STARK
Prüfung

MEHR ERFAHREN

Abitur

Bayern

Kolloquium Mathe

- ✓ Offizielle Beispiele für Kolloquiumsprüfungen
- ✓ Zusätzliche Musterprüfungen im Stil des Kolloquiums
- ✓ Tipps zur Vorbereitung

Inhaltsverzeichnis

Autorin der Beispielprüfungen und der Lösungen der Illustrierenden Prüfungsaufgaben des ISB:
Sybille Reimann

Vorwort

Liebe Fast-schon-Abiturienten,

mit dem neuen G9 und dem neuen Lehrplan treten auch neue Bestimmungen für die Abiturprüfung in Kraft. So können Sie die Abiturprüfung im Fach Mathematik ab dem Schuljahr 2025/26 nun auch mündlich in Form einer **Kolloquiumsprüfung** ablegen.

Dieses Buch soll Sie nicht nur mit den **Modalitäten** einer solchen Prüfung vertraut machen, sondern Ihnen anhand von **Beispielen** auch die Möglichkeit bieten, sich auf das Kolloquium in Mathematik so umfangreich vorzubereiten, dass Sie bestens gerüstet und damit beruhigt in die Prüfung gehen können.

Sie finden in diesem Buch bei den Hinweisen **Antworten** auf die Fragen:
- Was kann ich wählen?
- Wie läuft meine Prüfung ab?
- Was sagen mir die Operatoren?
- Was sollte ich beherrschen?
- Wie kann ich mich vorbereiten?
- Wie bearbeite ich ein Beispielkolloquium?
- Was muss ich bei den Illustrierenden Prüfungsaufgaben beachten?

Bei den Aufgaben stehen Ihnen **vier Beispiele von Kolloquiumsprüfungen**, die das ISB (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München) erstellt hat, sowie **zwölf weitere Beispiele im Stil des neuen Kolloquiums** zur Verfügung. Zu allen Beispielen gibt es in diesem Band ausführliche Lösungen.

Viele Erfolgserlebnisse schon bei der Vorbereitung Ihres Mathematik-Kolloquiums und dann ganz viele Punkte in der Abiturprüfung!

Sybille Reimann

Sybille Reimann

Hinweise und Tipps zum Kolloquium

Was kann ich wählen?

Für die Kolloquiumsprüfung in Mathematik haben Sie die Möglichkeit, **Stochastik oder Geometrie** auszuschließen. Von den beiden verbleibenden Sachgebieten erklären Sie eines zum **Prüfungsschwerpunkt**, d. h., hier werden Sie nach einer 30-minütigen Vorbereitungszeit ein ca. 10-minütiges Referat halten, dem sich noch Fragen aus diesem Gebiet anschließen, was ca. 5 Minuten in Anspruch nehmen wird. Die verbleibenden 15 Minuten werden Ihnen Fragen aus Ihrem weiteren Sachgebiet gestellt werden.

Für die ca. 30-minütige Prüfungszeit haben Sie somit die Wahl unter **vier Möglichkeiten** der Zusammenstellung der Sachgebiete:

Prüfungsschwerpunkt Bearbeitung eines Aufgabenblattes in einer 30-minütigen Vorbereitungszeit; Referat und Fragen (ca. 15 Minuten)	**weiteres Sachgebiet** Prüfungsgespräch (ca. 15 Minuten)
Analysis	Stochastik
Analysis	Geometrie
Stochastik	Analysis
Geometrie	Analysis

Wie läuft meine Prüfung ab?

Das Kolloquium wird in **zwei Teilen** (Vorbereitung und Prüfung) und im Allgemeinen auch in zwei verschiedenen Räumen abgelegt.

Seien Sie **pünktlich vor Beginn Ihrer Vorbereitungszeit** vor dem angegebenen Raum. Bei sich haben sollten Sie Schreib- und Zeichengerät, Ihren Taschenrechner und eine Uhr. **Besorgen Sie sich rechtzeitig** vor der Prüfung einen **„normalen" Wecker**, denn ein Handy dürfen Sie in der Prüfung nicht benutzen, sollten aber die Zeit immer im Blick haben!

Zu Beginn der ca. 30-minütigen **Vorbereitungszeit** erhalten Sie ein **Aufgabenblatt**, die Formelsammlung und ausreichend Papier. Die Aufgaben, die sich auf Ihr **Schwerpunktgebiet** beziehen, sollen Sie nun so bearbeiten, dass Sie Ihre Ergebnisse anschließend in einem Vortrag präsentieren können.

Nach Ablauf der Vorbereitungszeit wird man Sie in den Prüfungsraum bitten. An manchen Schulen ist der Raum für Vorbereitung und Prüfung derselbe. Darüber, wie dies an Ihrer Schule gehandhabt wird, werden Sie rechtzeitig informiert. Nehmen Sie **alle Ihre Unterlagen und Ihren Wecker** mit in den Prüfungsraum.

Nun beginnt die ca. 30 Minuten dauernde Prüfungszeit. **Begrüßen** Sie zunächst Ihre Prüfer (möglichst mit Namen). **Sprechen** Sie während der gesamten Prüfung **laut und deutlich**, auch wenn Sie anfangs nervös sind. Halten Sie mit den Prüfern, soweit es möglich ist – und Sie nicht gerade etwas anschreiben –, **Blickkontakt**. Erwarten Sie aber bitte nicht, dass Sie aus den Gesichtern allzu viel herauslesen können: Die Prüfer setzen im Allgemeinen ein „Pokerface" auf. Dennoch kommt es sehr viel besser an, wenn Sie weder in den Boden hinein, noch über die Köpfe der Prüfer hinweg sprechen.

In den ersten **ca. 10 Minuten** halten Sie einen **Vortrag**, in dem Sie die Ergebnisse der Ihnen vorgelegten Aufgaben präsentieren und Ihre Lösungsansätze erläutern. Haben Sie dabei stets auch die Uhr im Blick, damit Sie die für das Referat vorgegebenen 10 Minuten so gut wie möglich einhalten können.

In den folgenden **ca. 5 Minuten** werden Ihnen **Fragen zu Ihrem Schwerpunktgebiet** gestellt. Diese können sich auf die Aufgaben beziehen, die Sie in der Vorbereitungszeit bearbeitet haben, können aber auch ganz andere Themen des Schwerpunktgebiets betreffen.

Die restlichen **15 Minuten** sind dem **zweiten von Ihnen gewählten Gebiet** gewidmet. Hier werden Ihnen – zum Teil anhand vorgelegten Materials – Fragen gestellt, die Sie jeweils zu beantworten haben.

Am Ende der Prüfung **verabschieden** Sie sich von Ihren Prüfern und verlassen den Raum. Bitte verkneifen Sie sich jede Frage im Stil „Wie war's?". Die Prüfer dürfen Ihnen nichts sagen.

Wie bearbeite ich ein Beispielkolloquium?

Bearbeiten Sie stets eine **komplette Prüfung**.

Richten Sie sich zu Beginn alles her, was Sie benötigen könnten: Wecker, Papier (auch als Tafelersatz), Stifte, Zeichengerät, Taschenrechner, Formelsammlung, Handy bzw. Aufnahmegerät und natürlich dieses Buch, aufgeschlagen beim Beispielkolloquium, das Sie bearbeiten wollen.

Vorbereitung im Schwerpunktgebiet

Stellen Sie sich den Wecker so ein, dass er sowohl nach 25 als auch nach 30 Minuten klingelt.

Während der **ersten 25 Minuten** lösen Sie die Aufgaben des Aufgabenblatts. Dabei teilen Sie Ihr Papier, auf das Sie Ihre Lösungen schreiben, senkrecht so, dass Sie im rechten Abschnitt all das vermerken, was Sie voraussichtlich in Ihren Vortrag aufnehmen wollen. Das sollten Ihre jeweiligen Lösungsideen – auch Skizzen! – und wichtige Ergebnisse sein. Falls Ihnen bei einer Aufgabe noch ein weiterer Lösungsweg („Alternative“) einfällt, sollten Sie auch diesen notieren.

In den **restlichen 5 Minuten** sollten Sie sich ganz oben auf dem Blatt mit Ihren Lösungen zuerst Ihren „Einstiegssatz“ wörtlich aufschreiben, denn am Anfang Ihres Vortrags sind Sie noch nervös und verhaspeln sich sonst leicht. In diesem Satz fassen Sie kurz zusammen, worum es in der Aufgabe (oder ggf. zu Beginn der Aufgabe) geht. Kontrollieren Sie dann anhand Ihrer Aufzeichnungen auf der rechten Seite, ob Sie zu jeder Teilaufgabe eine entsprechende Anmerkung gemacht haben, die Sie in Ihren Vortrag aufnehmen wollen. Ergänzen Sie entsprechend oder streichen Sie auch etwas raus, das Ihnen nicht mehr so wichtig erscheint. Streichen Sie es bitte so aus, dass Sie es noch lesen können, falls Sie nach Ihrem Vortrag genau danach gefragt werden sollten.

Prüfung

Nehmen Sie Ihre Stimme während der gesamten Übungsprüfung mit dem Handy oder einem sonstigen Aufnahmegerät **auf**, um sich anschließend selbst kontrollieren zu können. Vielleicht kann Ihnen eine Freundin, ein Freund oder ein Familienmitglied zuhören, dann haben Sie auch gleich ein Feedback über Ihr Auftreten und, wenn es sich um jemanden aus Ihrer Klassenstufe handelt, auch über die Verständlichkeit. Aber auch wenn Sie Publikum haben, **nehmen Sie alles auf**.

Schwerpunktgebiet

- Stellen Sie sich nun hin, begrüßen Sie Ihre imaginären Prüfer und beginnen Sie Ihren **Vortrag**. Das Blatt, das Sie in der Vorbereitungszeit bearbeitet haben, halten Sie entweder in der Hand oder legen es so vor sich hin, dass Sie es bequem ablesen können. Während des Vortrags sollten Sie wichtige Skizzen und Ergebnisse auf einem Blatt, das Sie vorher als Tafelersatz an einen Schrank oder an der Wand

Bayern Mathematik Kolloquium
Beispiel 5 ▪ Analysis / Geometrie

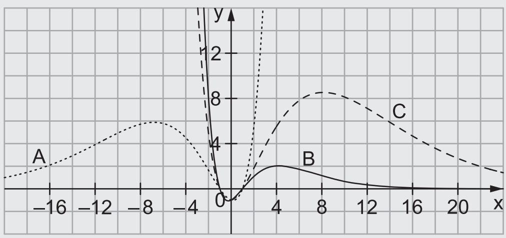
Aufgabenblatt

1 Gegeben ist die Funktion $f(x) = x(3 - \sqrt{x})$ mit $D = \mathbb{R}_0^+$.

- **a** Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.
- **b** Untersuchen Sie Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktion f und geben Sie die Art und die Lage des Extrempunkts des Graphen von f an.
- **c** Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten in den Nullstellen der Funktion f.
- **d** Skizzieren Sie den Graphen G_f mithilfe aller bisher ermittelten Ergebnisse.
- **e** Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph G_f mit der x-Achse einschließt.

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktionenschar $f_a(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{ax}$ mit $a \neq 0$.

- **a** Zeigen Sie, dass alle Kurven der Schar dieselben Nullstellen besitzen.
- **b** Untersuchen Sie das Verhalten der Scharkurven für $x \to -\infty$ in Abhängigkeit von a.
- **c** Die Abbildung zeigt die Graphen für $a_1 = -0{,}5$, $a_2 = -0{,}25$ und $a_3 = 0{,}3$. Ordnen Sie die Werte von a dem jeweiligen Graphen zu und begründen Sie Ihre Wahl.



Fragen zu Analysis

1 **zu Aufgabe 2**
Für $a = \pm 1$ ergeben sich die beiden Funktionen:

$f_1(x) = (x^2 - 1) \cdot e^x$ $\qquad$ $f_{-1}(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$

In welchem Zusammenhang stehen die Graphen von f_1 und f_{-1}?

2 **ohne direkten Bezug**

Gegeben ist die Funktion $h(x) = 3\sin(2x) - 1$.

a Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion h aus dem Graphen der Funktion $y = \sin(x)$ entwickelt werden kann.

b Geben Sie die Periode und die Wertemenge von h an.

3 **ohne direkten Bezug**

Material:

$\ln(x+4) = \ln(-x-4)$ $\qquad$ $e^{x-3} + e^{3-x} = 0$ $\qquad$ $\sin(x+2) - 2 = 0$

Untersuchen Sie die drei Gleichungen auf Lösbarkeit.

Fragen zu Geometrie

1 *Material:*

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-2\\6\\-4\end{pmatrix} \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

a Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

b Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.

c Legen g und h eine Ebene fest?

d Geben Sie eine Gleichung dieser Ebene in Parameterform an.

2 *Material:*

Gegeben sind die beiden windschiefen Geraden g und h:

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Beschreiben Sie, wie man den Abstand dieser windschiefen Geraden berechnet.

3 *Material:*

Ebene E: $3x_1 - 4x_3 + 1 = 0$ $\qquad$ Kugel K: $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 + 2)^2 = 25$

a Zeigen Sie, dass die Ebene E die Kugel K schneidet.

b Bestimmen Sie den Radius des Schnittkreises.

Ausführliche Rechnung

1 a
$$f(x) = 0$$
$$x(3-\sqrt{x}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ oder } 3 = \sqrt{x}$$
$$x_2 = 9$$

b
$$f'(x) = 1\cdot(3-\sqrt{x}) + x\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$= 3-\sqrt{x} - \frac{x}{2\sqrt{x}}$$
$$= 3-\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} = 3-\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Alternative:
$$f(x) = 3x - x\sqrt{x} = 3x - x^{\frac{3}{2}}$$
$$f'(x) = 3-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3-\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$f''(x) = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 3-\frac{3}{2}\sqrt{x} > 0$$
$$3 > \frac{3}{2}\sqrt{x}$$
$$\sqrt{x} < 2 \Rightarrow x < 4$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow 3-\frac{3}{2}\sqrt{x} < 0$$
$$3 < \frac{3}{2}\sqrt{x}$$
$$\sqrt{x} > 2 \Rightarrow x > 4$$

f steigt streng monoton in $]0; 4[$ und fällt streng monoton in $]4; +\infty[$.
$x = 4$ ist somit Extremstelle.
$f(4) = 4\cdot(3-\sqrt{4}) = 4 \Rightarrow \text{HOP}(4|4)$
$f''(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^+$ negativ, somit ist f in $\mathbb{R}^+$ rechtsgekrümmt.

c Tangente im Punkt $(0|0)$:
$$m = f'(0) = 3-\frac{3}{2}\sqrt{0} = 3$$

Notizen für den Vortrag

Nullstellen:
$x_1 = 0$
$x_2 = 9$

$f'(x) = 3-\frac{3}{2}\sqrt{x}$; $D_{f'} = \mathbb{R}^+$

$f''(x) = -\frac{3}{4\sqrt{x}}$

$f'(x) > 0$: $x < 4$

$f'(x) < 0$: $x > 4$

f in $]0; 4[$ str. mon. steigend
f in $]4; +\infty[$ str. mon. fallend

HOP$(4|4)$

f in $\mathbb{R}^+$ rechtsgekrümmt

Tangente im Punkt $(0|0)$:
$m = f'(0) = 3-\frac{3}{2}\sqrt{0} = 3$

Begrüßung der Prüfer	**Anschriften und Skizzen**
Die erste Aufgabe behandelt die Funktion:	
$f(x) = x(3 - \sqrt{x})$ mit $D = \mathbb{R}_0^+$	$f(x) = x(3 - \sqrt{x})$
Da ein Produkt dann den Wert null hat, wenn einer der Faktoren null ist, befinden sich die Nullstellen der Funktion bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 9$.	Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = 9$
Das Monotonieverhalten lässt sich mithilfe der 1. Ableitung, das Krümmungsverhalten anhand der 2. Ableitung bestimmen.	
Die 1. Ableitung ergibt sich *entweder* mit der Produktregel und mit $\sqrt{x}\,' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
oder einfacher, wenn man f(x) zunächst umformt:	
$f(x) = x(3 - \sqrt{x}) = 3x - x\sqrt{x} = 3x - x^{\frac{3}{2}}$	$f(x) = 3x - x^{\frac{3}{2}}$
Die 1. Ableitung lautet: $f'(x) = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{x}$	$f'(x) = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{x}$
Daraus ergibt sich die 2. Ableitung: $f''(x) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{4\sqrt{x}}$	$f''(x) = -\frac{3}{4\sqrt{x}}$
Das Vorzeichen der 1. Ableitung bestimmt die Monotonie:	
$f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; 3 - \frac{3}{2}\sqrt{x} > 0 \;\Rightarrow\; x < 4$	$f'(x) > 0$: $x < 4$
$f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; 3 - \frac{3}{2}\sqrt{x} < 0 \;\Rightarrow\; x > 4$	$f'(x) < 0$: $x > 4$
f steigt streng monoton in $]0; 4[$ und fällt streng monoton in $]4; +\infty[$.	f in $]0; 4[$ str. mon. steigend f in $]4; +\infty[$ str. mon. fallend
$x = 4$ ist somit Extremstelle und in $(4 \mid 4)$ liegt ein Hochpunkt vor.	HOP$(4 \mid 4)$
Die 2. Ableitung $f''(x) = -\frac{3}{4\sqrt{x}}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^+$ negativ. Somit ist f in $\mathbb{R}^+$ rechtsgekrümmt.	f in $\mathbb{R}^+$ rechtsgekrümmt