„Sie müssen das Buch so schreiben, dass alles drin ist, aber man es trotzdem versteht!“
(Aufforderung einer Schülerin)

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das Abitur in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- Ihr gewonnenes Wissen anhand von Basisübungen mit ausführlichen Lösungen schnell und prüfungsbezogen zu vertiefen.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.
- eine gute Note in der Abiturprüfung zu erreichen.

Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.
- den Notendurchschnitt Ihrer Klasse in der Abiturprüfung zu optimieren.

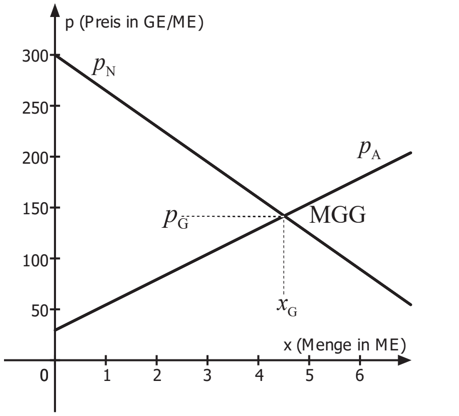
EXTRA

100 Videos des Autors, welche zu 79 Themenvideos zusammengestellt wurden. Hier werden alle Stoffzusammenfassungen nochmals erklärt.
Zugriff auf die Themenvideos über Kurzadresse oder QR-Code aus dem Buch.

Inhaltsverzeichnis

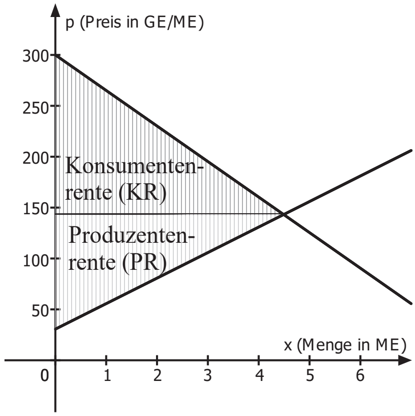
2. Analysis im wirtschaftlichen Kontext (Grundlagen)

2.1 Monopol vs. Polypol: Einordnung und Ausblick

<table>
<tr><th>(Angebots-) Monopol</th><th>Polypol (vollständige Konkurrenz)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Begriff</td></tr>
<tr><td>Ein Anbieter (Monopolist)
Viele Nachfrager</td><td>Viele Anbieter
Viele Nachfrager</td></tr>
<tr><td colspan="2">Grundsätzlicher Unterschied: Bildung des Preises</td></tr>
<tr><td>Monopolist setzt den Preis fest, welcher für ihn optimal ist.</td><td>Preis bildet sich durch Angebot und Nachfrage am Markt.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Wie bildet sich der Preis?</td></tr>
<tr><td>Monopolist berechnet den Preis, bei welchem er den maximalen Gewinn erzielt und legt diesen fest.
(S. 71)</td><td>Durch den Schnittpunkt der Angebotsfunktion p_A und der Nachfragefunktion p_N ergibt sich der Gleichgewichtspreis p_G.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Allgemeiner Aufbau der Erlösfunktion?</td></tr>
<tr><td>$E(x) = p_N(x) \cdot x$
(mit $p_N(x)$: Preis-Nachfrage-Funktion)</td><td>$E(x) = p_G \cdot x$
(Preis ist nach Bildung am Markt fest.)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Optimale Verkaufsmenge für den Anbieter?</td></tr>
<tr><td>Bei der Berechnung des Preises (s. o.) berechnet der Monopolist auch die die gewinnoptimale Verkaufsmenge.
(S. 71)</td><td>Anhand des nun festen Preises (s. o.) berechnet der Anbieter die für ihn gewinnoptimale Verkaufsmenge.
(S. 70)</td></tr>
</table>

https://www.mvurl.de/mr2e

Weitere typische Fragestellungen

<table>
<tr><th>(Angebots-) Monopol</th><th>Polypol (vollständige Konkurrenz)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Kostenanalyse</td></tr>
<tr><td colspan="2">Betriebsminimum (kurzfristige Preisuntergrenze)
bzw.
Betriebsoptimum (langfristige Preisuntergrenze)
(S. 68 - 69)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gewinnanalyse</td></tr>
<tr><td>mit Gewinnfunktion:
$G(x) = E(x) - K(x)$
$= p_N(x) \cdot x - K(x)$</td><td>mit Gewinnfunktion:
$G(x) = E(x) - K(x)$
$= p_G \cdot x - K(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Produzenten- und Konsumentenrente</td></tr>
<tr><td></td><td>

(S. 88)</td></tr>
</table>

2.2 Relevante Funktionen: Aussagekraft und Zusammenhang

Hier sind wesentliche Funktionen dargestellt, die im wirtschaftlichen Kontext eine Rolle spielen. Die Aussagekraft der Funktionen und deren Zusammenhang zu verstehen, erleichtert die Bearbeitung der Problemstellungen in den Kapiteln 5 und 7.

Bezeichnung und Beispiel	Aussagekraft (am Beispiel)
Fixe Kosten $\mathbf{K}_{fix} = 100$	Im Betrieb fallen 100 GE an fixen Kosten (Miete, Zinsen, …) an, unabhängig davon welche Menge produziert wird.
Variable Gesamtkostenfunktion $\mathbf{K_V(x)} = 2x^3 + 3x^2 + x$	$\mathrm{K_V}(8) = 1224$ Durch die Herstellung von 8 ME, fallen 1224 GE an variablen Kosten (Material, …) an.
Gesamtkostenfunktion $\mathbf{K(x)} = 2x^3 + 3x^2 + x + 100$ $(\mathbf{K(x) = K}_{fix} + \mathbf{K_V(x)})$	$\mathrm{K}(8) = 1324$ Wenn 8 ME hergestellt werden, fallen hierfür insgesamt 1324 GE an Kosten (fix + variabel) an.
Grenzkosten $\mathbf{K'(x)} = 6x^2 + 6x + 1$	$\mathrm{K}'(2) = 30$ Wenn ausgehend von 2 ME eine (minimale) ME mehr produziert wird, führt diese zu Mehrkosten von 30 GE pro ME.

Variable Stückkostenfunktion $\boldsymbol{k_V(x)} = \frac{\mathbf{K_V(x)}}{\boldsymbol{x}} = \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{x}$ $= 2x^2 + 3x + 1$	$k_V(8) = \frac{1224}{8} = 153$ Wenn 8 ME hergestellt werden, fallen hierfür **pro Stück** 153 GE an variablen Kosten an.
Stückkostenfunktion (Durchschnittskosten) $\boldsymbol{k(x)} = \frac{\mathbf{K(x)}}{\boldsymbol{x}} = \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 100}{x}$ $= 2x^2 + 3x + 1 + \frac{100}{x}$	$k(8) = \frac{1324}{8} = 165,5$ Wenn 8 ME hergestellt werden, fallen hierfür **pro Stück insg.** 165,5 GE an Kosten an.

Bezeichnung und Beispiel	Aussagekraft (am Beispiel)
Angebotsfunktion (bei Polypol) $\boldsymbol{p_A(x)} = 2x + 5$	$p_A(8) = 21$ Bei einem Stückpreis von 21 GE werden 8 ME am Markt angeboten.
Nachfragefunktion (bei Polypol) bzw. **Preis-Absatz-Funktion (bei Monopol)** $\boldsymbol{p_N(x)} = 200 - 5x$	$p_N(8) = 160$ Bei einem Stückpreis von 160 GE werden 8 ME am Markt nachgefragt.

Erlösfunktion bei Polypol $\mathbf{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} = 150 \cdot x$ (bei Preis $p = 150$) **Erlösfunktion bei Monopol** $\mathbf{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p_N}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x} = (200 - 5x) \cdot x$ (bei Nachfragefunktion $p_N(x) = 200 - 5x$)	$\mathrm{E}(8) = 1200$ bzw. $\mathrm{E}(8) = 1280$ Wenn 8 ME verkauft werden erwirtschaftet der Betrieb einen Umsatz/Erlös von 1200 bzw. 1280 GE.
Gewinnfunktion bei Polypol $\mathbf{G}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{K}(\boldsymbol{x})$ $= 150x - (2x^3 + 3x^2 + x + 100)$ $= -2x^3 - 3x^2 + 149x - 100$ **Gewinnfunktion bei Monopol** $\mathbf{G}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{K}(\boldsymbol{x})$ $= (200 - 5x) \cdot x - (2x^3 + 3x^2 + x + 100)$ $= -2x^3 - 8x^2 + 199x - 100$	$\mathrm{G}(5) = 325$ bzw. $\mathrm{G}(5) = 445$ Wenn 8 ME verkauft werden erwirtschaftet der Betrieb insgesamt einen Gewinn von 325 bzw. 445 GE.

Deckungsbeitragsfunktion $\mathbf{DB}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{K_V}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{G}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{K}_{\boldsymbol{fix}}$ $= -2x^3 - 3x^2 + 149x$	$\mathrm{DB}(5) = 425$ Wenn 8 ME verkauft werden erwirtschaftet der Betrieb insgesamt einen Deckungsbeitrag („Gewinn ohne Berücksichtigung der Fixkosten“) von 425 GE.

4. Differenzialrechnung

4.1 Ableitungsregeln

Nr.	Beispiel	Vorgehen
Elementarregeln		
1	$f(x) = x^5$ $f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4$ $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x^1 = 2x$ $f(x) = x$ $f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$ $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$f(x) = x^{Exponent}$ $f'(x) = Exponent \cdot x^{Exponent-1}$ (Potenzregel) **Vor dem Ableiten** $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
2	$f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$	*Abschreiben*
3	$f(x) = \sin(x)$ $f'(x) = \cos(x)$	$\begin{tikzcd} & \sin \arrow[dr] & \\ -\cos \arrow[ur] & & \cos \arrow[dl] \\ & -\sin \arrow[ul] & \end{tikzcd}$ (*Im Uhrzeigersinn!*)
4	$f(x) = \cos(x)$ $f'(x) = -\sin(x)$	

https://www.mvurl.de/9dwn

Nr.	Beispiel	Vorgehen
Vorgehensregeln		
5	$f(x)=\mathbf{3}\cdot x^2$ $f'(x)=\mathbf{3}\cdot 2x=6x$	*„Zahlen" mit $\cdot$ oder $:$ „bleiben"* (Faktorregel)
6	$f(x)=x^2+\mathbf{2}$ $f'(x)=2x$	*„Zahlen" mit $+$ oder $-$ „verschwinden"*
7	$f(x)=x^2-4x$ $f'(x)=2x-4$	*$+$ und $-$ Zeichen unterteilen die Funktion in Teilfunktionen, welche einzeln abgeleitet werden* (Summenregel)

Hinweis : Ableiten bei Funktionenscharen

Der Parameter t wird beim Ableiten wie eine Zahl und nicht wie die Variable x behandelt.

Beispiel: $f_t(x)=t^2x^3+t$

$f_t'(x)=3t^2x^2$

Produktregel		
8	$f(x)=x^2\cdot e^{2x}$ $f'(x)=2x\cdot e^{2x}+x^2\cdot e^{2x}\cdot 2$	$f(x)=u(x)\cdot v(x)$ $f'(x)=\underbrace{u'(x)}_{\text{Ableiten}}\cdot\underbrace{v(x)}_{\text{Abschreiben}}+\underbrace{u(x)}_{\text{Abschreiben}}\cdot\underbrace{v'(x)}_{\text{Ableiten}}$

Quotientenregel (Zusatz)		
9	$f(x)=\dfrac{x^2}{e^{2x}}$ $f'(x)=\dfrac{2x\cdot e^{2x}-x^2\cdot e^{2x}\cdot 2}{\left(e^{2x}\right)^2}$ $=\dfrac{2x\cdot e^{2x}-2x^2\cdot e^{2x}}{e^{4x}}$	$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ $f'(x)=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

5.7 Isoquante, Isokostengerade und Minimalkostenkombination

Beispiel : Zur Fertigung eines Produktes werden die beiden Produktionsfaktoren Arbeit (x) und Kapital (y) gemäß der Produktionsfunktion $c(x,y)=4\cdot x^2\cdot y$ eingesetzt.
Es sollen 160 Mengeneinheiten (ME) des Produktes hergestellt werden.
Eine ME des Faktors Arbeit kostet 25 GE, eine ME des Faktors Kapital kostet 20 GE.
Bestimmen Sie die Minimalkostenkombination.

1.Von der Produktionsfunktion zur Isoquanten

• Die Produktionsfunktion

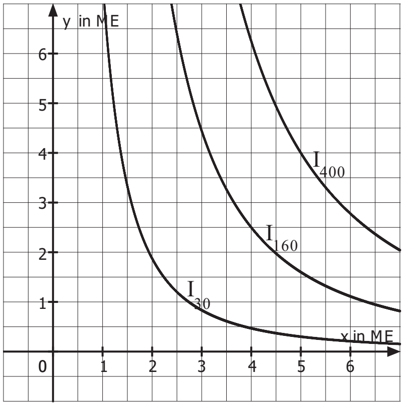
$c(x,y)=4\cdot x^2\cdot y$

Gibt die Produktionsmenge c an, welche durch den Einsatz von x ME Arbeit und y ME Kapitel erzeugt wird.

• Die allg. Isoquantenfunktion I

$$c=4\cdot x^2\cdot y \quad |:4\ :x^2 \quad (\textit{auflösen nach } y)$$

$$\frac{c}{4\cdot x^2}=y \quad \text{somit } \mathrm{I}_c(x)=\frac{c}{4\cdot x^2}$$



• Isoquantenfunktion für geg. Produktionsmenge

Für $c=160$ erhält man $\mathrm{I}_{160}(x)=\dfrac{160}{4\cdot x^2}=\dfrac{40}{x^2}$

Die Punkte auf dem zugehörigen Schaubild I_{160} stellen alle möglichen Kombinationen der beiden Faktoren x und y dar, die zu einer Produktionsmenge von 160 ME führen.

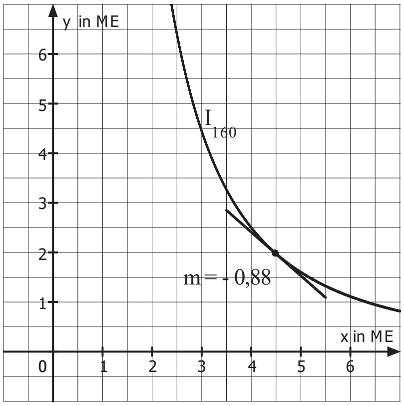
Hinweis : Die Grenzrate der Substitution

Entspricht der Steigung der Isoquanten und wird mit der **ersten Ableitung** berechnet.

$$\mathrm{I}_{160}(x)=\frac{40}{x^2}=40\cdot x^{-2};$$

$$\mathrm{I}_{160}{}'(x)=40\cdot(-2)\cdot x^{-3}=-\frac{80}{x^3}$$

Beispiel: $\mathrm{I}_{160}{}'(4,5)=-\dfrac{80}{4,5^3}\approx -0,88$



Aktuell werden mit dem Faktoreinsatz $x=4,5$ (und $y\approx 1,98$) eine Menge von 160 ME des Produktes hergestellt.

Eine Erhöhung von 1 ME des Faktors x kann hierbei durch eine Verringerung des Faktors y um ca. 0,88 ME ausgeglichen werden (sodass noch immer 160 ME hergestellt werden).

https://www.mvurl.de/qh5a

2. Die Isokostengerade

Die Gesamtkostenfunktion : $K(x,y)=25x+20y$

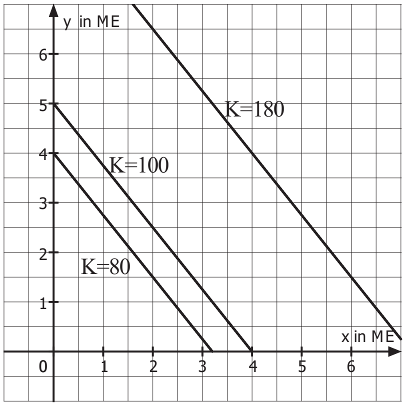
(*auflösen nach y*) $\quad K = 25x+20y \quad |-25x$

$$-25x+K = 20y \quad |:20$$

$$-1{,}25x+\frac{K}{20} = y$$

Im Koordinatensystem entspricht dies einer Schar aus parallelen Geraden mit **Steigung $-1{,}25$**. Den **Isokostengeraden**.

Beispielsweise stellen die Punkte auf dem Schaubild $K=100$ alle möglichen Kombinationen der beiden Faktoren dar, die zu Gesamtkosten von 100 GE führen.



3. Die Minimalkostenkombination (MKK)

Gesucht ist die Gerade mit dem geringsten y-Achsenabschnitt (geringste Kosten!), welche das Schaubild zu I_{160} berührt.

Bedingung : Gleiche Steigung

$$\mathbf{I_{160}'(x) = -1{,}25}$$

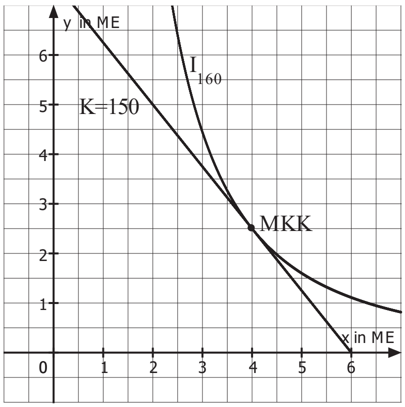
$$-\frac{80}{x^3} = -1{,}25 \quad |\cdot x^3$$

$$-80 = -1{,}25x^3 \quad |:(-1{,}25)$$

$$64 = x^3 \quad |\sqrt[3]{\ }$$

$$4 = x$$

mit $I_{160}(4)=2{,}5$ erhält man die **Minimalkostenkombination MKK (4 | 2,5)**



Die Produktionsmenge von 160 ME kann zu minimalen Kosten hergestellt werden, wenn $x=4$ ME an Arbeit und $y=2{,}5$ ME an Kapital eingesetzt werden.

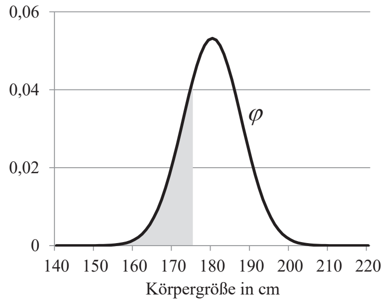
Die Gesamtkosten betragen dann $K = 25\cdot 4+20\cdot 2{,}5 = 150$ GE.

5. Normalverteilung

5.1 Einführung

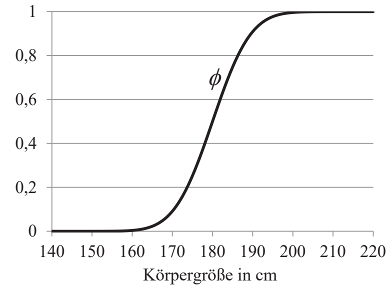
Beispiel: Messung der Körpergröße bei einer zufällig ausgewählten männlichen Person.

1. Normalverteilung: Dichtefunktion φ (Gauß - Kurve)



- Der Bereich um den Erwartungswert (hier $\mu = 180$ cm) hat die größte Wahrscheinlichkeit.
- Die Standardabweichung (hier $\sigma = 7,5$) bestimmt die Breite der Verteilung.
- Achtung: **Funktionswerte von φ stellen nicht die Wahrscheinlichkeiten** der einzelnen Werte dar! Die Wahrscheinlichkeit (jedes) einzelnen Wertes beträgt 0%: $P(X = k) = 0$. Grund: Z.B. beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass jemand (auf unendlich viele Kommastellen) genau 1,70000000 …0 m groß ist, 0%.
- Über den **Inhalt der Fläche unter der φ - Kurve** können jedoch **Wahrscheinlichkeiten** berechnet werden. Die nachfolgende Funktion ϕ (Integralfunktion zu φ) gibt diese an.

2. „Kumulierte“ Normalverteilung: Verteilungsfunktion ϕ



Gibt für jeden möglichen Wert der Zufallsvariablen die **Wahrscheinlichkeit** an, dass **dieser oder ein geringerer Wert als dieser** angenommen wird.

$$\mathbf{P(X \le k) = \phi(k) = \int_{-\infty}^{k} \varphi(x)dx}$$

Beispiel

$$P(X \le 174) = \phi(174) = \int_{-\infty}^{174} \varphi(x)dx \approx 0,2119$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte männliche Person höchstens 174 cm groß ist, beträgt 21,19 %.

Hinweis

Im nachfolgenden Kapitel werden die Aufgabenstellungen jeweils zunächst durch **GTR / CAS (normalcdf)** gelöst.

Es ist jedoch ebenfalls die Lösung mithilfe der **Standardnormalverteilung** Φ dargestellt.

Hierbei gilt: $\mathbf{P(X \le k) \approx \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)}$

5.2 Aufgabentypen

Beispiel : Die Körpergröße vom Männern ist näherungsweise normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 180$ cm und der Standardabweichung $\sigma = 7{,}5$ cm.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Mann ...

Aufgabentypen, gelöst mit GTR/CAS	
1. „höchstens k“ $\mathbf{P(X \le k)}$ $\approx$ **normalcdf**$(-10^{99};\, k;\, \mu;\, \sigma)$	... höchstens 174 cm groß? $P(X \le 174)$ $\approx \text{normalcdf}(-10^{99}; 174;\, 180;\, 7{,}5) \approx 0{,}212$
2. „mindestens k“ $\mathbf{P(X \ge k)}$ $\approx 1 -$ **normalcdf**$(-10^{99};\, k;\, \mu;\, \sigma)$	... mindestens 192 cm groß? $P(X \ge 192) = 1 - P(X < 192)$ $\approx 1 - \text{normalcdf}(-10^{99}; 192;\, 180;\, 7{,}5)$ $\approx 1 - 0{,}9452 \approx 0{,}055$
3. „mind. k_1 und höchst. k_2“ $\mathbf{P(k_1 \le X \le k_2)}$ $\approx$ **normalcdf**$(k_1;\, k_2;\, \mu;\, \sigma)$	... mind. 183 cm und höchst. 195 cm groß? $P(183 \le X \le 195)$ $\approx \text{normalcdf}(183; 195;\, 180;\, 7{,}5)$ $\approx 0{,}322$

Aufgabentypen, gelöst mit Standardnormalverteilung Φ (Tabelle)	
1. „höchstens k“ $\mathbf{P(X \le k) \approx \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)}$	... höchstens 174 cm groß? $P(X \le 174) \approx \Phi\left(\frac{174-180}{7{,}5}\right)$ $\approx \Phi(-0{,}8) \approx 0{,}212$
2. „mindestens k“ $\mathbf{P(X \ge k) \approx 1 - P(X < k)}$ $\mathbf{\approx 1 - \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)}$	... mindestens 192 cm groß? $P(X \ge 192) = 1 - P(X < 192) \approx 1 - \Phi\left(\frac{192-180}{7{,}5}\right)$ $\approx 1 - \Phi(1{,}6) \approx 1 - 0{,}9452 \approx 0{,}055$
3. „mind. k_1 und höchst. k_2“ $\mathbf{P(k_1 \le X \le k_2) \approx P(X \le k_2) - P(X \le k_1)}$ $\mathbf{\approx \Phi\left(\frac{k_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-\mu}{\sigma}\right)}$	... mind. 183 cm und höchst. 195 cm groß? $P(183 \le X \le 195) = P(X \le 195) - P(X \le 183)$ $\approx \Phi\left(\frac{195-180}{7{,}5}\right) - \Phi\left(\frac{183-180}{7{,}5}\right)$ $\approx \Phi(2) - \Phi(0{,}4) \approx 0{,}9772 - 0{,}6554 \approx 0{,}322$

4. Das Leontief-Modell

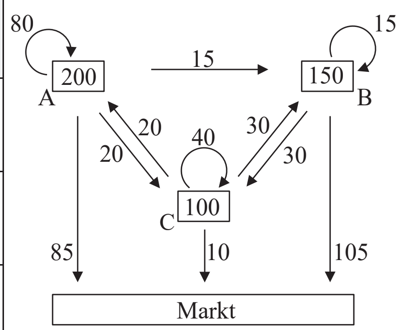
4.1 Input-Output-Tabelle, Gozintograph und Leontief-Annahme

Drei Zweigwerke eines Unternehmens beliefern sich gegenseitig und den Markt nach dem Leontief-Modell. Die Verflechtung kann durch die **Input-Output-Tabelle** oder durch ein **Verflechtungsdiagramm** (Gozintograph) dargestellt werden.

Input-Output-Tabelle

	(nach) Betrieb A	(nach) Betrieb B	(nach) Betrieb C	Markt $\vec{y}$	Produktion $\vec{x}$
(von) Betrieb A	80	15	20	85	200
(von) Betrieb B	0	15	30	105	150
(von) Betrieb C	20	30	40	10	100

Verflechtungsdiagramm



Beschreibung (am Beispiel: Betrieb A)

Betrieb A **gibt** 80 Mengeneinheiten (ME) an sich, 15 ME an B und 20 ME an C ab (der innerbetriebliche Absatz von A lautet also: $80+15+20=115$ ME)

Betrieb A gibt 85 ME an den Markt/Konsum ab.

Insgesamt muss Betrieb A also 200 ME $(=115+85)$ herstellen.

Hinweise

Zeile: „geben“
Spalte: „nehmen“

- Interpretation der Spalte von A: Betrieb A **nimmt** 80 ME von sich selbst, keine Waren von B und 20 ME Waren von C.

- Ablesen aus Tabelle: Marktabgabevektor $\vec{y}=\begin{pmatrix}85\\105\\10\end{pmatrix}$ und Produktionsvektor $\vec{x}=\begin{pmatrix}200\\150\\100\end{pmatrix}$.

- **Leontief-Annahme**: „Die Lieferungen an einen Betrieb steigen oder fallen im gleichen Verhältnis wie die Produktion des Betriebes“.
Beispiel: Wenn Betrieb A statt 200 ME nun die doppelte Menge von 400 ME produzieren müsste, würde er hierfür 160 ME von sich und 40 ME von C, also die doppelten Mengen, benötigen.

https://www.mvurl.de/hxxn

4.2 Inputmatrix (Technologiematrix)

Die Inputmatrix gibt an, wie die Betriebe untereinander **technisch verflochten** sind. Sie ändert sich – im Gegensatz zur Input-Output-Tabelle - nicht, wenn die Betriebe im nächsten Jahr andere Menge produzieren.

Berechnung der Inputmatrix T:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{80}{200} & \frac{15}{150} & \frac{20}{100} \\ \frac{0}{200} & \frac{15}{150} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{200} & \frac{30}{150} & \frac{40}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Vorgehen: **Spalte jedes Betriebs** durch <u>**seine**</u> **Produktion** teilen (z.B. Spalte von A durch 200 usw.).

Interpretation der Einträge von A (Inputkoeffizienten):

Beispielsweise gibt der Wert 0,3 (Eintrag in 2. Zeile, 3. Spalte) an:
Um 1 ME seines Produktes zu produzieren, benötigt der Betrieb C von Betrieb B 0,3 ME von dessen Produkt.

4.3 Leontief-Gleichung

Herleitung: Marktabgabe = Produktion − innerbetrieblicher Absatz

$$\vec{y} = \vec{x} \qquad T \cdot \vec{x}$$

Gleichung: $\boldsymbol{\vec{y} = (E - T) \cdot \vec{x}}$

im Beispiel:

$$\vec{y} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{x}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0 & 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Bezeichnungen:
$\vec{y}$: Marktabgabe- bzw. Konsumvektor
$\vec{x}$: Produktionsvektor
T : Inputmatrix bzw. Technologiematrix

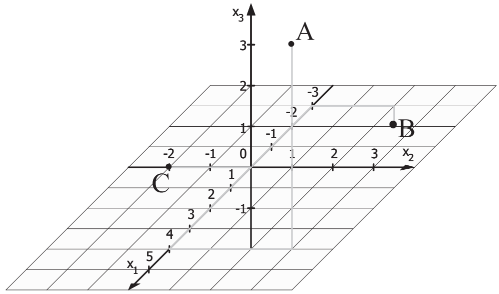
1. Vorwissen (Punkte, Vektoren, Rechenoperationen)

1.1 Punkte (im $\mathbb{R}^3$)

Beispiel: $A(4|3|5)$

Vom **Ursprung** geht man
4 Einheiten nach vorne, 3 nach rechts und 5 Einheiten nach oben.

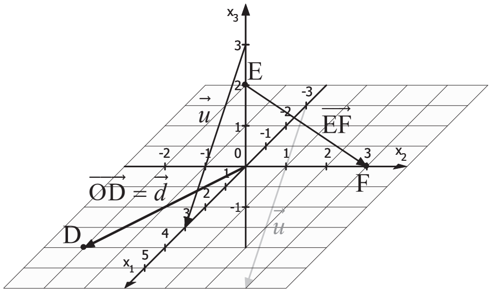
$B(-3|2|-0{,}5)$; $C(0|-2|0)$



1.2 Vektoren (im $\mathbb{R}^3$)

Beispiel: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Von einem beliebigen **Anfangspunkt** geht man
3 Einheiten nach vorne und
3 Einheiten nach unten.



Bemerkungen

- **Ortsvektor** eines Punktes: Zeigt vom Ursprung auf den Punkt (also auf einen „Ort“).

Beispiel: $D(4|-2|0)$ und $\overrightarrow{OD} = \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- **Verbindungsvektor** zwischen 2 Punkten:

Beispiel: $E(0|0|2)$ und $F(0|3|0) \rightarrow \overrightarrow{EF} = \vec{f} - \vec{e} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 3-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

„Verbindungsvektor = Endpunkt − Startpunkt“

- **Spezielle Vektoren**

Nullvektor $\vec{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; Einheitsvektoren: $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

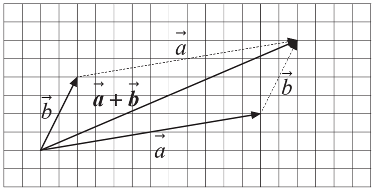
www.mvurl.de/d7o3

1.3 Rechnen mit Vektoren

1. Addition und Subtraktion von Vektoren

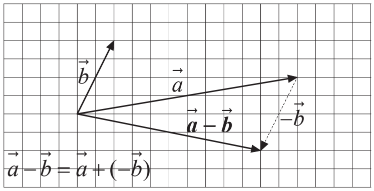
$$\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\\boldsymbol{a}_2\\\boldsymbol{a}_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{b}_2\\\boldsymbol{b}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2\\\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{b}_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}\quad\text{(Beispiel)}$$



$$\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\\boldsymbol{a}_2\\\boldsymbol{a}_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{b}_2\\\boldsymbol{b}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{b}_2\\\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{b}_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}\quad\text{(Beispiel)}$$



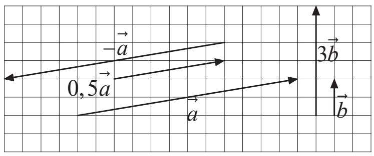
Hinweis: Grafisch wird bei der Subtraktion der Gegenvektor $-\vec{b}$ addiert.

2. Länge (Betrag) eines Vektors

$$\vec{\boldsymbol{a}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\\boldsymbol{a}_2\\\boldsymbol{a}_3\end{pmatrix}\rightarrow|\vec{\boldsymbol{a}}|=\sqrt{\boldsymbol{a}_1{}^2+\boldsymbol{a}_2{}^2+\boldsymbol{a}_3{}^2};\ \text{Beispiel: }\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}\rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5\text{ LE}$$

3. S(kalare) – Multiplikation (Zahl · Vektor)

$$\boldsymbol{k}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}_1\\\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}_2\\\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}_3\end{pmatrix}(k\in\mathbb{R})\quad\text{Beispiel: }2\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\-8\end{pmatrix}$$



Bemerkungen

- Der Vektor $k\cdot\vec{a}$ hat die $|k|$-fache Länge von $\vec{a}$ und ist parallel zu $\vec{a}$.
- Der **Gegenvektor** $-\vec{\boldsymbol{a}}$ ist parallel und besitzt die gleiche Länge wie $\vec{a}$, ist jedoch entgegengesetzt gerichtet.

Beispiel: $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix};\ -\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$

- Ein **Einheitsvektor** ist ein Vektor, dessen **Länge 1** ist. Teilt man einen gegebenen Vektor durch seine Länge (Betrag), erhält man den zugehörigen Einheitsvektor.

Beispiel: $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$ hat die Länge $|\vec{a}|=5$; Einheitsvektor: $\overrightarrow{a_0}=\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}6\\0\\-0{,}8\end{pmatrix}$

www.mvurl.de/23it