

## 1 Zahlenmengen

Die Zusammenfassung von bestimmten, unterscheidbaren Zahlen zu einer Menge nennt man Zahlenmenge. Die einzelnen Zahlenmengen lassen sich durch verschiedene Eigenschaften beschreiben. Sie werden mit einem Großbuchstaben, der einen Doppelstrich enthält, abgekürzt.

### EINLEITUNG

#### Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen enthält die beim Zählen verwendeten Zahlen 1,2,3,4,5, usw. und wird mit dem Formelzeichen  $\mathbb{N}$  abgekürzt. Die 0 gehört je nach Definition dazu.

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,\dots\}$$



Eine Fußballmannschaft besteht aus 11 Spielern. Solche Zahlen nennt man natürliche Zahlen.

#### Ganze Zahlen

Die Menge der ganzen Zahlen enthält zusätzlich zur Menge der natürlichen Zahlen auch deren negative Gegenstücke  $-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5$ , usw. und wird mit dem Formelzeichen  $\mathbb{Z}$  abgekürzt. Die Zahl 0 gehört immer dazu und ist weder positiv noch negativ.

$$\mathbb{Z} = \{\dots-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,\dots\}$$



Das Thermometer zeigt positive und negative Temperaturen – also ganze Zahlen. In diesem Fall:  $-5^\circ\text{C}$ .

#### Rationale Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen enthält zur Menge der ganzen Zahlen auch alle Zahlen, die sich durch einen Bruch darstellen lassen. Dabei besteht sowohl der Nenner als auch der Zähler aus ganzen Zahlen, mit der Einschränkung, dass der Nenner nicht aus der Zahl 0 bestehen darf. Die Zahlenmenge wird mit dem Buchstaben  $\mathbb{Q}$  abgekürzt.

$$\mathbb{Q} = \{\dots-\frac{23}{3}, -4, -3, -\frac{1}{5}, 0, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{31}{7}, \dots\}$$



Ein Pizzastück ist  $\frac{1}{8}$  der ganzen Pizza. Brüche gehören zu den rationalen Zahlen.

Volumen Messbecher  
 $V = \pi r^2 h$



## Reelle Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen enthält zur Menge der rationalen Zahlen alle Zahlen, die sich als unendlich lange Dezimalzahlen, aber nicht als Bruch darstellen lassen. Beispiele dafür sind:  $-\sqrt{11}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\pi$ , usw. Die Zahlenmenge wird mit dem Buchstaben  $\mathbb{R}$  abgekürzt.

$$\mathbb{R} = \{ \dots, -\frac{23}{3}, -4, -\sqrt{11}, -\frac{1}{5}, 0, 1, \frac{3}{2}, \sqrt[3]{5}, 2, \pi, \frac{31}{7} \dots \}$$

Zahlenmengen können in aufzählender oder beschreibender Form angegeben werden.

Aufzählende Form:  $B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$

Beschreibende Form:  $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid x < 8 \}$

Den Ausdruck in der Klammer in der beschreibenden Form kann wie folgt sprachlich wiedergegeben werden: „Menge aller natürlichen Zahlen, die kleiner als 8 sind“.

## AUFGABEN

- 1** Markieren Sie mit dem Elementzeichen  $\in$ , in welcher Zahlenmenge die Zahl enthalten ist.

	$\frac{1}{3}$	-125	$8\pi$	-24,33	$\sqrt{7}$	$\sqrt{81}$	$6^3$	$\sqrt{17}$
$\mathbb{N}$								
$\mathbb{Z}$								
$\mathbb{Q}$								
$\mathbb{R}$								

- 2** Geben Sie die Zahlenmenge in beschreibender Form an.

- a)  $X$  ist eine ganze Zahl, die größer als  $-5$  ist.  
 b)  $X$  ist eine reelle Zahl zwischen 2,5 und 10,5. Die Grenzen sind enthalten.

- 3** Geben Sie jeweils 4 Zahlen in aufzählender Form an, die zu der Zahlenmenge  $A$  gehören.

- a)  $A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x > 7,25 \}$     b)  $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{3} < x < 8 \}$

## 2 Rechnen mit Termen

Sowohl im Alltag, aber auch in der Mathematik spielen Terme eine bedeutende Rolle. Sie bilden das Grundgerüst für komplexere mathematische Elemente wie Gleichungen oder Funktionen und ermöglichen es, alltägliche Zusammenhänge mathematisch zu beschreiben.

### EINLEITUNG

Beispielsweise lassen sich die Gesamtkosten für eine Taxifahrt mithilfe eines Terms darstellen. Für eine Taxifahrt von 10 km und einem Preis von 2,95 € pro Kilometer lässt sich der Gesamtpreis mittels folgenden Terms berechnen:  $2,95 \text{ €/km} \cdot 10 \text{ km} = 29,50 \text{ €}$ . Von Gleichungen unterscheiden sich Terme dadurch, dass sie kein „=“ enthalten.



### 2.1 Begrifflichkeiten rund um Terme

Man unterscheidet verschiedene Arten von Termen:

#### Definition

Terme mit Zahlen:

z. B.  $-2$ ;  $\sqrt{3}$ ;  $3^4$ ;...

Terme mit Variablen:

z. B.  $a$ ;  $x^3$ ;  $\sqrt{y}$ ;...

Terme bestehend aus einer Kombination von Zahlen,

Rechenzeichen und Variablen:

z. B.  $-10 \cdot \frac{3}{8} \cdot x$ ;  
 $(2+x) \cdot y$ ;...

Den **Wert des Terms** erhält man, indem man in einem Term mit Variablen für die jeweiligen Variablen eine Zahl einsetzt.

Beispiel: Berechne den Wert des Terms  $2 \cdot x + 3 \cdot y$  für  $x = 3$  und  $y = 4$ .

$2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 6 + 12 = 18$ . Der **Wert des Terms** ist 18.

Für die Betrachtung von Termen ist es nötig, sich mit den Begrifflichkeiten der verschiedenen Grundrechenarten vertraut zu machen.

#### Definition

##### Addition:

Die Addition beschreibt die Vereinigung von zwei oder mehr Zahlen z. B.  $3 + 5 = 8$ . Das mathematische Symbol ist das „+“.

3 und 5, die Zahlen, die im Beispiel addiert werden, werden **Summanden** genannt.

8, das Ergebnis der Addition des Beispiels, wird **Summe** genannt.

## Subtraktion:

Die Subtraktion von zwei Zahlen wird mathematisch durch das Symbol „-“ beschrieben. Beispielsweise beschreibt  $8 - 5 = 3$ , dass von der Zahl 8 die Zahl 5 abgezogen wird. Das Ergebnis 3 wird **Differenz** genannt.

## Multiplikation:

Die Multiplikation wird mathematisch durch „·“ repräsentiert.

Beispiel:  $y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = y^5$ . Hierbei wird  $y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$  **Produkt** genannt.  $y^5$  wird **Potenz** genannt.

## Division:

Division beschreibt das Teilen einer Zahl durch eine andere Zahl und wird durch „:“ repräsentiert. Z. B.  $8 : 2 = 4$ .

Im Beispiel ist 8 der **Dividend**, 2 der **Divisor** und 4 der **Quotient**.

Ein Quotient lässt sich auch als Bruch schreiben:  $\frac{8}{2} = 4$ .

**Wichtig:** Es ist nicht möglich durch 0 zu teilen.

## AUFGABEN



- 1** Berechnen Sie die Summe, Differenz, Produkt und Quotient. Ordnen Sie zudem jeweils die Fachbegriffe Summe, Differenz, Produkt und Quotient den Aufgaben zu.

a)  $3 + 2,4$       b)  $3 \cdot 3,5$       c)  $18 : 1,5$       d)  $-17 - 3$       e)  $-17 + 3$

- 2** Schreiben Sie als Potenz und berechnen Sie den Wert des Terms für  $y = 3$ .

a)  $y \cdot y$       b)  $y \cdot y \cdot y$       c)  $y \cdot y \cdot y \cdot y$

- 3** Stellen Sie einen Term auf, der nachfolgend beschrieben wird. Berechnen Sie anschließend.

- a) Addieren Sie zur Zahl 2 die Zahl 3. Multiplizieren Sie das Ergebnis mit 3.  
 b) Zum Produkt aus 3 und 2,5 wird die Zahl 4 addiert.  
 c) Der Quotient aus 14 und 2 wird mit 3 multipliziert.

- 4** Berechnen Sie den Wert des Terms. Füllen Sie hierzu die nachfolgende Tabelle aus.

x	y	$0,5x + 2y$	$-2y^2 + x$	$-1,5y + 2x$	$(x + y) \cdot 2$	$-(x + y)$
2	-2					
1		0,5				
0	-3					
-0,5	1					
5	7					
-4	-5					

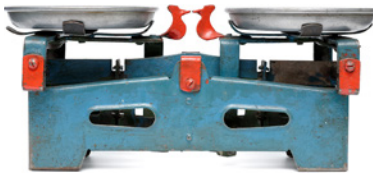
### 3 Gleichungen

#### EINLEITUNG

In der Mathematik ist eine Gleichung ein Ausdruck für zwei Terme  $T_1$  und  $T_2$  mit einem Gleichheitszeichen in der Mitte.

$$T_1 = T_2$$

Bestehen beide Terme  $T_1$  und  $T_2$  der Gleichung nur aus Zahlen, so kann die Gleichung entweder wahr ( $5 = 5$ ) oder falsch ( $2 = 3$ ) sein.



Enthält die Gleichung eine Variable, so hängt es von den für die Variable eingesetzten Zahlen ab, ob die Gleichung wahr oder falsch ist. Die Zahlenwerte, die zu einer wahren Aussage führen, heißen Lösungen oder Lösungsmenge der Gleichung. Zum Lösen der Gleichung wird sie mithilfe der vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division so umgeformt, bis die Variable auf einer Seite isoliert wurde. Diese Umformungen nennt man Äquivalenzumformungen, da sie die Lösung der Gleichung nicht verändern. Zum Umformen wählt man die Rechenart, die die Rechenart in der Gleichung umkehrt, so subtrahiert man, wenn im Term addiert wurde.

Bei einer Ungleichung steht zwischen den beiden Termen  $T_1$  und  $T_2$  anstelle des Gleichheitszeichens das größer als oder kleiner als Zeichen. Hier ist zu beachten, dass bei Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl das Ungleichheitszeichen umgedreht wird. Multipliziert man also die Ungleichung  $-3 > -5$  mit dem Faktor  $-1$  so wird daraus die Ungleichung  $3 < 5$ .



Bei Anwendungsaufgaben ist darauf zu achten, dass nicht jede Lösung der Gleichung sich auf die Sachsituation übertragen lässt. Soll beispielsweise in einer Aufgabe die Anzahl an Sitzen in einem Kinosaal bestimmt werden, so kann die Lösung nur aus der Menge der natürlichen Zahlen stammen, eine Bruchzahl als Lösung scheidet aus. Die Realität gibt somit vor, aus welcher Zahlenmenge die Lösung einer Gleichung stammen kann.

Folgende verschiedene Gleichungen werden behandelt:

#### **Lineare Gleichungen und Ungleichungen**

Die unbekannte Variable ist nur in der ersten Potenz vorhanden.

**Lineare Gleichungssysteme**

Es sind mehrere Gleichungen mit mehr als einer unbekanntem Variablen vorhanden.

**Bruchgleichungen**

Die unbekannte Variable ist im Nenner eines Bruchs enthalten.

**Quadratische Gleichungen**

Die unbekannte Variable ist in der zweiten Potenz vorhanden.

**3.1 Lineare Gleichungen und Ungleichungen**

Bei Aufgaben ohne konkreten Anwendungsbezug wird für die unbekannte Variable häufig  $x$  verwendet. Sie ist nur in der ersten Potenz vorhanden. Anstelle von  $x^1$  wird nur  $x$  geschrieben.

Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung  $4(x - 3) + 5 = x + 2$

**Lösung**

Ausmultiplizieren der Klammer	$4(x - 3) + 5 = x + 2$	
Zusammenfassen der linken Seite	$4x - 12 + 5 = x + 2$	
	$4x - 7 = x + 2$	
Auf beiden Seiten 7 addieren	$4x - 7 = x + 2$	+ 7
Auf beiden Seiten $x$ subtrahieren	$4x = x + 9$	- $x$
Auf beiden Seiten durch 3 teilen	$3x = 9$	: 3
	$x = 3$	

**BEISPIEL**

Äquivalenzumformungen einer linearen Gleichung

Bestimmen Sie die Lösung der Ungleichung  $-2(x - 3) + 11 < 7$

**Lösung**

Ausmultiplizieren der Klammer	$-2(x - 3) + 11 < 7$	
Zusammenfassen der linken Seite	$-2x + 6 + 11 < 7$	
	$2x + 17 < 7$	
Auf beiden Seiten 17 subtrahieren	$2x + 17 < 7$	- 17
Auf beiden Seiten durch $-2$ teilen	$2x < -10$	: (-2)
	$x > 5$	

**BEISPIEL**

Äquivalenzumformungen einer linearen Ungleichung

Lösungsmenge  $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

Bei der Division durch  $-2$  hat sich das Ungleichheitszeichen umgekehrt. Die Lösungsmenge besteht aus allen reellen Zahlen, die größer als 5 sind.

## Definition

Beim Lösen von Gleichungen sollte man nach einem festen Schema vorgehen:

1. Klammern auflösen.
2. Jede Seite der Gleichung ordnen und zusammenfassen.
3. Umformen, bis die Unbekannte isoliert auf einer Seite steht.

Bei Anwendungsaufgaben ist es schwieriger, ein allgemeines Schema zu finden. Hier sind meistens individuelle Strategien gesucht. Eine systematische Vorgehensweise ist jedoch immer sinnvoll.

## BEISPIEL Anwendungsaufgabe



Ein Autofahrer tankt 42 Liter Benzin und kauft noch 1 Liter Motorenöl. Zusammen bezahlt er dafür 83,93 €. Das Motorenöl hat 12,90 € gekostet. Wie viel hat ein Liter Benzin gekostet?

### Lösung

Als erstes wird die gesuchte Unbekannte festgelegt, in diesem Fall der Literpreis Benzin:  $x$ .

Aus den übrigen Angaben wird die Gleichung aufgestellt.

$$42x + 12,90 = 83,93$$

$$42x + 12,90 = 83,93 \quad | - 12,90$$

$$42x = 70,98 \quad | : 42$$

$$x = 1,69$$

Ein Liter Benzin kostet somit 1,69 €.

## BEISPIEL Altersrätsel



Drei Cousinen sind zusammen 64 Jahre alt. Die erste Cousine ist 6 Jahre älter als die zweite Cousine, die dritte Cousine ist 2 Jahre jünger als die zweite Cousine. Welches Alter haben die drei Cousinen?

### Lösung

Zuerst wird die Unbekannte für das Alter einer Cousine festgelegt. Mit den bekannten Altersdifferenzen und dem Gesamalter ergibt sich dann die zu lösende Gleichung.

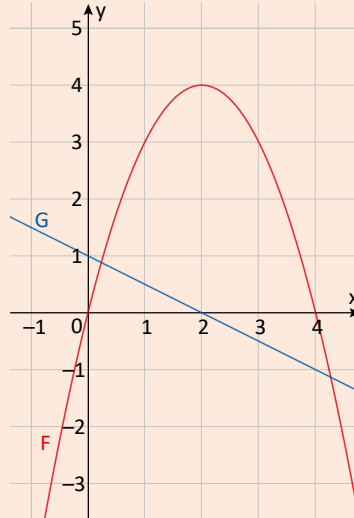
Alter der zweiten Cousine:  $x$

Alter der ersten Cousine:  $x + 6$

Alter der dritten Cousine:  $x - 2$

# 4 Funktionen

Der Begriff „Funktion“ wurde von verschiedenen Mathematikern wie Gottfried Leibnitz (1646–1716), Johann Bernoulli (1667–1748) oder Leonhard Euler (1703–1783) mit Beginn des 18. Jahrhunderts erstmalig verwendet. Damals bezog er sich auf die gesetzmäßige Abhängigkeit zweier Größen, deren grafische Veranschaulichung zu einer zusammenhängenden Kurve ohne Knick führt. Diese Zusammenhänge lassen sich mathematisch durch Gleichungen, wie beispielsweise eine Geraden- oder Parabelgleichung, wiedergeben und in einem kartesischen Koordinatensystem grafisch darstellen.



EINLEITUNG

Abbildung 1  
Gerade und  
Parabel

Allerdings gab es Probleme, diesen Funktionsbegriff auf Anwendungsaufgaben zu übertragen, die sich nur abschnittsweise durch eine Gleichung beschreiben lassen und deren Schaubilder Knicke oder sogar Sprünge aufweisen. Beispielsweise kann der Verlauf von Hochspannungsleitungen mathematisch durch Parabeln gut dargestellt werden, wobei eine Parabelgleichung immer nur einen Streckenabschnitt zwischen zwei Hochspannungsmasten beschreibt. An der Aufhängung der Leitung kommt es zu einem Knick, der eine neue Funktionsgleichung für den nächsten Abschnitt erforderlich macht. Der ursprüngliche Funktionsbegriff wurde somit erweitert und die Anforderung an die einheitliche Gesetzmäßigkeit der mathematischen Zuordnung aufgegeben. Mittlerweile wird eine Funktion als Vorschrift, die jedem Element einer Menge genau ein Element einer anderen Menge zuordnet, definiert. Dabei werden in der Definitionsmenge  $D$  alle  $x$ -Werte als unabhängige Variable zusammengefasst, auf die die Funktionsgleichung angewendet wird. In der daraus resultierenden Wertemenge  $W$  sind alle möglichen  $y$ -Werte enthalten. Es handelt sich um die abhängige Variable. Die Wertemenge ist immer kleiner oder gleich der Definitionsmenge.

