bereits in TM 3 kennengelernt haben. Die minimale Anzahl an unabhängigen skalaren Größen (verallgemeinerte Koordinaten), mit denen man die Lage eines mechanischen Systems eindeutig beschreiben kann, ist die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems. Je nach der zu untersuchenden Fragestellung und den konstruktiven Randbedingungen der betrachteten Systeme kann die Anzahl der Freiheitsgrade von einem, bzw. wenigen Freiheitsgraden bis zu mehreren Tausend oder mehreren Millionen Freiheitsgraden gehen. Abb. 1.2 zeigt Beispiele typischer Ersatzmodelle. Die in Abb. 1.2a) und Abb. 1.2b) dargestellten Ersatzmodelle werden in der Fahrzeugdynamik verwendet, wobei das sogenannte Viertelfahrzeugmodell zur isolierten Betrachtung von Hub- Nick- oder Wankschwingungen benutzt werden kann, während das Gesamtfahrzeugmodell die gleichzeitige Betrachtung dieser Bewegungen erlaubt. Das angedeutete Finite-Elemente-Ersatzmodell stellt eine sehr detaillierte Beschreibung eines Schaufelkranzes mit etwa 500.000 Freiheitsgraden dar, während das Mehrmassen-Ersatzmodell nur bestimmte Schwingungsformen des Schaufelkranzes abbildet. Je weniger Freiheitsgrade ein System hat, desto einfacher ist es in der Regel zu untersuchen. Man ist deshalb meist daran interessiert, die Anzahl der Freiheitsgrade so klein wie möglich zu halten. Im Extremfall gelangt man so zu einem System mit nur einem Freiheitsgrad, bei dem nur eine einzige verallgemeinerte Koordinate zur Beschreibung verwendet wird.

Nicht immer sind die Schwingungen, mit denen wir uns beschäftigen, regelmäßig. Häufig haben wir es mit mehr oder weniger regellosen Zeitverläufen zu tun, etwa wenn es sich um winderregte Schwingungen eines Bauwerkes handelt, oder wenn wir die Kräfte und Verschiebungen in einem Fahrzeug betrachten, das über eine unebene Fahrbahn, z. B. eine Schotterpiste, fährt.

Im nachfolgenden Kapitel 2 werden wir die grundlegenden Methoden und Werkzeuge zur Beschreibung von Schwingungen kennenlernen und anschließend Systeme mit einem Freiheitsgrad untersuchen. Der Übergang zu Systemen mit mehreren Freiheitsgraden erfolgt in Kapitel 4, wo Systeme mit zwei Freiheitsgraden betrachtet werden, bevor in Kapitel 5 der allgemeine Fall von Systemen mit einer beliebig großen, aber endlichen Anzahl von Freiheitsgraden behandelt wird. Die Schwingungen mechanischer Kontinua werden in Kapitel 6 betrachtet, wobei wir uns sowohl mit der Wellenausbreitung als auch mit Eigenschwingungen bei verschiedenen Randbedingungen beschäftigen werden.



### 1.2: Typische Ersatzmodelle:

- Viertelfahrzeugmodell
- Gesamtfahrzeugmodell
- Finite Elemente Ersatzmodell für Schaufelkranz
- Mehrmassen-Ersatzmodell für Schaufelkranz

# 2 Beschreibung von Schwingungen

## 2.1 Harmonische Schwingungen

### 2.1.1 Die Parameter harmonischer Schwingungen

Eine Zeitfunktion  $x(t)$  nennen wir harmonisch, wenn sie sich in der Form

$$x(t) = C_0 + C \cos(\omega t) + S \sin(\omega t) \quad (2.1)$$

darstellen lässt. Die harmonische Schwingung ist periodisch, d. h., es gilt

$$x(t+T) = x(t), \quad (2.2)$$

mit der Schwingungsdauer

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \quad (2.3)$$

und der Frequenz

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.} \quad (2.4)$$

Der positive Parameter  $\omega$  wird Kreisfrequenz genannt, und die Konstanten  $C_0$ ,  $C$  und  $S$  bezeichnen wir als FOURIER-Koeffizienten<sup>1</sup>.

Die harmonische Schwingung (2.1) kann ebenso gut in der Form

$$x(t) = \bar{x} + \hat{x} \cos(\omega t + \alpha) \quad (2.5)$$

geschrieben werden, in der anstelle der drei FOURIER-Koeffizienten die drei Parameter Mittelwert  $\bar{x}$ , Amplitude  $\hat{x}$  und Nullphasenwinkel  $\alpha$  auftreten. Der Nullphasenwinkel  $\alpha$  liegt im Intervall  $(-\pi, \pi]$  und gibt an, um welche Nullphasenzeit  $\frac{\alpha}{2\pi}T$  das Maximum der Schwingung gegenüber dem Zeitnullpunkt verschoben ist. Ein positiver Nullphasenwinkel bedeutet, dass das Maximum der Cosinus-Funktion in (2.5) zu einer negativen Zeit verschoben ist. Der Zusammenhang zwischen den FOURIER-Koeffizienten und den Größen  $\bar{x}$ ,  $\hat{x}$  und  $\alpha$  ist durch

$$\begin{aligned} \bar{x} &= C_0, & \hat{x} &= \sqrt{C^2 + S^2}, \\ \sin(\alpha) &= \frac{-S}{\sqrt{C^2 + S^2}}, & \cos(\alpha) &= \frac{C}{\sqrt{C^2 + S^2}}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

<sup>1</sup> Nach Jean Baptiste Joseph FOURIER, französischer Mathematiker, \*1768 in Auxerre, †1830 in Paris.

bzw.

$$C_0 = \bar{x}, \quad C = \hat{x} \cos(\alpha), \quad S = -\hat{x} \sin(\alpha) \quad (2.7)$$

gegeben, wobei die dritte und vierte Gleichung von (2.6) auf unendlich viele Lösungen von  $\alpha$  führt, die sich jeweils um Vielfache von  $2\pi$  unterscheiden. Durch Bilden des Hauptwertes wählen wir diejenige Lösung für  $\alpha$  aus, die im Intervall  $(-\pi, \pi]$  liegt.

Wir hätten die harmonische Schwingung (2.1) auch als

$$x(t) = \bar{x} + \hat{x} \sin(\omega t + \beta) \quad (2.8)$$

schreiben können, mit denselben Werten von  $\bar{x}$ ,  $\hat{x}$  und  $\omega$ , jedoch einem anderen Winkel  $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ . Im Folgenden verwenden wir stets die Darstellung (2.1) oder (2.5) als „Standard-Form“ einer harmonischen Schwingung.

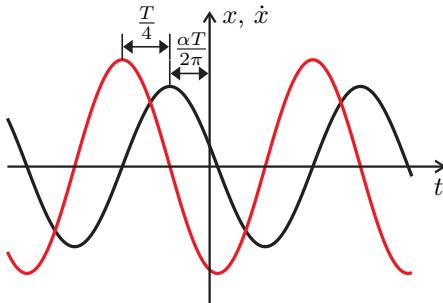
Die Zeitableitung einer harmonischen Funktion ist ebenfalls harmonisch. Das heißt, wenn z. B.  $x(t)$  gemäß (2.5) eine Auslenkung beschreibt, dann sind die Geschwindigkeit

$$\dot{x}(t) = -\hat{x}\omega \sin(\omega t + \alpha) = \hat{x}\omega \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.9)$$

und die Beschleunigung

$$\ddot{x}(t) = -\hat{x}\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = \hat{x}\omega^2 \cos(\omega t + \alpha + \pi) \quad (2.10)$$

ebenfalls harmonische Schwingungen, deren Amplituden sich von der Amplitude der Auslenkung genau um den Faktor  $\omega$ , bzw.  $\omega^2$  unterscheiden. Die Schwingungen nehmen ihre jeweiligen Maxima zu unterschiedlichen Zeitpunkten an, und die Phasenverschiebung zwischen Auslenkung und Geschwindigkeit sowie zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung beträgt jeweils  $\frac{\pi}{2}$ , bzw.  $90^\circ$ . Dabei bedeutet die positive Phasenverschiebung von  $\frac{\pi}{2}$  zwischen Auslenkung und Geschwindigkeit, dass die Geschwindigkeit der Auslenkung um ein Viertel der Schwingungsdauer, d. h. um  $\frac{T}{4}$ , zeitlich vorausseilt. Gleichermaßen gilt für die Beschleunigung gegenüber der Geschwindigkeit. Bei einer harmonischen Schwingung sind also Geschwindigkeit und Auslenkung genau in Gegenphase.



**2.1:** Auslenkung (—) und Geschwindigkeit (—) gemäß (2.5) und (2.9) mit  $\bar{x} = 0$

## 2.1.2 Komplexe Schreibweise harmonischer Schwingungen

Eine komplexe Zahl  $\underline{x}$  können wir durch einen Punkt in der GAUSS'schen<sup>2</sup> Zahlen-ebene darstellen<sup>3</sup>. Mit der Schreibweise

$$\underline{x} = x_r + j x_i, \quad x_r = \operatorname{Re}[\underline{x}], \quad x_i = \operatorname{Im}[\underline{x}], \quad (2.11)$$

unter Verwendung von Real- und Imaginärteil, und mit der Schreibweise

$$\underline{x} = x e^{j\gamma}, \quad x = |\underline{x}|, \quad \gamma = \arg[\underline{x}], \quad (2.12)$$

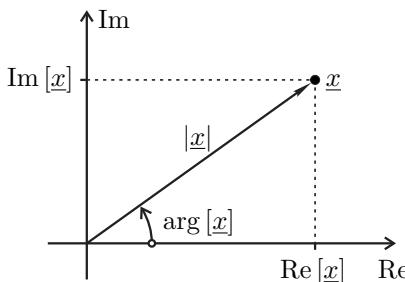
unter Verwendung von Betrag und Argument, stehen uns zwei verschiedene Darstellungsformen für komplexe Zahlen zur Verfügung. Der Zusammenhang zwischen den Größen ist dabei

$$x_r = x \cos(\gamma), \quad x_i = x \sin(\gamma) \quad (2.13)$$

und

$$x = \sqrt{x_r^2 + x_i^2}, \quad \sin(\gamma) = \frac{x_i}{\sqrt{x_r^2 + x_i^2}}, \quad \cos(\gamma) = \frac{x_r}{\sqrt{x_r^2 + x_i^2}}, \quad (2.14)$$

vgl. Abb. 2.2. Der in der Darstellung angegebene Betrag  $|\underline{x}|$  gibt die Länge des komplexen Zeigers  $\underline{x}$  in der GAUSS'schen Zahlenebene an.



### 2.2: Darstellung der komplexen Zahl $\underline{x}$ in der GAUSS'schen Zahlenebene

Es ist nun leicht einsichtig, dass man die harmonische Schwingung (2.5) auch als

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}[\underline{x}(t)] = \operatorname{Re}[\bar{x} + \hat{x}e^{j(\omega t + \alpha)}] \\ &= \operatorname{Re}[\bar{x} + \hat{x}e^{j\alpha}e^{j\omega t}] = \bar{x} + \operatorname{Re}[\hat{x}e^{j\omega t}], \end{aligned} \quad (2.15)$$

mit

$$\bar{x} = \operatorname{Re}[\underline{x}], \quad \hat{x} = \hat{x}e^{j\alpha}, \quad (2.16)$$

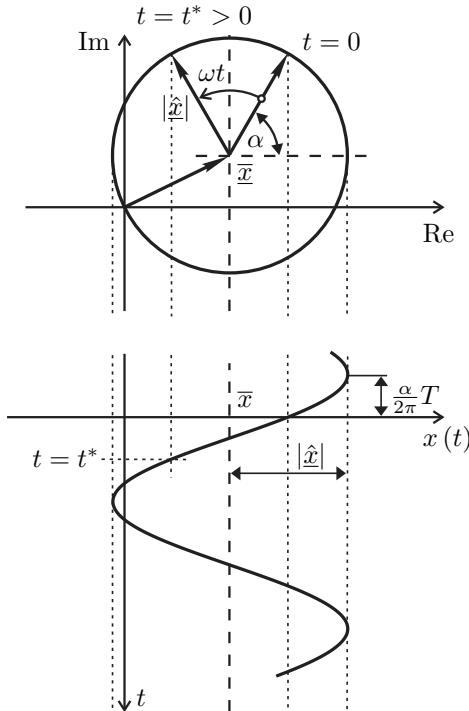
<sup>2</sup> Nach Johann Friedrich GAUSS, deutscher Mathematiker, \*1777 Braunschweig, †1855 Göttingen

<sup>3</sup> Wir kennzeichnen komplexe Zahlen durch Unterstrichen des Formelzeichens, verwenden den Buchstaben  $j = \sqrt{-1}$  für die imaginäre Einheit und bezeichnen mit  $\underline{x}^*$  die zu  $\underline{x}$  konjugiert komplexe Größe.

schreiben kann. Dementsprechend ist

$$\underline{x}(t) = \bar{\underline{x}} + \hat{\underline{x}} e^{j\omega t} \quad (2.17)$$

eine komplexe harmonische Funktion, die sich, wie in Abb. 2.3 gezeigt, als Zeigerdiagramm darstellen lässt. Der Punkt  $\underline{x}(t)$  durchläuft im Verlauf der Zeit einen Kreis mit Mittelpunkt  $\bar{\underline{x}}$  und Radius  $|\hat{\underline{x}}|$ . Der Zeiger rotiert mathematisch positiv, d. h. entgegen dem Uhrzeigersinn mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , und startet bei  $t = 0$  in der durch den Nullphasenwinkel  $\alpha$  gegebenen Lage.



2.3: Zeigerdiagramm der komplexen harmonischen Funktion (2.17) und zugehöriger Realteil

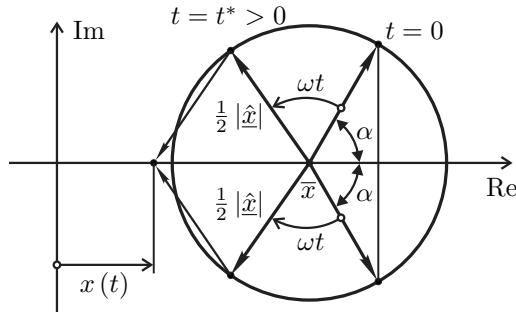
Da für komplexe Zahlen  $\underline{x}$  der Zusammenhang

$$\operatorname{Re}[\underline{x}] = \frac{1}{2}(\underline{x} + \underline{x}^*) \quad (2.18)$$

gilt, kann man die reelle harmonische Schwingung (2.5) auch als

$$x(t) = \frac{1}{2} [\bar{\underline{x}} + \bar{\underline{x}}^* + \hat{\underline{x}} e^{j\omega t} + \hat{\underline{x}}^* e^{-j\omega t}] \quad (2.19)$$

schreiben, so dass man auf das Zeigerdiagramm der Abb. 2.4 geführt wird. In dieser Abbildung kennzeichnet  $\frac{1}{2} |\hat{\underline{x}}|$  die Länge der komplexen Zeiger  $\frac{1}{2} \hat{\underline{x}}$ , bzw.  $\frac{1}{2} \hat{\underline{x}}^*$ .



2.4: Zeigerdiagramm der komplexen harmonischen Funktion (2.19)

Besonders anschaulich lässt sich der Zusammenhang zwischen der komplexen harmonischen Funktion und ihren Zeitableitungen im Zeigerdiagramm darstellen. Die komplexe harmonische Funktion

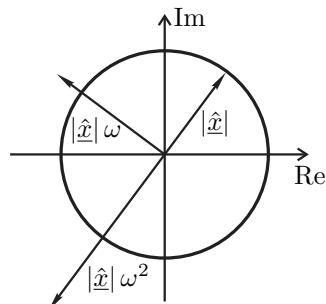
$$\underline{x}(t) = \hat{\underline{x}} e^{j\omega t} \quad (2.20)$$

hat die Zeitableitungen

$$\dot{\underline{x}} = j\omega \hat{\underline{x}} e^{j\omega t} = \omega \hat{\underline{x}} e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}, \quad (2.21)$$

$$\ddot{\underline{x}} = (j\omega)^2 \hat{\underline{x}} e^{j\omega t} = -\omega^2 \hat{\underline{x}} e^{j\omega t} = \omega^2 \hat{\underline{x}} e^{j(\omega t + \pi)}, \quad (2.22)$$

und man erkennt, dass die komplexe Amplitude der Geschwindigkeit aus der komplexen Amplitude der Auslenkung durch Multiplikation mit  $j\omega$  hervorgeht, was zu einer Phasenverschiebung von  $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$  führt. Ein entsprechender Zusammenhang besteht auch zwischen den komplexen Amplituden von Geschwindigkeit und Beschleunigung. Abb. 2.5 zeigt die komplexen Amplituden von Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung in der Gauß'schen Zahlenebene.



2.5: Die komplexen Amplituden von Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung stehen senkrecht aufeinander

### 2.1.3 Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Kreisfrequenz

Wir betrachten zwei harmonische Schwingungen gleicher Kreisfrequenz  $\omega$ :

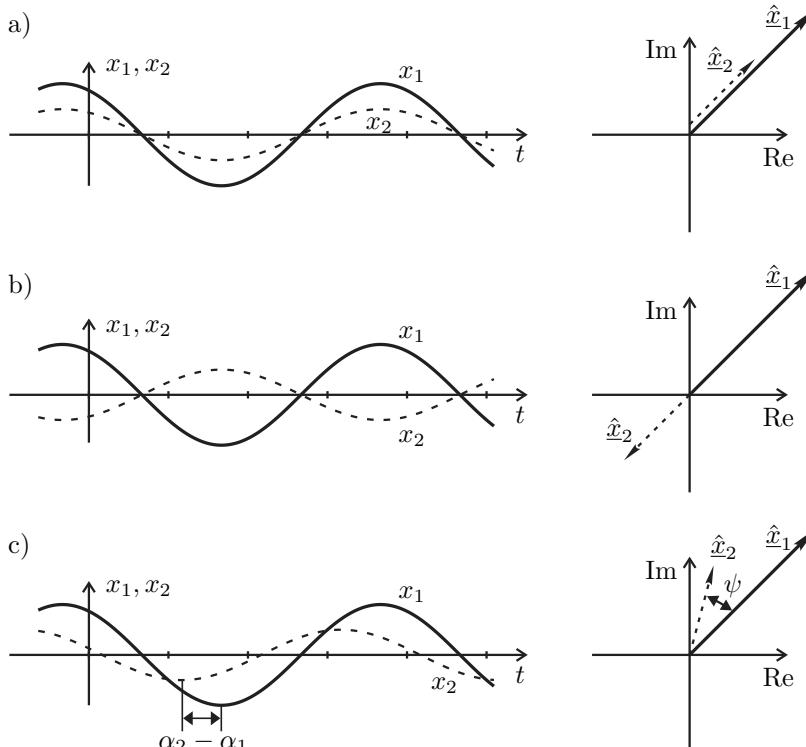
$$x_1(t) = \bar{x}_1 + \hat{x}_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad (2.23a)$$

$$x_2(t) = \bar{x}_2 + \hat{x}_2 \cos(\omega t + \alpha_2). \quad (2.23b)$$

Stimmen die beiden Nullphasenwinkel überein, so nennen wir die Schwingungen in Phase. Nimmt die Differenz  $\alpha_2 - \alpha_1$  den Wert  $\pi$  an, so sind die beiden Schwingungen in Gegenphase. Im allgemeinen Fall definieren wir den Phasenverschiebungswinkel

$$\Psi = \text{Hw}(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (2.24)$$

als Hauptwert der Differenz der beiden Nullphasenwinkel. Abb. 2.6 zeigt die drei Fälle und das jeweilige Zeigerdiagramm. In diesem Zeigerdiagramm sind  $\hat{x}_1$  und  $\hat{x}_2$  die Bezeichnungen der jeweiligen komplexen Zeiger, während zuvor in den Abb. 2.2 bis Abb. 2.5 jeweils die Längen der Zeiger angegeben waren.



**2.6:** Harmonische Schwingungen gleicher Frequenz: a) in Phase  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  
b) in Gegenphase  $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$ , c) allgemeiner Fall  $\Psi = \text{Hw}(\alpha_2 - \alpha_1)$

Als Nächstes betrachten wir die Überlagerung

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= \bar{x}_1 + \hat{x}_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + \bar{x}_2 + \hat{x}_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \end{aligned} \quad (2.25)$$

der beiden harmonischen Schwingungen. Mithilfe trigonometrischer Umformungen erhalten wir

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + [\hat{x}_1 \cos(\alpha_1) + \hat{x}_2 \cos(\alpha_2)] \cos(\omega t) \\ &\quad - [\hat{x}_1 \sin(\alpha_1) + \hat{x}_2 \sin(\alpha_2)] \sin(\omega t); \end{aligned} \quad (2.26)$$

dies ist eine harmonische Schwingung mit Mittelwert  $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$  und den in eckigen Klammern stehenden FOURIER-Koeffizienten, vgl. (2.1). Sie lässt sich in die Standardform (2.5) als

$$x(t) = \bar{x} + \hat{x} \cos(\omega t + \alpha) \quad (2.27)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}_1 + \bar{x}_2, \\ \hat{x} &= \sqrt{\hat{x}_1^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \hat{x}_2^2}, \\ \tan(\alpha) &= \frac{\hat{x}_1 \sin(\alpha_1) + \hat{x}_2 \sin(\alpha_2)}{\hat{x}_1 \cos(\alpha_1) + \hat{x}_2 \cos(\alpha_2)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

überführen.<sup>4</sup>

Unter Verwendung der komplexen Erweiterung (2.15) gestaltet sich die Rechnung deutlich einfacher. Mit

$$\underline{x}_1(t) = \bar{x}_1 + \hat{x}_1 e^{j\omega t}, \quad \underline{\hat{x}}_1 = \hat{x}_1 e^{j\alpha_1}, \quad (2.29a)$$

$$\underline{x}_2(t) = \bar{x}_2 + \hat{x}_2 e^{j\omega t}, \quad \underline{\hat{x}}_2 = \hat{x}_2 e^{j\alpha_2} \quad (2.29b)$$

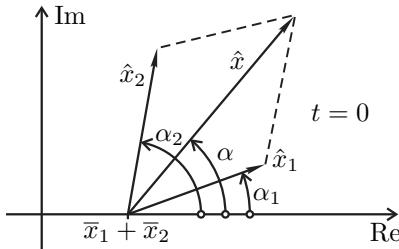
ergibt sich

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_1(t) + \underline{x}_2(t) = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + (\underline{\hat{x}}_1 + \underline{\hat{x}}_2) e^{j\omega t}. \quad (2.30)$$

Dies ist genau die komplexe Erweiterung von (2.27), wie man leicht nachrechnen und noch einfacher im Zeigerdiagramm der Abb. 2.7 ablesen kann.

---

<sup>4</sup> Hier ergibt sich, wie schon vorhin bei (2.7) ein eindeutiger Winkel erst durch Bilden des Hauptwertes



2.7: Zeigerdiagramm zur Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen gleicher Kreisfrequenz

#### 2.1.4 Überlagerung harmonischer Schwingungen unterschiedlicher Kreisfrequenz

Unter Zuhilfenahme des Zeigerdiagramms erkennt man sofort, dass die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen unterschiedlicher Kreisfrequenz keine harmonische Schwingung ist, da die Zeiger ja unterschiedlich schnell umlaufen. Wenn die durch die jeweiligen Kreisfrequenzen festgelegten Umlaufzeiten so sind, dass nach einer bestimmten Zeit  $T$  beide Zeiger eine ganzzahlige Anzahl an Umdrehungen zurückgelegt haben, ergibt sich die Überlagerung als periodische Schwingung, weil sich dann nach der Zeit  $T$  die Bewegung in genau gleicher Weise wiederholt. Beide Zeiger sind nun wieder in ihrer ursprünglichen Startposition. Die mathematische Bedingung dafür ist

$$\omega_1 T = m \cdot 2\pi, \quad \omega_2 T = n \cdot 2\pi, \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (2.31)$$

Immer dann, wenn das Verhältnis der beiden Kreisfrequenzen eine rationale Zahl ist, d. h. wenn

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \quad (2.32)$$

gilt, ergibt sich eine periodische Schwingung. Man nennt die Schwingungen dann kongruent. Falls die Kreisfrequenzen der überlagerten Schwingungen nicht im Verhältnis zweier ganzer Zahlen stehen, nennt man die Kreisfrequenzen inkongruent und die Überlagerung der beiden harmonischen Schwingungen ist nicht-periodisch.

Von besonderem Interesse ist die Überlagerung, wenn die Kreisfrequenzen der beiden harmonischen Schwingungen dicht benachbart sind. Wir betrachten dies für den Sonderfall verschwindender Mittelwerte ( $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$ ), verschwindender Nullphasenwinkel ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ) und gleicher Amplitude ( $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}$ ). Aus

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_1 t) + \hat{x} \cos(\omega_2 t) \quad (2.33)$$

erhalten wir nach kurzer Zwischenrechnung

$$x(t) = 2\hat{x} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right), \quad (2.34)$$