

„Sie müssen das Buch so schreiben, dass alles drin ist, aber man es trotzdem versteht!“
(Aufforderung einer Schülerin)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das Abitur in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- Ihr gewonnenes Wissen anhand von Basisübungen mit ausführlichen Lösungen schnell und prüfungsbezogen zu vertiefen.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.
- eine gute Note in der Abiturprüfung zu erreichen.

Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.
- den Notendurchschnitt Ihrer Klasse in der Abiturprüfung zu optimieren.

EXTRA

100 Videos des Autors, welche zu 69 Themenvideos zusammengestellt wurden. Hier werden alle Stoffzusammenfassungen nochmals erklärt.

Zugriff auf die Themenvideos über Kurzadresse oder QR-Code aus dem Buch.

Inhaltsverzeichnis

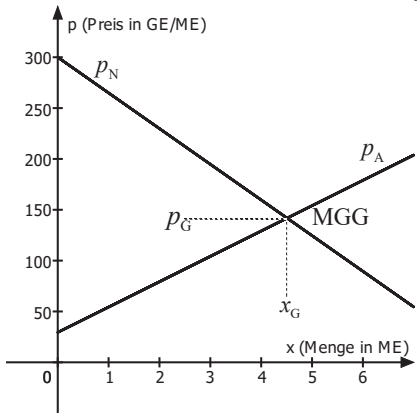
I.	Grundlagen Analysis	9
1	Funktionen	10
1.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome)	10
1.2	Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen	12
1.3	Gebrochenrationale Funktionen	14
1.4	Exponentialfunktionen	16
1.5	Übersicht: Spiegeln, Strecken und Verschieben	18
1.6	Funktionenscharen	20
2	Analysis im wirtschaftlichen Kontext (Grundlagen)	22
2.1	Monopol vs. Polypol: Einordnung und Ausblick	22
2.2	Relevante Funktionen: Aussagekraft und Zusammenhang	24
2.3	Funktionstypen in wirtschaftlichen Anwendungen	26
2.4	Zusatz: Marktgleichgewicht bei Polypol (linearer Fall)	28
2.5	Zusatz: Kosten, Erlöse und Break-Even bei Polypol (linearer Fall)	29
3	Gleichungen	30
3.1	Gleichungstypen: Übersicht	30
3.2	Gleichungstypen: Konkretes Lösungsvorgehen	32
3.3	Polynomdivision	35
3.4	Goldene Regeln zum Lösen von Gleichungen	36
3.5	Lineare Gleichungssysteme	38
4	Differenzialrechnung (allgemein)	40
4.1	Ableitungsregeln	40
4.2	Tangente	42
4.3	Monotonie	44
4.4	Krümmung	45
4.5	Extrempunkte (Hochpunkte und Tiefpunkte)	46
4.6	Wendepunkte	47
4.7	Sattelpunkte	48
4.8	Ortskurve (nur LK)	50
4.9	Zusammenhang zwischen den Schaubildern von Funktion und Ableitung	52
4.10	Aufstellen von Funktionsgleichungen („Steckbriefaufgaben“)	54
4.11	Das Newtonsche Näherungsverfahren	56
5	Differenzialrechnung (im wirtschaftlichen Kontext)	58
5.1	Der Produktlebenszyklus	58
5.2	Die ertragsgesetzliche Kostenfunktion	59
5.3	Kostenanalyse: Betriebsminimum und kurzfristige Preisuntergrenze	60

5.4	Kostenanalyse: Betriebsoptimum und langfristige Preisuntergrenze	61
5.5	Gewinnanalyse bei Polypol (vollständiger Konkurrenz)	62
5.6	Gewinnanalyse bei Monopol	63
5.7	Zusatz: Elastizitäten	64
6	Integralrechnung (allgemein)	66
6.1	Integrationsregeln („Aufleitungsregeln“)	66
6.2	Flächeninhaltsberechnung zwischen Schaubild und x -Achse	68
6.3	Flächeninhaltsberechnung zwischen zwei Schaubildern	70
6.4	Bedeutungsmäßiger Zusammenhang von Funktion und Ableitungsfunktion	72
6.5	Anwendungsaufgaben: Von der Aufgabenformulierung zum Rechenansatz	73
6.6	Mittelwert (durchschnittlicher y -Wert) einer Funktion	74
7	Integralrechnung im wirtschaftlichen Kontext	76
7.1	Marktgleichgewicht, Konsumenten- und Produzentenrente (an quadratischen Funktionen)	76
7.2	Marktgleichgewicht, Konsumenten- und Produzentenrente (an Exponentialfunktionen)	78
II.	Grundlagen Stochastik	81
1	Baumdiagramme und Pfadregeln	82
1.1	Einführung	82
1.2	Aufgabentypen	85
2	Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Vierfeldertafel	88
2.1	Bedingte Wahrscheinlichkeit	88
2.2	Unabhängigkeit	90
2.3	Vierfeldertafel	91
2.4	Zusammenhänge und Vernetzung	92
3	Kombinatorik	96
3.1	Übersicht: Berechnung von Anzahlen und Wahrscheinlichkeiten	96
3.2	Beispielaufgaben	98
4	Zufallsvariable und Erwartungswert	100
5	Binomialverteilung	104
5.1	Bernoulli-Formel	104
5.2	Binomialverteilung und kumulierte Binomialverteilung	108
5.3	Erwartungswert und Standardabweichung	109
5.4	Aufgabentypen zur Binomialverteilung	110
6	Der Hypothesentest	112
6.1	Einseitiger Hypothesentest: Ausführliche Erklärung	112

6.2	Einseitiger Hypothesentest: Vorgehen am Beispiel	113
6.3	Fehler 1. Art und 2. Art	118
6.4	Zweiseitiger Hypothesentest (nur LK)	120
7	Normalverteilung (nur LK)	122
7.1	Einführung	122
7.2	Aufgabentypen	123
7.3	Die Normalverteilung für binomialverteilte Probleme nutzen	124
III.	Grundlagen Lineare Algebra	127
1	Lineare Gleichungssysteme	128
2	Matrizen und ihre Anwendungen	130
2.1	Begriffe zur Matrix	130
2.2	Rechnen mit Matrizen	131
2.3	Die inverse Matrix	132
2.4	Matrizengleichungen	133
3	Lineare Verflechtungen bei Produktionsprozessen	134
3.1	Zweistufige Produktionsprozesse	134
4	Das Leontief-Modell	138
4.1	Input-Output-Tabelle, Gozintograph und Leontief-Annahme	138
4.2	Inputmatrix (Technologiematrix)	139
4.3	Leontief-Gleichung	139
5	Stochastische Matrizen	142
5.1	Stochastische Austausch- bzw. Übergangsprozesse	142
6	Lineare Optimierung	146
6.1	Grafisches Lösungsverfahren	146
6.1.1	Vorgehen bei Maximierungsproblemen	146
6.1.2	Vorgehen bei Minimierungsproblemen	148
6.1.3	Auslastung von Kapazitäten (am Beispiel)	150
6.1.4	Sonderfälle	151
6.2	Rechnerische Lösung mit dem Simplexalgorithmus	152
6.2.1	Vorgehen am Einführungsbeispiel	152
6.2.2	Weitere Beispiele	154
6.2.3	Sonderfälle	156
6.2.4	Ablaufdiagramm zum Simplexalgorithmus	160

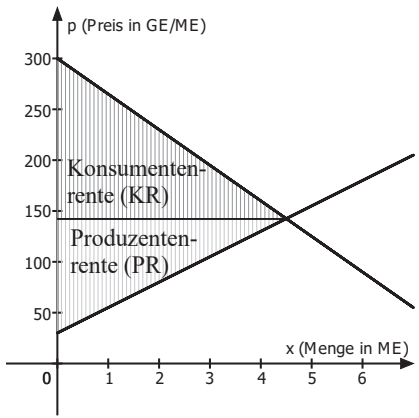
2. Analysis im wirtschaftlichen Kontext (Grundlagen)

2.1 Monopol vs. Polypol: Einordnung und Ausblick

(Angebots-) Monopol	Polypol (vollständige Konkurrenz)
Begriff	
Ein Anbieter (Monopolist) Viele Nachfrager	Viele Anbieter Viele Nachfrager
Grundsätzlicher Unterschied: Bildung des Preises	
Monopolist setzt den Preis fest , welcher für ihn optimal ist.	Preis bildet sich durch Angebot und Nachfrage am Markt.
Wie bildet sich der Preis?	
Monopolist berechnet den Preis, bei welchem er den maximalen Gewinn erzielt und legt diesen fest. (S. 63)	Durch den Schnittpunkt der Angebotsfunktion p_A und der Nachfragefunktion p_N ergibt sich der Gleichgewichtspreis p_G . 
Allgemeiner Aufbau der Erlösfunktion?	
$E(x) = p_N(x) \cdot x$ (mit $p_N(x)$: Preis-Nachfrage-Funktion)	$E(x) = p_G \cdot x$ (Preis ist nach Bildung am Markt fest.)
Optimale Verkaufsmenge für den Anbieter?	
Bei der Berechnung des Preises (s. o.) berechnet der Monopolist auch die die gewinnoptimale Verkaufsmenge. (S. 63)	Anhand des nun festen Preises (s. o.) berechnet der Anbieter die für ihn gewinnoptimale Verkaufsmenge. (S. 62)



Weitere typische Fragestellungen

(Angebots-) Monopol	Polypol (vollständige Konkurrenz)
Kostenanalyse	
Betriebsminimum (kurzfristige Preisuntergrenze) bzw. Betriebsoptimum (langfristige Preisuntergrenze) (S. 61 - 61)	
Gewinnanalyse	
mit Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x)$ $= p_N(x) \cdot x - K(x)$	mit Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x)$ $= p_G \cdot x - K(x)$
Produzenten- und Konsumentenrente	
	 (S. 76)

2.2 Relevante Funktionen: Aussagekraft und Zusammenhang

Hier sind wesentliche Funktionen dargestellt, die im wirtschaftlichen Kontext eine Rolle spielen. Die Aussagekraft der Funktionen und deren Zusammenhang zu verstehen, erleichtert die Bearbeitung der Problemstellungen in den Kapiteln 5 und 7.

Bezeichnung und Beispiel	Aussagekraft (am Beispiel)
Fixe Kosten $K_{fix} = 100$	Im Betrieb fallen 100 GE an fixen Kosten (Miete, Zinsen, ...) an, unabhängig davon welche Menge produziert wird.
Variable Gesamtkostenfunktion $K_v(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$	$K_v(8) = 1224$ Durch die Herstellung von 8 ME, fallen 1224 GE an variablen Kosten (Material, ...) an.
Gesamtkostenfunktion $K(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 100$ $(K(x) = K_{fix} + K_v(x))$	$K(8) = 1324$ Wenn 8 ME hergestellt werden, fallen hierfür insgesamt 1324 GE an Kosten (fix + variabel) an.
Grenzkosten $K'(x) = 6x^2 + 6x + 1$	$K'(2) = 30$ Wenn ausgehend von 2 ME eine (minimale) ME mehr produziert wird, führt diese zu Mehrkosten von 30 GE pro ME.
Variable Stückkostenfunktion $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{x}$ $= 2x^2 + 3x + 1$	$k_v(8) = \frac{1224}{8} = 153$ Wenn 8 ME hergestellt werden, fallen hierfür pro Stück 153 GE an variablen Kosten an.
Stückkostenfunktion (Durchschnittskosten) $k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 100}{x}$ $= 2x^2 + 3x + 1 + \frac{100}{x}$	$k(8) = \frac{1324}{8} = 165,5$ Wenn 8 ME hergestellt werden, fallen hierfür pro Stück insg. 165,5 GE an Kosten an.

Bezeichnung und Beispiel	Aussagekraft (am Beispiel)
Angebotsfunktion (bei Polypol) $p_A(x) = 2x + 5$	$p_A(8) = 21$ Bei einem Stückpreis von 21 GE werden 8 ME am Markt angeboten.
Nachfragefunktion (bei Polypol) bzw. Preis-Absatz-Funktion (bei Monopol) $p_N(x) = 200 - 5x$	$p_N(8) = 160$ Bei einem Stückpreis von 160 GE werden 8 ME am Markt nachgefragt.
Erlösfunktion bei Polypol $E(x) = p \cdot x = 150 \cdot x$ (bei Preis $p = 150$) Erlösfunktion bei Monopol $E(x) = p_N(x) \cdot x = (200 - 5x) \cdot x$ (bei Nachfragefunktion $p_N(x) = 200 - 5x$)	$E(8) = 1200$ bzw. $E(8) = 1280$ Wenn 8 ME verkauft werden erwirtschaftet der Betrieb einen Umsatz/Erlös von 1200 bzw. 1280 GE.
Gewinnfunktion bei Polypol $G(x) = E(x) - K(x)$ $= 150x - (2x^3 + 3x^2 + x + 100)$ $= -2x^3 - 3x^2 + 149x - 100$ Gewinnfunktion bei Monopol $G(x) = E(x) - K(x)$ $= (200 - 5x) \cdot x - (2x^3 + 3x^2 + x + 100)$ $= -2x^3 - 8x^2 + 199x - 100$	$G(5) = 325$ bzw. $G(5) = 445$ Wenn 8 ME verkauft werden erwirtschaftet der Betrieb insgesamt einen Gewinn von 325 bzw. 445 GE.
Deckungsbeitragsfunktion $DB(x) = E(x) - K_v(x) = G(x) + K_{fix}$ $= -2x^3 - 3x^2 + 149x$	$DB(5) = 425$ Wenn 8 ME verkauft werden erwirtschaftet der Betrieb insgesamt einen Deckungsbeitrag („Gewinn ohne Berücksichtigung der Fixkosten“) von 425 GE.

4. Differenzialrechnung (allgemein)

4.1 Ableitungsregeln

Nr.	Beispiel	Vorgehen
Elementarregeln		
1	$f(x) = x^5$ $f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4$ $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x^1 = 2x$ $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$f(x) = x^{\text{Exponent}}$ $f'(x) = \text{Exponent} \cdot x^{\text{Exponent}-1}$ (Potenzregel) Vor dem Ableiten $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
2	$f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$	<i>Abschreiben</i>

8

Vorgehensregeln		
3	$f(x) = 3 \cdot x^2$ $f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$	„Zahlen“ mit $\cdot$ oder $:$ „bleiben“ (Faktorregel)
4	$f(x) = x^2 + 2$ $f'(x) = 2x$	„Zahlen“ mit $+$ oder $-$ „verschwinden“
5	$f(x) = x^2 - 4x$ $f'(x) = 2x - 4$	$+$ und $-$ Zeichen unterteilen die Funktion in Teilfunktionen, welche einzeln abgeleitet werden (Summenregel)

