

2 Drei Bereiche, die für das Weiterlernen in Mathematik zentral sind

2.1 Problembereich I: Vorstellungen und Denkweisen zu Zahlen bis 10

Eine wesentliche Grundlage für den erfolgreichen Einstieg in die Welt der natürlichen Zahlen¹ besteht darin, diese Zahlen als *Anzahlen* und damit als *aus Teilen zusammengesetzte Ganze* zu verstehen. Das ist nicht selbstverständlich.



Kinder im Kindergarten verstehen Zahlen häufig als Namen für einzelne Gegenstände, die man beim Abzählen an einer bestimmten Position antrifft.

So verstanden, ist Sieben zum Beispiel der Name für das siebte Gummibärchen in einer Reihe, die gezählt wird; also das *eine* Bärchen, auf das ich zeige, wenn ich die Bärchen der Reihe nach abzähle (vgl. Abb. 1).

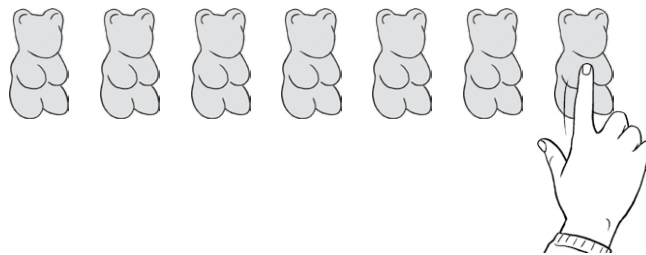


Abb. 1

In dem sehr lesenswerten Handbuch von Benz, Peter-Koop und Grüßing (2014, S. 117) findet man das Beispiel der fünfjährigen Lisa, die zunächst durch korrektes Abzählen feststellt, dass sie sieben Gummibärchen vor sich hat. Sie isst dann davon eines (nicht das siebente) und erklärt auf Nachfrage, dass sie weiterhin sieben Gummibärchen habe. Dabei zeigt sie auf das zuvor als „sieben“ gezählte *eine* Bärchen, das tatsächlich noch an seinem Platz liegt.

Lisa zeigt hier deutlich, dass sie „sieben“ nicht als *Anzahl*, also nicht als *Gesamtheit* der zuvor abgezählten Objekte versteht. Das wäre aber die Voraussetzung dafür, um im nächsten Schritt zu verstehen, dass die Zahl Sieben aus den Zahlen Sechs und Eins zusammengesetzt ist (weshalb sechs Bärchen übrig bleiben, wenn von sieben Bärchen eines gegessen wird).



Entscheidend für das Verständnis der Addition und Subtraktion: Zahlen als *Zusammensetzungen* aus anderen Zahlen denken.

Auch dafür ein konkretes Beispiel. Im Verlauf eines Interviews frage ich den siebenjährigen Aaron, ob er weiß, wie viel *sieben minus fünf* sei. Aaron denkt kurz nach und sagt dann sehr bestimmt: *Zwei!* Auf meine Nachfrage, wie er das herausgefunden habe, erklärt er: *Weil in sieben steckt eine Fünf und eine Zwei drinnen* (vgl. Abb. 2).

¹ Als *natürliche Zahlen* bezeichnet man die Zahlen Eins, Zwei, Drei und so weiter, also Zahlen, die man verwenden kann, um Objekte zu zählen. Die Zahl Null ist dabei ein Sonderfall und in diesem Buch daher wiederholt Thema, denn Sonderfälle bereiten beim Lernen in der Regel besondere Probleme. Neben den *natürlichen* gibt es unter anderem die *rationalen Zahlen*, zu denen Brüche und Dezimalzahlen gehören. Beide werden schon in der Grundschule und daher auch (kurz) in diesem Buch behandelt.

Warnhinweise im Bereich des Zählens

- Anhaltende Unsicherheiten in der Zahlwortreihe vorwärts bis zwanzig
- Schwierigkeiten beim Rückwärtszählen auch schon von zehn weg
- Schwierigkeiten beim Weiterzählen (vorwärts wie rückwärts) von beliebigen Zahlen ausgehend bis 10/20
- Häufige Zählfehler beim Auszählen und Abzählen wegen Missachtung der Eins-zu-eins-Zuordnung
- Ungeordnetes Vorgehen beim Abzählen von ungeordneten Mengen, häufig mit daraus resultierenden Auslassungen und Doppelzählungen. Das Kind erweckt dabei den Eindruck, als sei ihm nicht bewusst, dass es beim Abzählen auf Eins-zu-eins-Zuordnung ankommt.
- Eine durch Abzählen ermittelte Anzahl wird für das Kind fraglich, wenn man die Anordnung der Objekte verändert oder diese z. B. in eine Schachtel gibt und diese schüttelt.
- Unsicherheit oder Nicht-Wissen, ob sich beim Abzählen derselben Reihe von Objekten dieselbe Zahl ergibt, wenn an unterschiedlichen Enden der Reihe zu zählen begonnen wird.
- Das Kind zeigt in bestimmten Situationen, dass es eine Zahl mit einer *Position* gleichsetzt und dabei *nicht* an die *Anzahl* denkt.

Warnhinweise im Bereich des nicht-zählenden Erfassens von Anzahlen

- Das Kind bestimmt Anzahlen von drei und vier Objekten durch Abzählen.
- Die Anzahl der Punkte auf dem Spielwürfel wird durch Abzählen ermittelt.
- Das Kind erfasst zwar die Würfelvier (oder -fünf, -sechs) auf einen Blick, bei gezieltem Nachfragen wird aber deutlich, dass es in dieser Vier (oder Fünf, Sechs) keine Teilanzahlen (zum Beispiel zwei und noch zwei innerhalb von vier Punkten) wahrnimmt.
- Das Kind weiß nicht, dass es fünf Finger an einer Hand hat, und zählt diese bei entsprechender Frage immer wieder aufs Neue ab.

Warnhinweise im Bereich des Vergleichens von Anzahlen

- Wird das Kind aufgefordert, zwei Mengen ihrer Anzahl nach zu vergleichen, geht es auch dann zählend vor, wenn die Anordnung der Elemente einen Vergleich durch Eins-zu-eins-Zuordnung auf einen Blick erlaubt.
- Dem Kind liegen zwei gleiche Mengen in einer Anordnung vor, die eine Eins-zu-eins-Zuordnung auf einen Blick zulässt. Es hat die Anzahl der Elemente der einen Menge zählend ermittelt. Wird es nach der Anzahl der Elemente der anderen Menge gefragt, zählt es auch diese. Es erkennt die Gleichheit der Mengen also nicht aufgrund der gegebenen Eins-zu-eins-Zuordnung.
- Das Kind kann zu einer vorgegebenen Zahl bis zehn nicht sagen, was *eins mehr als...* oder *eins weniger als...* ist.
- Das Kind zeigt Unverständnis bei Fragen wie *Wie viel ist fünf mehr als drei?* oder es beantwortet diese mit der größeren Zahl (*Fünf!*).

Fingerdarstellungen haben den Vorteil, dass sie nicht-zählend zur Verdeutlichung dessen genutzt werden können, was in der Geschichte passiert. Ein Beispiel:

- Ein Kind wählt die Sieben als Ausgangszahl seiner Geschichte. Es zeigt fünf und zwei Finger und erzählt: *Sieben Kinder sind am Spielplatz. Fünf gehen weg* (dabei lässt das Kind die volle Hand sinken), *dann bleiben noch zwei* (zeigt die beiden auf der anderen Hand ausgestreckten Finger).

7.4 Addieren und Subtrahieren: Von Anfang an nicht-zählend!

Stellen Sie bei Übungen zum schnellen Zahldarstellen mit Fingern Fragen wie:

- *Was ist, wenn wir von den neun Fingern fünf wegnehmen wollen? Wie geht das am einfachsten? Wie viele Finger bleiben dann übrig?*
- *Strecke alle Finger einer Hand aus. Wir wollen acht Finger. Wie viele müssen wir noch dazugeben?*
- *Strecke zwei Finger an einer Hand aus. Wie viele Finger werden es, wenn alle Finger der anderen Hand dazukommen? Überlege, bevor du die andere Hand als Ganzes dazugibst!*

In mathematischer Symbolschrift könnte man die oben angeregten Rechenhandlungen wie folgt aufschreiben: $9 - 5 = 4$; $5 + 3 = 8$; $2 + 5 = 7$. Aber darum geht es anfangs noch nicht; es sollte zumindest nicht im Vordergrund stehen. Wenn Kinder Ziffern und Rechenzeichen schon kennen (es wird solche in der Klasse geben), kann man sie dazu einladen, diese Handlungen zusätzlich schriftlich festzuhalten. Alle Kinder sollten aber schon früh das, was sie unter anderem anhand ihrer Finger über die Zahlen herausgefunden haben, dafür verwenden, um nicht-zählend mit den Zahlen zu handeln: Wenn von acht (Fingern, Plättchen, Kastanien) fünf (Finger, Plättchen, Kastanien) weggenommen werden, bleiben drei (Finger, Plättchen, Kastanien). Um das zu wissen, muss man nicht zählen, sondern nur eine Hand als Ganzes, in *einer* Bewegung, wegnehmen – oder, noch einfacher: Man muss sich nur vorstellen, dass die eine Hand als Ganzes wegkommt.

Dieser Schritt in die Vorstellung ist entscheidend. Eine wesentliche Form der Unterstützung besteht in der immer wiederkehrenden Aufforderung zur *Versprachlichung*. Dabei sollte mehr und mehr dazu ermutigt werden, das versprachlichte Handeln in der Vorstellung vorwegzunehmen und schließlich nur noch in der Vorstellung durchzuführen. Zur Verdeutlichung:

Von der Handlung zur Vorstellung

- Grundlage für das Weitere ist, dass das Kind zur Lösung einer Aufgabe wie z.B. *von neun Fingern fünf weg* von sich aus die ganze Hand nicht-zählend wegnimmt.
- Diese Handlung soll es auf Aufforderung sprachlich begleiten, etwa so: *Neun zeige ich mit fünf und noch vier Fingern. Wenn ich fünf Finger wegnehmen soll, nehme ich die ganze Hand auf einmal weg. Vier von der anderen Hand bleiben ausgestreckt.*
- Auf der nächsten Stufe soll versprachlicht werden, nachdem die Handlung schon vorbei ist. Das Kind soll versuchen, sie sprachlich zu rekapitulieren, ohne erneut zu handeln.

- Dann soll das Kind vorwegnehmend beschreiben, wie es von neun Fingern fünf Finger wegnehmen kann. Vielleicht hat es noch das Bedürfnis, sich dazu versichernd die neun Finger (die es zuvor nicht-zählend ausgestreckt hat) anzusehen. Bevor es die eine volle Hand sinken lässt, beschreibt es aber schon, was es tun wird, und mit welchem Resultat.
- Gelingt dies, so wird das Kind bei einem nächsten Mal ermutigt, die Finger gar nicht mehr zu verwenden. Es bezieht sich aber auf diese: *Neun kann ich mit fünf und vier Fingern zeigen, die Fünf kann ich als eine ganze Hand wegnehmen, dann bleibt vier.*
- Schließlich wird allgemein über Zahlen gesprochen, etwa so: *Neun besteht aus fünf und vier. Wenn ich von neun fünf wegnehme, bleiben vier. Wenn ich vier wegnehme, bleiben fünf. Fünf und vier wieder zusammen ergeben neun.*

Kinder können dabei aufgefordert werden, die Hände in einem Zwischenschritt unter dem Tisch, ohne Blickkontakt, auszustrecken und unter dem Tisch mit *Fingerpaketen* zu handeln, also ohne die Finger einzeln zu bewegen. Auch Partnerarbeit ist möglich: Ein Kind muss strikt die Anweisungen ausführen, die ihm das andere gibt, um eine Aufgabe nicht-zählend mit den Fingern zu lösen (z. B.: *Strecke eine ganze Hand aus und noch vier Finger, dann hast du neun ...*).

All das kann und soll im Klassenverband geschehen. Manche Kinder benötigen aber individualisierte Lehr-Lern-Dialoge, um den großen Schritt vom Handeln ins Vorstellen in einer überschaubaren Zeit zu bewältigen.

Wie erläutert, haben Finger als didaktisches Material für den angestrebten Weg vom Handeln zum Vorstellen einen entscheidenden Vorteil: Kinder können mit ihnen auch nicht-zählend *handeln*, indem sie mehrere Finger gleichzeitig wegnehmen oder dazugeben. Sie erleben dabei selbst sehr deutlich den Vorteil gegenüber dem zählenden Vorgehen. Der Unterschied zwischen Kindern, die ihre Finger zählend einsetzen, und denen, die mit ganzen Händen (alle fünf Finger auf einmal) und Finger-Paketen (zwei bis vier Finger auf einmal) handeln, wird im Klassenverband eher sichtbar als bei Verwendung anderer Materialien.

Wie ist es mit weiteren Materialien?

Rechenschiffchen

Nicht-zählendes Dazugeben oder Wegnehmen von Plättchen ist nur möglich, wenn diese in Rechenschiffchen mit je fünf Plätzen eingefüllt werden. Acht beispielsweise kann dann als ein voller Rahmen dargestellt werden, zu dem ein zweiter Rahmen mit drei Plättchen (zwei Plätze bleiben leer) gestellt wird (siehe Abb. 22). Beim Befüllen der Schiff-



Abb. 22

chen können die Plättchen allerdings nur einzeln gelegt werden. Die Subtraktion $8 - 5$ kann nicht-zählend dargestellt werden als Wegnehmen des vollen Rahmens vom Ganzen der Acht, die Addition $3 + 5$ als Hinzufügen eines vollen Rahmens zu einem zweiten, in dem nur drei Plättchen sind. Im Vergleich zum Handeln mit Fingerpaketen ist das zumindest umständlich. Zudem besteht die Gefahr, dass Kinder doch mehr darauf achten, die Plättchen mit den Augen abzuzählen, als auf Teile-Ganzes-Beziehungen. Noch größer sind die Einschränkungen bezüglich nicht-zählender Handlungen bei Eierschachteln mit zwei Reihen zu je fünf Plätzen.